



This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

### **Usage guidelines**

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

- + *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
- + *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
- + *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
- + *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

### **About Google Book Search**

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at <http://books.google.com/>



## Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

## Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

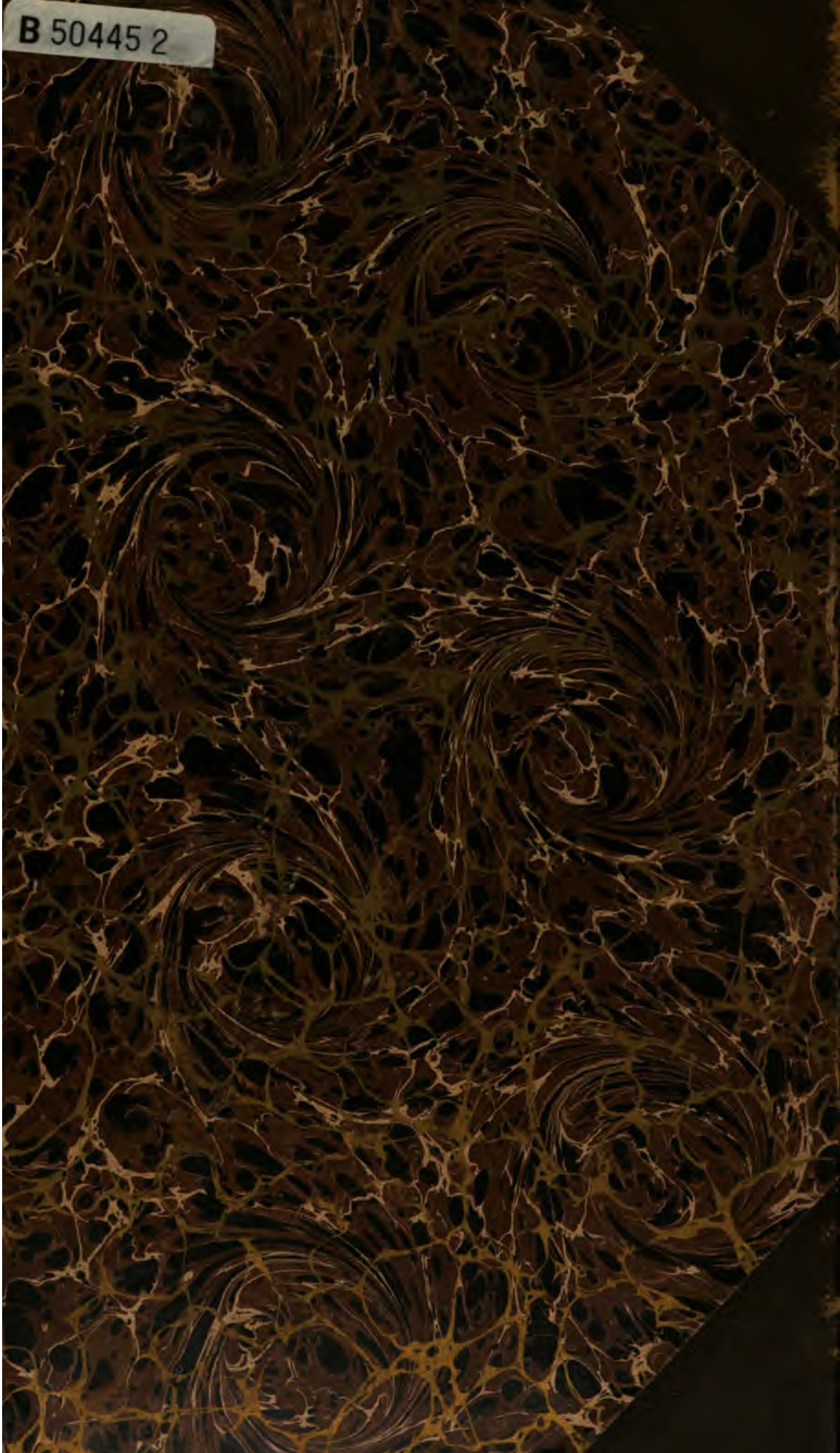
Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

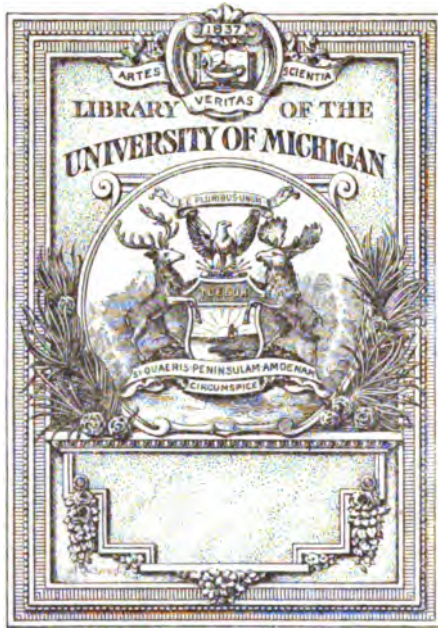
- + *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.
- + *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.
- + *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.
- + *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

## Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter <http://books.google.com> durchsuchen.

B 50445 2

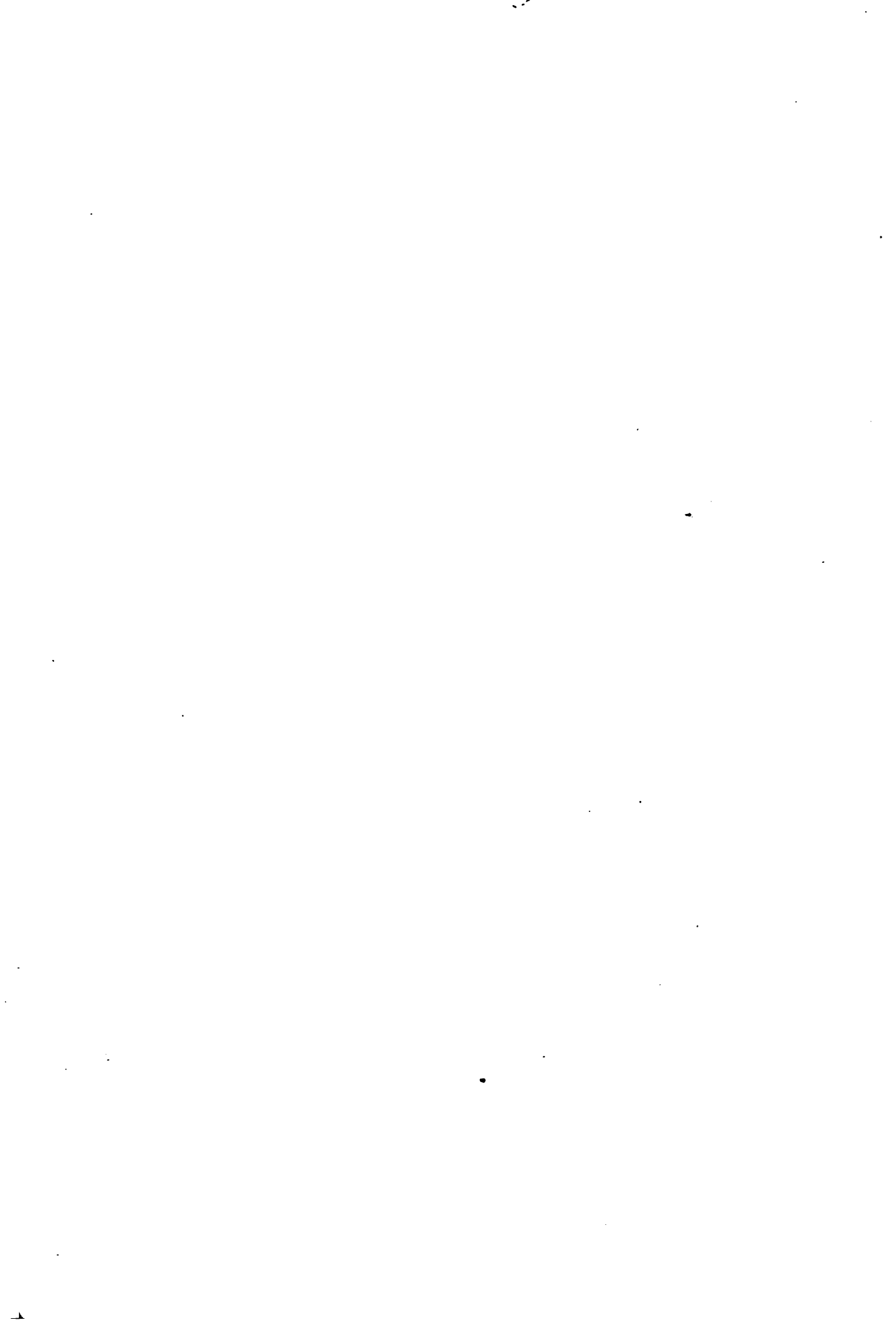




*Alma*

Astronomical  
Observatory

QB  
391  
.H25



8569



8569

**DARLEGUNG**  
 DER  
**THEORETISCHEN BERECHNUNG**  
 DER IN DEN  
**MONDTAFELN**  
**ANGEWANDTEN STÖRUNGEN.**

VON  
*Peter*  
*Andreas*  
**P. A. HANSEN.**  
 =

ERSTE ABHANDLUNG.

Aus den Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe der Königlich  
 Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften. Band VI.

**LEIPZIG**  
 BEI S. HIRZEL.  
 1862.





10. April 1848 2-7-38 4.111

**DARLEGUNG**  
**DER THEORETISCHEN BERECHNUNG**  
**DER IN DEN**  
**MONDTAFELN**  
**ANGEWANDTEN STÖRUNGEN.**

VON  
**P. A. HANSEN.**

---

**ERSTE ABHANDLUNG.**



Um die Veröffentlichung der theoretischen Berechnung der Störungen des Mondes, auf welchen die Mondtafeln, deren Verfasser ich bin, beruhen, nicht allzu weit hinaus zu schieben, wird in dieser Abhandlung nicht die Ableitung und Berechnung aller dieser Störungen vorgenommen. Die Breitenstörungen werden zwar vollständig berechnet, aber von den Störungen der Länge und des Radius Vectors nur der Theil, den ich als den Haupttheil bezeichnen kann. Ich bin nemlich während der Berechnung dieser Störungen darauf gekommen, dass man dieselbe in mehrere Theile zerlegen kann. Der erste dieser Theile, der welcher hier dargelegt wird, kann mit Ausnahme einiger kleinen zur Bewegung des Perigäums des Mondes gehörigen Glieder selbstständig ohne merkliche Ungenauigkeit ausgeführt werden, während die anderen Theile, die später erscheinen werden, ohne den ersten Theil zu haben nicht ausgeführt werden können. Die Methode, die ich anwende, ist mit geringer Abweichung die, welche ich in dem »*Fundamenta nova investigationis orbitae verae quam Luna perlustrat*« betitelten Werke ausführlich erklärt habe; des Zusammenhanges wegen leite ich hier die Gleichungen, nach welchen die Rechnung ausgeführt worden ist, von Neuem auf kurze Art ab. Ich substituire, wie ich in meinen Störungsrechnungen immer gethan habe, sogleich die numerischen Werthe der Coefficienten in die betreffenden Ausdrücke und führe die Multiplicationen und Integrationen unmittelbar mit den Zahlenwerthen aus. Nach allen Erfahrungen, die ich gemacht habe, ist dieses in den Störungsrechnungen überhaupt das kürzeste und sicherste Verfahren, um ein Resultat zu erhalten, dessen Genauigkeit verbürgt werden kann. Zwar kann man auch durch die Anwendung der Methode der unbestimmten Coefficienten ein beliebig genaues Resultat erhalten, wenn man nur den Operationen, die jedenfalls nothwendig sind, keine solche beimischt, wodurch die Convergenz

der Reihen bedeutend geschwächt oder gar in Frage gestellt werden muss, allein es ist schwer in den Bedingungsgleichungen, auf welche die Methode der unbestimmten Coefficienten führt, a priori die Glieder, die Merkliches geben, von denen, die Unmerkliches geben, zu unterscheiden, und man geräth bei dieser Methode daher leicht in die unangenehme Alternative, entweder eine Anzahl von Gliedern mit zuziehen, die sich schliesslich als unmerklich erweisen, oder merkliche Glieder auszulassen. Auch muss man doch bei dieser Methode, da die Anzahl der Bedingungsgleichungen sehr gross ist und die Unbekannten derselben nicht blos in der ersten, sondern auch in den höheren Potenzen vorkommen, für die Coefficienten derselben ihre numerischen Werthe substituiren, und die Auflösung numerisch durch eine Reihe von Annäherungen ausführen. Es ist daher einfacher, und zugleich sicherer, sofort die numerischen Werthe der Coefficienten in die bekannten Glieder zu substituiren, und die Unbekannten ohne Bildung der Bedingungsgleichungen durch eine Reihe von Annäherungen zu ermitteln. Man erlangt auf diese Art sogleich von jedem zu substituierenden Gliede die Kenntniss, ob es merklich ist oder nicht, mit anderen Worten, ob das Resultat der Substitution die numerische Grenze, bis zu welcher hinab man die Störungen berechnen will, übersteigt oder nicht, und im letzteren Falle fällt die Substitution von selbst weg. Die Annäherungen haben selbstverständlich ein Ende, und man hat die richtigen Werthe der Unbekannten erhalten, wenn die zuletzt substituirtten Werthe der Unbekannten wieder aus der Rechnung hervorgehen. Aus diesem Grunde war es unnöthig in der Darlegung meiner Berechnung der Störungen, die in dieser Abhandlung enthalten ist, alle Annäherungen, die ich ausgeführt habe, darzulegen, sondern es gntigte die in den Mondtafeln angegebenen Störungen zu Grunde zu legen, und damit eine Annäherung vollständig durchzuführen. Das Resultat dieser Annäherung ist über die Richtigkeit der von mir in den Mondtafeln gegebenen Störungen entscheidend, und zeigt in den einzelnen Coefficienten keine grösseren Unterschiede wie die, welche aus den zufälligen Fehlern, mit welchen in jeder derartigen Rechnung die letzte Decimalstelle unausweichlich behaftet ist, erklärt werden können. Ausserdem habe ich noch Entwicklungen und Berechnungen hinzugefügt, durch welche die Hauptrechnung an sich einer tief eingreifenden Prüfung unterworfen wird.

Am Ende der Rechnung habe ich die von Plana und Damoiseau gegebenen Längenstörungen mit den meinigen verglichen, und nicht unerhebliche Unterschiede gefunden. Gern hätte ich auch die von Delaunay neuerdings berechneten Störungen mit den meinigen verglichen, allein das von ihm vor Kurzem darüber veröffentlichte Werk ist bis jetzt nicht in meine Hände gelangt.

Zu den oben erwähnten Operationen, durch welche die Convergenz der Reihen bedeutend geschwächt, oder gar ganz in Frage gestellt werden muss, rechne ich in erster Reihe die Auflösung der Nenner, die durch die Integrationen eingeführt werden, in unendliche, nach den Potenzen des Verhältnisses der mittleren Bewegung der Sonne zu der des Mondes fortschreitende Reihen. Diese Reihen werden so unregelmässig, und die numerischen Coefficienten derselben wachsen so stark, dass, wenn sie auch in der That im Allgemeinen für den Mond convergiren sollten,\*) man über die Genauigkeit, die ihre Fortsetzung bis zu irgend einer Potenz des genannten Verhältnisses gewährt, sich gar kein Urtheil bilden kann. Wenn auch von der einen oder anderen dieser Reihen die numerischen Werthe der ersten Glieder abnehmen, so ist damit ihre Convergenz auf keine Weise dargethan, denn man kennt unendliche Reihen, deren Glieder fortwährend abnehmen, und die dennoch divergent sind. Bei den hier in Rede stehenden Reihen kann man nicht einmal aus der Abnahme der ersten Glieder darthun, dass auch alle folgenden in Bezug auf ihre numerischen Werthe abnehmen müssen, es bleibt der Fall gar nicht ausgeschlossen, dass sie von einer gewissen Potenz an wieder an numerischem Werthe wachsen könnten. Und nicht einmal in allen diesen Reihen findet eine Abnahme der numerischen Werthe der ersten Glieder statt, es sind deren vorhanden, in welchen grade das Gegentheil statt findet, und Glieder vorkommen, die grössere numerische Werthe haben, wie die vorhergehenden, algebraisch einer niedrigeren Ordnung angehörigen. Die Entwicklung der Mondstörungen in solche Reihen kann daher nur erst dann ein Resultat liefern, über

---

\*) Dass es einen Werth des genannten Verhältnisses giebt, für welchen sie divergiren müssen, und dass dieser Werth weit kleiner wie Eins ist, ist klar; ja selbst für den Werth, den dieses Verhältniss in der Mondbewegung hat, giebt es Argumente, deren Coefficienten, wenn sie durch diese Reihen ausgedrückt werden, gewiss divergiren. Dazu gehören unter andern die Coefficienten der Argumente  $\omega - \omega'$ ,  $2(\omega - \omega')$ , etc.

dessen numerische Genauigkeit ein bestimmtes Urtheil möglich ist, wenn es gelungen sein wird, die Summe der nicht entwickelten Glieder, mit anderen Worten, den Betrag des Rests einer jeden dieser Reihen mit hinreichender Annäherung anzugeben, und — es will mich bedünken, als läge diese Restbestimmung in weiter Ferne. Von der numerischen Genauigkeit der durch die Theorie erlangten Werthe der Störungscoefficienten hängt aber ihre Brauchbarkeit einzig und allein ab, denn mit ungenauen Werthen derselben lassen sich keine brauchbaren Tafeln darstellen.

Da auf die Störungen, deren Berechnung in dieser Abhandlung dargelegt wird, schon Mondtafeln gegründet worden sind, so halte ich es für angemessen, die allgemeinen Grundsätze, die meines Erachtens nach bei der Bearbeitung von Mond- oder Planetentafeln angewandt werden müssen, und die ich stets befolgt habe, auszusprechen. Zuerst muss man sich durch die Theorie, die nach dem jetzigen Stande dieser Sache auf keinem andern Grunde fassen kann, wie auf dem Newtonschen Gravitationsgesetz, möglichst genaue Ausdrücke der in der Bewegung des betreffenden Himmelskörpers stattfindenden Abweichungen von der elliptischen Bewegung verschaffen, aus dieser verbunden mit vorläufigen Werthen der Constanten, die nur durch Beobachtungen ermittelt werden können, eine hinreichende Anzahl von Oertern des Himmelskörpers berechnen, diese mit den Beobachtungen vergleichen, und daraus die Verbesserungen der angenommenen Werthe der durch die Theorie unbestimmbaren Constanten ableiten. Findet man hierauf, dass die Beobachtungen regelmässige Abweichungen von den berechneten Oertern zeigen, so muss man vor Allem die Störungsrechnungen nachsehen, um in Erfahrung zu bringen, ob darin etwa Fehler oder Auslassungen begangen worden sind, und wenn solche sich nicht auffinden lassen, oder nach der Auffindung solcher dennoch regelmässige Abweichungen übrig bleiben, so muss man diese durch geeignete Aenderung des einen oder anderen Coefficienten auszugleichen suchen, es mag dieses Verfahren Empirismus genannt werden oder nicht. Denn man bedarf solcher Tafeln, die mit den Beobachtungen möglichst gut übereinstimmen, und im Gegentheil, Tafeln, die bei der Vergleichung mit den Beobachtungen wesentliche Unterschiede übrig lassen, sind unbrauchbar, an solchen ist Zeit und Mühe vergeblich angewandt, wenn gleich sie irgend einem theoretischen Resultat noch so strenge angeschlossen worden wären.

Bei der Bearbeitung von Mondtafeln sind es nicht blos die sechs elliptischen Elemente, die durch die Theorie unbestimmbar sind, es sind hier deren mehrere vorhanden. Vor Allem kommt der Halbmesser des Mondes hinzu, dessen Verbesserung als Unbekannte in die Bedingungsgleichungen, wodurch die Verbesserungen der angenommenen elliptischen Elemente ermittelt werden sollen, mit eingeführt werden muss; und zwar müssen hier der verticale und der horizontale Halbmesser unabhängig von einander eingeführt werden, da man im Voraus nicht wissen kann, ob sich eine Verschiedenheit derselben herausstellen wird oder nicht. Der Mondhalbmesser tritt hier deshalb als wesentlichere Unbekannte auf wie in der Theorie der Planeten, weil gewöhnlich sowohl in Rectascension wie in Declination nur Ein Rand der Beobachtung zugänglich ist, und man bei der Reduction der Beobachtungen auf den Mittelpunkt des Mondes weit mehr fehlen kann, wie bei den Planeten in ähnlichem Falle. Eine Anzahl der in der Mondbewegung vorhandenen Störungsglieder, und darunter eins, dessen Coefficient  $120''$  übersteigt, hängen von der Sonnenparallaxe ab, die für sich auch nur durch Beobachtungen bestimmt werden kann. Alle von der Sonnenparallaxe abhängigen Störungsglieder müssen daher mit einem Factor versehen werden, der die Verbesserung der der Berechnung der Störungen zu Grunde gelegten Sonnenparallaxe bestimmt. Der Unterschied dieses Factors von der Zahl Eins bildet eine neue Unbekannte, die auch den eben genannten Bedingungsgleichungen für die Verbesserung der elliptischen Elemente einverleibt werden muss. Ferner befinden sich unter den Mondstörungen einige, die von der Figur der Erde, und namentlich von dem Unterschied der Trägheitsmomente derselben, abhängen,\*) hieraus entsteht eine neue Unbekannte, die auch den genannten Bedingungsgleichungen hinzugefügt werden muss. Endlich war bisher nicht ausgemacht, ob nicht auch die Figur des Mondes merklichen Einfluss auf die Mondbewegung hat, und es musste daher auch ein solcher Einfluss mit berücksichtigt werden. Vor Allem sind es wieder die Unterschiede der Trägheitsmomente des Mondkörpers, von welchen etwaige merkliche Einflüsse abhängen, und die grösste

---

\*) Minder genau ist es diese Glieder von der Abplattung der Erde abhängig zu machen, die übrigens auch nur durch Beobachtungen oder Messungen gefunden werden kann.

Wirkung dieser erstreckt sich auf die der Zeit selbst proportionalen Theile der Bewegungen des Perigäums und der Knoten des Mondes. Es mussten daher auch die Verbesserungen der angenommenen Werthe dieser Bewegungen als zwei neue Unbekannte den Bedingungsgleichungen hinzugefügt werden. Es hat sich, wie man in dieser Abhandlung sehen wird, herausgestellt, dass dieser Einfluss nicht ganz unmerklich zu sein scheint. Uebrigens ist es mit sehr grossen Schwierigkeiten verbunden diese beiden Coefficienten aus der Theorie mit der Genauigkeit zu bestimmen, die gute Mondtafeln erfordern, und man müsste daher auch in dem Falle, dass die Figur des Mondkörpers darauf keinen merklichen Einfluss ausüben könnte, zu deren Bestimmung durch die Beobachtungen seine Zuflucht nehmen.

Zufolge dieser Aufzählung enthielten die Bedingungsgleichungen für die Bestimmung der durch die Theorie unbestimmbaren Elemente zwölf Unbekannte, und nach der Auflösung dieser Gleichungen ergab sich sofort eine Uebereinstimmung zwischen den berechneten und den beobachteten Mondörtern, die sehr wenig zu wünschen übrig liess.

Ich meinte indess aus dieser Vergleichung wahrnehmen zu können, dass eine noch grössere Uebereinstimmung möglich sein könnte, und da die Figur des Mondkörpers und dessen Rotationsbewegung noch etwas Unaufgeklärtes darzubieten scheint, wie aus den Arbeiten von Nicollet und Wichmann über die Libration hervorgeht, so meinte ich hierin eine neue Quelle von Ungleichheiten in der Bewegung des Mondes finden zu können, und kam nach längerer Ueberlegung darauf, dass wohl der Mittelpunkt der Figur des Mondes von dessen Schwerpunkt verschieden sein könnte, und dass, wenn dieses der Fall sei, alle Störungsglieder der Länge mit einem von dieser Entfernung abhängigen Factor zu multipliciren seien, und den Breitenstörungen ein constantes Glied hinzuzufügen sei. Dieser Factor und diese Constante wurden als neue Unbekannte in die Bedingungsgleichungen eingeführt, und letztere von Neuem aufgelöst. Aus dem Resultat dieser Arbeit musste erkannt werden, dass dieser Unterschied in der That vorhanden sei, und die Uebereinstimmung zwischen der Rechnung und den Beobachtungen hatte sich vergrössert. Schliesslich bemerkte ich noch, dass eine kleine Spur von der Wirkung einer Ungleichheit von langer Periode im Resultat der Vergleichung der Rechnung mit den Beobachtungen zu erkennen war, und um diese auszugleichen versuchte ich eine Verbesserung des



Coefficienten der Ungleichheit, die von  $8V - 13E$  abhängt, da die kleinen Unterschiede davon herzurühren schienen. Da hierauf die letzte Spur einer solchen Wirkung verschwand und die Tafeln dadurch gewonnen hatten, so adoptirte ich, dem oben ausgesprochenen Grundsatz gemäss, den verbesserten Coefficienten. Dieses sind die Grundzüge, nach welchen ich die Mondtafeln bearbeitet habe, und der eben genannte Coefficient ist unter allen in den Mondtafeln vorkommenden, durch die Theorie bestimmbaren und in der That bestimmten, Coefficienten der einzige, den ich schliesslich zu ändern Veranlassung gehabt habe.

Das Problem der drei Körper ist namentlich in seiner Anwendung auf die Ermittlung der Mondbewegung sehr verwickelt, und dessen Durchführung mit wesentlichen Schwierigkeiten behaftet. Es hat lange Zeit und grossen Aufwand an mathematischen Kräften erfordert, um es nur einiger Maassen zur Ausbildung zu bringen. Jeder Astronom weiss aus der Geschichte dieses Problems, dass man zu verschiedenen Zeiten darauf Verzicht leisten zu müssen vermeinte, alle durch die Beobachtungen erkannten Ungleichheiten der Bewegung des Mondes dadurch darzustellen, und zur Ansicht seine Zuflucht nahm, dass entweder dem Newtonschen Gravitationsgesetz neue Glieder einzuverleiben seien, oder dass überhaupt noch andere Kräfte auf die Bewegungen des Mondes und der Planeten einwirken müssten. Denn nicht nur in der Bewegung des Mondes, sondern auch in mehreren Punkten der Planetenbewegungen wollten die auf das Newtonsche Gravitationsgesetz gegründeten Theorien, oder theoretische Ausarbeitungen, sich den Beobachtungen keinesweges anschliessen. Unter den Gelehrten, die die eben angeführten Ansichten aussprachen, befanden sich die grössten Mathematiker ihrer Zeit, und dennoch waren diese Ansichten irrthümlich, denn im Laufe der Zeit, bald früher, bald später, stellte sich heraus, dass die Unterschiede zwischen der Theorie und den Beobachtungen, die man für objectiv gehalten hatte, in der That subjectiv waren. Man hatte von den mannigfachen Verzweigungen, die das Problem darbietet und wahrzunehmen erfordert, die einen oder anderen übersehen. Es gelang jedes Mal die Quelle des Unterschiedes, auf den man gekommen war, in der Behandlung des Problems zu finden.

Nach diesen Prämissen ist es immer eine bedenkliche Sache, in dem Falle, wo ein theoretisch gefundener Coefficient mit den Beobach-

tungen nicht übereinstimmen will, den Unterschied, der sich darbietet, als Wirkung unbekannter Kräfte zu bezeichnen. Dieser Ausweg wird um so mislicher, je grösser der sich darbietende Unterschied ist. Da trotz aller Bedenken, die früher in dieser Beziehung ausgesprochen worden sind, das Newtonsche Gravitationsgesetz sich schliesslich immer bewährt hat, so ist die Wahrscheinlichkeit, dass es sich fernerhin auch bewahren werde, sehr gross, und neu auftauchende Unterschiede, gleichwie die, welche sich früher dargeboten haben, subjectiven Ursprungs sind.

---

Diese Abhandlung ist in folgende Abschnitte eingetheilt.

- § 1. Ableitung der Differentialgleichungen, die in dieser Abhandlung angewandt werden sollen. Art. 1—13.
- § 2. Beweis zweier Sätze, die in der Mondbewegung statt finden. Art. 14—18.
- § 3. Specielle Entwicklung der Differentialgleichungen der Mondbewegung. Art. 19—51.
- § 4. Substitution der numerischen Werthe in diejenigen im Vorhergehenden entwickelten Ausdrücke, die ganz bekannt sind. Art. 52—64.
- § 5. Berechnung der Producte, die in den vollständigen Ausdrücken enthalten sind. Art. 65—86.
- § 6. Integration der im Vorhergehenden entwickelten Differentialgleichungen.  
 Berücksichtigung der Werthe von  $\Delta e$  und  $\Delta J$  in den Bewegungen des Perigäums und der Knoten. Art. 87—110.
- § 7. Anderweitige, zur Prüfung dienende, Berechnung der Glieder der Längenstörungen, die einen kleinen Divisor im Quadrat bekommen. Art. 111—121.
- § 8. Berechnung der Störungen der Länge und des Radius Vectors aus den im Vorhergehenden erhaltenen Werthen.  
 Prüfung der ganzen Berechnung dieser Störungen. Art. 122—128.
- § 9. Berechnung der Breitenstörungen und der Reduction der Länge auf die Ecliptik aus den vorhergehenden Werthen. Art. 129—142.

- § 10. Vergleichung der hier berechneten Längenstörungen des Mondes mit denen von Plana und Damoiseau. Art. 143—148.
- § 11. Vorläufige Berechnung der durch die Figur der Erde in der Mondbewegung verursachten Störungen.  
 Berechnung der Trägheitsmomente des Erdkörpers. Art. 149—160.
- § 12. Von den durch die Figur des Mondes in der Mondbewegung entstehenden Störungen.  
 Berechnung der Unterschiede der Trägheitsmomente des Mondkörpers. Art. 164—166.
- § 13. Entwicklung des von der Mondmasse abhängigen Theils der Knotenbewegung des Mondes. Art. 167—169.
- § 14. Von der Einwirkung der Planeten auf die Bewegungen des Perigäums und der Knoten des Mondes, auf die Coefficienten der von der Figur der Erde bewirkten Ungleichheiten, so wie auf die Evectionen und die Variation. Art. 170—180.

---

§ 1. Ableitung der Differentialgleichungen, die in dieser Abhandlung angewandt werden sollen.

1.

Die Differentialgleichungen, die ich anwenden werde, sind die der »*Fundamenta nova etc.*«, die ich stets für die geeignetsten halten muss, und die ich auch mit Anwendung der excentrischen Anomalie als unabhängige Veränderliche, bei der Berechnung der Störungen der kleinen Planeten angewandt habe. Ich könnte mich begnügen, diese Differentialgleichungen aus dem oben angezogenen Werk abzuschreiben, allein ich halte dafür, dass es nicht undienlich sein wird, eine ähnliche, einfache Ableitung derselben anzugeben, wie in der Theorie der kleinen Planeten geschehen ist. Auf die zuletzt genannten Gleichungen kann ich mich nicht beziehen, da in der Mondtheorie die Störungen der mittleren Anomalie ausdrücklich anzuwenden sind, während in der Planetentheorie zwischen den Störungen der mittleren Anomalie und denen der mittleren Länge nicht unterschieden zu werden braucht und auch nicht unterschieden wird.

Es sollen mit  $a_0, n_0, e_0, \pi_0, c_0$  die unveränderlichen, mittleren Werthe der halben grossen Achse, der Bewegung der mittleren Anomalie, der Excentricität, der Länge des Perigäums des Mondes in seiner Bahn, und der mittleren Anomalie für die Zeit  $t=0$  verstanden werden, während  $a, n, e, \chi, c$  die veränderlichen Elemente bezeichnen, und die Curve, die der Mond beschreibt, in der »idealen Ebene« (im Sinne meiner ersten Abhandlung über die Störungen der kleinen Planeten\*) der Bahn gedacht wird. Wenn ausserdem mit  $n_0z$  die Function bezeichnet wird, die an die Stelle der mittleren Anomalie gesetzt, mit  $1+\nu$  der Factor, mit welchem der aus der Anwendung von  $n_0z$  hervorgehende Radius Vector multiplicirt werden muss, und mit  $n_0yt$  die Bewegung des Perigäums auf der »idealen Mondbahn«, so gehen einestheils die wahre Mondlänge  $v$  in der idealen Mondbahn und der wahre Werth des Radius Vectors  $r$  aus den folgenden Gleichungen hervor,

$$(1) \dots\dots\dots \left\{ \begin{array}{l} n_0z = \bar{\epsilon} - e_0 \sin \bar{\epsilon} \\ \bar{r} \sin \bar{f} = a_0 \sqrt{1 - e_0^2} \cdot \sin \bar{\epsilon} \\ \bar{r} \cos \bar{f} = a_0 \cos \bar{\epsilon} - a_0 e_0 \\ a_0^3 n_0^2 = k^2 (1 + m) \\ v = \bar{f} + n_0 y t + \pi_0 \\ r = \bar{r} (1 + \nu) \end{array} \right.$$

und andernteils aus den folgenden,

$$(2) \dots\dots\dots \left\{ \begin{array}{l} nt + c = \epsilon - e \sin \epsilon \\ r \sin f = a \sqrt{1 - e^2} \cdot \sin \epsilon \\ r \cos f = a \cos \epsilon - ae \\ a^3 n^2 = k^2 (1 + m) \\ v = f + \chi \end{array} \right.$$

wo ausser den schon erklärten Bezeichnungen  $\epsilon$  die excentrische,  $\bar{f}$  die wahre Anomalie,  $m$  die Mondmasse und  $k$  die Gaussische Constante bedeuten.

Ich bemerke hiezu, dass in den »Fundamenta etc.«  $w$  statt des obigen  $\nu$  angewandt ist, und dass ich in meiner früheren Berechnung der Mondstörungen auch  $w$  statt  $\nu$  angewandt habe. Später habe ich aber gefunden, dass die Anwendung von  $\nu$  auf eine einfachere Differential-

---

\*) S. Abhandlungen d. K. G. d. Wissenschaften. Bd. V.

gleichung führt wie die von  $w$ , und deshalb wende ich hier jene Function an. Der Uebergang von  $\nu$  zu  $w$ , oder von  $w$  zu  $\nu$  ist leicht zu bewerkstelligen. In Bezug auf das Glied  $n_0 y t$  bemerke ich, dass um den vollständigen Werth von  $y$  zu erhalten, welcher eine Function der Zeit ist, es einfacher sein wird,  $n_0 \int y dt$  statt  $n_0 y t$  in die Gleichungen einzuführen; da in dieser Abhandlung jedoch nur der constante Theil von  $y$  entwickelt und berechnet werden wird, so reicht die Form  $n_0 y t$  aus. Die Differentialgleichungen werden übrigens für jede der beiden angegebenen Formen dieser Function dieselbe äussere Form bekommen.

2.

Die Gleichungen des vor. Art. geben auf bekannte Art durch die Differentiation

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= n_0 \frac{a_0^2}{r^2} \sqrt{1-e_0^2} \cdot \frac{dz}{dt} + n_0 y \\ \frac{dv}{dt} &= n \frac{a^2}{r^2} \sqrt{1-e^2} \end{aligned}$$

woraus

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\bar{r}^2 a^2 n \sqrt{1-e^2}}{r^2 a_0^2 n_0 \sqrt{1-e_0^2}} - \frac{y}{\sqrt{1-e_0^2}} \frac{\bar{r}^2}{a_0^2} \dots \dots \dots (3)$$

folgt. Die Gleichung  $r = \bar{r} (1 + \nu)$  giebt aber

$$1 - \frac{\bar{r}}{r} = \frac{\nu}{1 + \nu}$$

und wenn man diese ins Quadrat erhebt, erhält man

$$\frac{\bar{r}^2}{r^2} = -1 + 2 \frac{\bar{r}}{r} + \left( \frac{\nu}{1 + \nu} \right)^2$$

Substituirt man nun diese in (3), so wird

$$\frac{dz}{dt} = - \frac{a^2 n \sqrt{1-e^2}}{a_0^2 n_0 \sqrt{1-e_0^2}} + 2 \frac{\bar{r}}{r} \frac{a n \sqrt{1-e^2}}{a_0^2 n_0 \sqrt{1-e_0^2}} + \left( \frac{\nu}{1 + \nu} \right)^2 \frac{a^2 n \sqrt{1-e^2}}{a_0^2 n_0 \sqrt{1-e_0^2}} - \frac{y}{\sqrt{1-e_0^2}} \frac{\bar{r}^2}{a_0^2}$$

ferner ist

$$\frac{1}{r} = \frac{1 + e \cos f}{a (1 - e^2)}$$

eliminiert man hiemit  $r$  aus der vorstehenden Gleichung, und setzt zur Abkürzung

$$\left. \begin{aligned} h &= \frac{a n}{\sqrt{1-e^2}} = \frac{k^2 (1+m)}{a^2 n \sqrt{1-e^2}} = \frac{k \sqrt{1+m}}{\sqrt{a} \cdot \sqrt{1-e^2}} \\ h_0 &= \frac{a_0 n_0}{\sqrt{1-e_0^2}} = \frac{k^2 (1+m)}{a_0^2 n_0 \sqrt{1-e_0^2}} = \frac{k \sqrt{1+m}}{\sqrt{a_0} \cdot \sqrt{1-e_0^2}} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (4)$$

so ergibt sich

$$\frac{dz}{dt} = -\frac{h_0}{h} + 2 \frac{h \bar{r}^2}{h_0 a_0 (1 - e_0^2)} (1 + e \cos f) + \frac{h_0}{h} \left( \frac{\nu}{1 + \nu} \right)^2 - \frac{y}{\sqrt{1 - e_0^2} a_0^2} \bar{r}^2$$

oder wenn wir

$$\bar{W} = -1 - \frac{h_0}{h} + 2 \frac{h \bar{r}^2}{h_0 a_0 (1 - e_0^2)} (1 + e \cos f)$$

einführen,

$$(5) \dots \dots \dots \frac{dz}{dt} = 1 + \bar{W} + \frac{h_0}{h} \left( \frac{\nu}{1 + \nu} \right)^2 - \frac{y}{\sqrt{1 - e_0^2} a_0^2} \bar{r}^2$$

Einen anderen Ausdruck für  $dz$  bekommen wir, wenn wir nicht nur  $h$ , sondern auch unmittelbar  $\nu$  in (3) einführen. Es wird dadurch

$$(6) \dots \dots \dots \frac{dz}{dt} = \frac{h_0}{h(1 + \nu)^2} - \frac{y}{\sqrt{1 - e_0^2} a_0^2} \bar{r}^2$$

Dieser Ausdruck giebt  $dz$  durch  $\nu$  und  $h$ , während der vorhergehende unmittelbar auf die störenden Kräfte hingeführt werden kann.

### 3.

Die oben eingeführte Function  $\bar{W}$  ist Function von  $z$  und den veränderlichen Elementen. Um dies zu zeigen, braucht man nur  $\bar{f}$  statt  $f$  einzuführen, und dieses geschieht durch die folgende Gleichung

$$f = \bar{f} + n_0 y t + \pi_0 - \chi$$

die aus (1) und (2) folgt. Es wird hiemit

$$(7) \dots \bar{W} = -1 - \frac{h_0}{h} + 2 \frac{h \bar{r}^2}{h_0 a_0 (1 - e_0^2)} \left\{ 1 + e \cos (\bar{f} + n_0 y t + \pi_0 - \chi) \right\}$$

woraus ersichtlich ist, dass  $\bar{W}$  Function der veränderlichen Elemente  $h$ ,  $e$  und  $\chi$ , so wie von  $\bar{r}$  und  $\bar{f}$  ist, die ihrer Seits blos Function der Veränderlichen  $z$  sind.

Um  $\bar{W}$  unmittelbar auf die störenden Kräfte hinzuführen, müssen für  $h$ ,  $e$  und  $\chi$  ihre Ausdrücke gesetzt werden, um aber bei dieser Substitution Integralzeichen zu vermeiden, muss zuvor  $\bar{W}$  nach diesen Grössen differentiirt werden. Da hiebei  $\bar{r}$  und  $\bar{f}$  als Constante zu betrachten sind, so ist es angemessen, die Veränderliche  $t$ , die in denselben enthalten ist, vorläufig durch eine Constante  $\tau$  zu ersetzen und neue Zeichen dafür einzuführen. Sei daher  $\zeta$  eine Function von  $\tau$ , die in  $z$  übergeht, wenn man darin  $\tau$  in  $t$  verwandelt, und  $\bar{\rho}$  und  $\bar{\varphi}$  zwei Functionen von  $\zeta$ , die bez. in  $\bar{r}$  und  $\bar{f}$  übergehen, wenn man darin  $\zeta$  in  $z$  verwandelt. Setzen wir nun die letzteren an die Stelle jener und schreiben zur Unterscheidung  $W$  statt  $\bar{W}$ , so wird

$$W = -1 - \frac{h_0}{h} + \frac{2h\bar{\rho}}{h_0 a_0 (1 - e_0^2)} \left\{ 1 + e \cos(\bar{\varphi} + n_0 y t + \pi_0 - \chi) \right\}$$

und wenn wir vorläufig die Differentiation in Bezug auf die genannten veränderlichen Elemente durch ein der Function vorgesetztes  $d$ . andeuten, so wird

$$\frac{dW}{dt} = \frac{d}{dt} \left\{ -\frac{h_0}{h} + 2 \frac{h\bar{\rho}}{h_0 a_0 (1 - e_0^2)} (1 + e \cos(\bar{\varphi} + n_0 y t + \pi_0 - \chi)) \right\} - \frac{2n_0 y \bar{\rho} h}{h_0 a_0 (1 - e_0^2)} e \sin(\bar{\varphi} + n_0 y t + \pi_0 - \chi)$$

In Folge des Vorhergehenden erhalten wir jetzt die Gleichungen

$$\frac{d\bar{\varphi}}{n_0 d\zeta} = \frac{a^2}{e^2} \sqrt{1 - e_0^2} \quad \text{und} \quad \frac{d\bar{\rho}}{n_0 d\zeta} = \frac{a_0 e_0}{\sqrt{1 - e_0^2}} \sin \bar{\varphi}$$

und der obige Ausdruck für  $W$  giebt damit

$$\frac{dW}{n_0 d\zeta} = \frac{2h e_0 \sin \bar{\varphi}}{h_0 (1 - e_0^2)^{\frac{3}{2}}} \left\{ 1 + e \cos(\bar{\varphi} + n_0 y t + \pi_0 - \chi) \right\} - \frac{2h a_0}{h_0 \bar{\rho} \sqrt{1 - e_0^2}} e \sin(\bar{\varphi} + n_0 y t + \pi_0 - \chi)$$

oder

$$\frac{\bar{\rho}^2}{a_0^2 \sqrt{1 - e_0^2}} \left( \frac{dW}{n_0 d\zeta} \right) = \frac{\frac{d \cdot \bar{\rho}^2}{n_0 d\zeta}}{a^2 \sqrt{1 - e_0^2}} \cdot \frac{h\bar{\rho}}{h_0 a_0 (1 - e_0^2)} \left\{ 1 + e \cos(\bar{\varphi} + n_0 y t + \pi_0 - \chi) \right\} - \frac{2h\bar{\rho}}{h_0 a_0 (1 - e_0^2)} e \sin(\bar{\varphi} + n_0 y t + \pi_0 - \chi)$$

womit der obige Ausdruck für  $\frac{dW}{dt}$  in

$$\frac{dW}{dt} = \frac{d}{dt} \left\{ -\frac{h_0}{h} + 2 \frac{h\bar{\rho}}{h_0 a_0 (1 - e_0^2)} (1 + e \cos(\bar{\varphi} + n_0 y t + \pi_0 - \chi)) \right\} + \frac{n_0 y}{\sqrt{1 - e_0^2}} \left\{ \frac{\bar{\rho}^2}{a_0^2} \left( \frac{dW}{n_0 d\zeta} \right) - \frac{d \cdot \bar{\rho}^2}{2a_0^2 n_0 d\zeta} \left[ W + \frac{h_0}{h} + 1 \right] \right\}$$

übergeht.

5.

Anstatt die Differentiale der veränderlichen Elemente zu substituieren, werde ich wieder die Ausdrücke derselben durch die idealen Coordinaten  $v$  und  $r$  und der ersten Differentiale derselben suchen, und diese substituieren. Die Gleichungen

$$\frac{dv}{dt} = n \frac{a^2}{r^2} \sqrt{1 - e^2}, \quad \frac{dr}{dt} = \frac{an}{\sqrt{1 - e^2}} e \sin f$$

$$f = \bar{f} + n_0 y t + \pi_0 - \chi$$

geben ohne Mühe

$$r \frac{dv}{dt} - h = h e \cos(\bar{f} + n_0 y t + \pi_0 - \chi)$$

$$\frac{dr}{dt} = h e \sin(\bar{f} + n_0 y t + \pi_0 - \chi)$$

woraus

$$\left(r \frac{dv}{dt} - h\right) \cos(\bar{f} - \bar{\varphi}) + \frac{dr}{dt} \sin(\bar{f} - \bar{\varphi}) = h\epsilon \cos(\bar{\varphi} + n_0 y t + \pi_0 - \chi)$$

folgt, und überdies giebt die erste der angeführten Gleichungen

$$h = \frac{k^2(1+m)}{r^2 \frac{dv}{dt}}$$

es wird hiemit zuerst, mit Zuziehung der Gleichungen (4)

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dt} &= \frac{d}{dt} \left\{ \frac{2h_0 \bar{\rho}}{k^2(1+m)} \cos(\bar{f} - \bar{\varphi}) r \frac{dv}{dt} + \frac{2h_0 \bar{\rho}}{k^2(1+m)} \sin(\bar{f} - \bar{\varphi}) \frac{dr}{dt} \right. \\ &\quad \left. - \frac{2\bar{\rho} h}{h_0 a_0 (1 - e_0^2)} \left[ \cos(\bar{f} - \bar{\varphi}) - 1 \right] - \frac{h_0}{h} \right\} \\ &\quad + \frac{n_0 y}{\sqrt{1 - e_0^2}} \left\{ \frac{\bar{\rho}^2}{a_0^2} \left( \frac{dW}{n_0 d\zeta} \right) - \frac{d \cdot \bar{\rho}^2}{2a_0^2 n_0 d\zeta} \left[ W + \frac{h_0}{h} + 1 \right] \right\} \end{aligned}$$

Da in der gestörten Bewegung die idealen Coordinaten nebst ihren ersten Differentialen dieselbe Form haben wie in der ungestörten, so brauchen wir bei der jetzt auszuführenden Differentiation nur die ersten Differentiale dieser Coordinaten veränderlich zu setzen, und wir bekommen daher

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dt} &= \frac{2h_0 \bar{\rho}}{k^2(1+m)} \cos(\bar{f} - \bar{\varphi}) r \frac{d^2v}{dt^2} + \frac{2h_0 \bar{\rho}}{k^2(1+m)} \sin(\bar{f} - \bar{\varphi}) \frac{d^2r}{dt^2} \\ &\quad - \frac{2\bar{\rho}}{h_0 a_0 (1 - e_0^2)} \left[ \cos(\bar{f} - \bar{\varphi}) - 1 \right] \frac{dh}{dt} + \frac{h_0}{h^2} \frac{dh}{dt} \\ &\quad + \frac{n_0 y}{\sqrt{1 - e_0^2}} \left\{ \frac{\bar{\rho}^2}{a_0^2} \left( \frac{dW}{n_0 d\zeta} \right) - \frac{d \cdot \bar{\rho}^2}{2a_0^2 n_0 d\zeta} \left[ W + \frac{h_0}{h} + 1 \right] \right\} \\ \frac{dh}{dt} &= - \frac{k^2(1+m)}{r^2} \frac{d^2v}{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 dt^2} = - \frac{h^2 r^2}{k^2(1+m)} \frac{d^2v}{dt^2} \end{aligned}$$

Die Differentialgleichungen für die idealen Coordinaten  $v$  und  $r$  sind aber \*)

$$\begin{aligned} r^2 \frac{d^2v}{dt^2} + 2r \frac{dr}{dt} \frac{dv}{dt} &= k^2(1+m) \left( \frac{d\Omega}{dv} \right) \\ \frac{d^2r}{dt^2} - r \frac{dv^2}{dt^2} + \frac{k^2(1+m)}{r^2} &= k^2(1+m) \left( \frac{d\Omega}{dr} \right) \end{aligned}$$

wo  $\Omega$  die Störungsfunction bezeichnet. Wir müssen demzufolge in die vorstehenden Gleichungen

$$\begin{aligned} k^2(1+m) \frac{1}{r^2} \left( \frac{d\Omega}{dv} \right) &\text{ für } \frac{d^2v}{dt^2} \\ k^2(1+m) \left( \frac{d\Omega}{dr} \right) &\text{ für } \frac{d^2r}{dt^2} \end{aligned}$$

substituieren, und hiemit ergibt sich sogleich

\*) S. Abhandl. d. K. S. Gesellschaft d. Wissensch. B. V. pag. 70.



$$\begin{aligned} \frac{dW}{dt} &= h_0 \left\{ 2 \frac{\bar{\rho}}{r} \cos(\bar{f} - \bar{\varphi}) - 1 + \frac{2h^2 \bar{\rho}}{h_0^2 a_0^2 (1 - e_0^2)} [\cos(\bar{f} - \bar{\varphi}) - 1] \right\} \left( \frac{d\Omega}{dv} \right) \\ &+ 2h_0 \frac{\bar{\rho}}{r} \sin(\bar{f} - \bar{\varphi}) r \left( \frac{d\Omega}{dr} \right) \\ &+ \frac{n_0 y}{\sqrt{1 - e_0^2}} \left\{ \frac{\bar{\rho}^2}{a_0^2} \left( \frac{dW}{n_0 d\zeta} \right) - \frac{d \cdot \bar{\rho}^2}{2a_0^2 n_0 d\zeta} [W + \frac{h_0}{h} + 1] \right\} \\ &\frac{dh}{dt} = -h^2 \left( \frac{d\Omega}{dv} \right) \end{aligned}$$

die mit den bez. Gleichungen der »Fundamenta etc.« übereinstimmen.

6.

Nachdem durch die Entwicklung und die darauf folgende Integration aus der eben für  $\frac{dW}{dt}$  gefundenen Gleichung  $W$  ermittelt worden ist, muss darin  $t$  für  $\tau$  gesetzt werden, wodurch  $\bar{W}$  erhalten wird, welche Function in den Ausdruck (5) für  $\frac{dx}{dt}$  zu substituiren ist. Hiebei kann man sich eine grosse Erleichterung verschaffen, die aus dem Umstande entspringt, dass  $\bar{\rho}$  und  $\bar{\varphi}$  bei der ersten Integration constant angenommen werden mussten. Setzt man

$$n_0 z = n_0 t + c_0 + n_0 dz$$

so ist  $dz$  von der Ordnung der störenden Kräfte, und setzt man dem analog

$$n_0 \zeta = n_0 \tau + c_0 + n_0 d\zeta$$

so ist  $d\zeta$  auch von der Ordnung der störenden Kräfte und übrigens eine Function, die in  $dz$  übergeht, wenn man  $\tau$  in  $t$  verwandelt. Substituiren wir daher in  $\frac{dW}{dt}$  für  $\bar{\rho}$  und  $\bar{\varphi}$  nur die Glieder, die von  $n_0 \tau + c_0$  abhängen, das heisst nur die elliptischen Ausdrücke, oder um möglichst deutlich zu sein, die Glieder, die aus den Gleichungen

$$\begin{aligned} n_0 \tau + c_0 &= \varepsilon_0 - e_0 \sin \varepsilon_0 \\ \varphi_0 \sin \varphi_0 &= a_0 \sqrt{1 - e_0^2} \cdot \sin \varepsilon_0 \\ \rho_0 \cos \varphi_0 &= a_0 \cos \varepsilon_0 - a_0 e_0 \end{aligned}$$

folgen, und nennen die daraus entstehende Function  $\frac{dW_0}{dt}$ , so ergibt sich auch nach der Integration durch Hilfe des Taylor'schen Theorems, und wenn man

$$\gamma = n_0 \tau + c_0$$

setzt

$$W = W_0 + \left(\frac{dW_0}{d\gamma}\right) n_0 \delta\zeta + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2 W_0}{d\gamma^2}\right) (n_0 \delta\zeta)^2 + \dots$$

und nach der Verwandlung von  $\tau$  in  $t$ ,

$$\bar{W} = \bar{W}_0 + \left(\frac{d\bar{W}_0}{d\gamma}\right) n_0 \delta z + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2 \bar{W}_0}{d\gamma^2}\right) (n_0 \delta z)^2 + \dots$$

wo die Differentialquotienten so zu verstehen sind, dass man erst  $W_0$  nach  $\gamma$  differentiirt, und darauf  $\tau$  in  $t$ , oder welches einerlei ist,  $\gamma$  in  $g$  verwandeln muss, wenn mit  $g$  die mittlere Anomalie bezeichnet. das ist

$$g = n_0 t + c_0$$

gesetzt wird. Demzufolge erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{dW_0}{dt} &= h_0 \left\{ 2 \frac{e_0}{r} \cos(\bar{f} - \varphi_0) - 1 + \frac{2h^2 e_0}{h_0^2 a_0 (1 - e_0^2)} [\cos(\bar{f} - \varphi_0) - 1] \left(\frac{d\Omega}{dv}\right) \right. \\ &\quad \left. + 2h_0 \frac{e_0}{r} \sin(\bar{f} - \varphi_0) r \left(\frac{d\Omega}{dr}\right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{n_0 y}{\sqrt{1 - e_0^2}} \left\{ \frac{e_0^2}{a_0^2} \left(\frac{dW_0}{d\gamma}\right) - \frac{d \cdot e_0^2}{2a_0^2 d\gamma} \left[ W_0 + \frac{h_0}{h} + 1 \right] \right\} \right\} \\ n_0 \delta z &= n_0 t + c_0 + n_0 \int \left\{ \bar{W}_0 + \left(\frac{d\bar{W}_0}{d\gamma}\right) n_0 \delta z + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2 \bar{W}_0}{d\gamma^2}\right) (n_0 \delta z)^2 + \dots \right. \\ &\quad \left. + \frac{h_0}{h} \left(\frac{\nu}{1 + \nu}\right)^2 - \frac{y}{\sqrt{1 - e_0^2} a_0^2} \bar{r}^2 \right\} dt \end{aligned}$$

Ich führe hiezu noch an, dass der Function  $\bar{W}$  analog

$$\bar{r}^2 = r_0^2 + \left(\frac{d \cdot r_0^2}{dg}\right) n_0 \delta z + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2 \cdot r_0^2}{dg^2}\right) (n_0 \delta z)^2 + \dots$$

ist, wo  $r_0^2$  bloß Function von  $g$  ist.

7.

Um die Gleichung zur Bestimmung von  $\nu$  zu erhalten, differentiire ich die Gleichung

$$r = \bar{r}(1 + \nu)$$

wodurch

$$\frac{dr}{dt} = \frac{d\bar{r}}{dz} \frac{dz}{dt} (1 + \nu) + \bar{r} \frac{d\nu}{dt}$$

und wenn man  $\frac{dz}{dt}$  mittelst (6) eliminirt

$$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{r} \frac{dr}{dt} - \frac{h_0}{hr} \frac{d\bar{r}}{dz} + \frac{y}{2\sqrt{1 - e_0^2} a_0^2} \frac{d \cdot \bar{r}^2}{dz} (1 + \nu)$$

erhalten wird. Es ist aber

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= h e \sin f, \quad \frac{d\bar{r}}{dz} = h_0 e_0 \sin \bar{f} \\ \frac{1}{r} &= \frac{1 + e_0 \cos \bar{f}}{a_0 (1 - e_0^2)}, \quad \frac{1}{r} = \frac{h^2}{h_0^2 a_0 (1 - e_0^2)} (1 + e \cos f) \end{aligned}$$

substituiert man diese, so wird

$$\frac{dv}{dt} = \frac{he \sin f}{a_0(1-e_0^2)} + \frac{he e_0 \sin(f-\bar{f})}{a_0(1-e_0^2)} - \frac{he_0 \sin \bar{f}}{a_0(1-e_0^2)} + \frac{y}{2\sqrt{1-e_0^2} a_0^2} \frac{d \cdot \bar{r}^2}{dx} (1 + \nu)$$

Differentiirt man aber die Gleichung (7) nach  $z$ , so bekommt man zuerst

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{W}}{dz} &= \frac{2he_0 \sin \bar{f}}{a_0(1-e_0^2)} \left\{ 1 + e \cos(\bar{f} + n_0 y t + n_0 - \chi) \right\} \\ &\quad - \frac{2he_0}{a_0(1-e_0^2)} \sin(\bar{f} + n_0 y t + \pi_0 - \chi) \\ &\quad - \frac{2he e_0}{a_0(1-e_0^2)} \cos \bar{f} \sin(\bar{f} + n_0 y t + \pi_0 - \chi) \end{aligned}$$

oder

$$\frac{d\bar{W}}{dz} = \frac{2he_0 \sin \bar{f}}{a_0(1-e_0^2)} + \frac{2he e_0 \sin(\bar{f}-f)}{a_0(1-e_0^2)} - \frac{2he \sin f}{a_0(1-e_0^2)}$$

und es wird daher

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{2} \frac{d\bar{W}}{dz} + \frac{y}{2\sqrt{1-e_0^2} a_0^2} \frac{d \cdot \bar{r}^2}{dx} (1 + \nu) \dots \dots \dots (8)$$

Die Hinführung der Function  $\frac{d\bar{W}}{dz}$  auf die störenden Kräfte ist dieselbe wie die von  $\bar{W}$ , und das für diese letztere oben abgeleitete Resultat findet auch hier Anwendung, da bei der Differentiation nach  $z$  die veränderlichen Elemente unberührt geblieben sind. Da ferner auch

$$\left(\frac{d\bar{W}}{n_0 dz}\right) = \left(\frac{d\bar{W}_0}{dy}\right) + \left(\frac{d^2 \bar{W}_0}{dy^2}\right) n_0 dz + \frac{1}{2} \left(\frac{d^3 \bar{W}_0}{dy^3}\right) (n_0 dz)^2 + \dots$$

so ergibt sich sogleich

$$v = C - \frac{1}{2} n_0 \int \left\{ \left(\frac{d\bar{W}_0}{dy}\right) + \left(\frac{d^2 \bar{W}_0}{dy^2}\right) n_0 dz + \frac{1}{2} \left(\frac{d^3 \bar{W}_0}{dy^3}\right) (n_0 dz)^2 + \dots - \frac{y}{\sqrt{1-e_0^2} a_0 n_0} \frac{d \cdot \bar{r}^2}{dx} (1 + \nu) \right\} dt$$

wo  $C$  die der Integration hinzugefügte Constante, und auch

$$\frac{d \cdot \bar{r}^2}{n_0 dz} = \left(\frac{d \cdot r^2}{dg}\right) + \left(\frac{d^2 \cdot r^2}{dg^2}\right) n_0 dz + \frac{1}{2} \left(\frac{d^3 \cdot r^2}{dg^3}\right) (n_0 dz)^2 + \dots$$

ist.

8.

Die im Vorhergehenden abgeleiteten Gleichungen sind Functionen der Veränderlichen  $nz$ ,  $\nu$  und  $h$ . Die Störungsfunction ist auch Function von  $nz$  und  $\nu$ , sie enthält ferner die analogen auf die Sonnenbewegung sich beziehenden Veränderlichen  $n'z'$  und  $\nu'$ , und ausserdem noch drei von der Neigung zwischen der Mondbahn und der Sonnenbahn abhängige Veränderliche. Die bezüglichen Ausdrücke habe ich schon in den »Fundamenta etc.« entwickelt, allein sie sind dort nicht auf die später

veröffentlichte Theorie der idealen Coordinaten gegründet; dieses ist in der ersten Abhandlung über die Störungen der kleinen Planeten geschehen, wo aber eine etwas andere Endform angenommen werden musste, wie in der Mondtheorie. Dieses ist der Grund, weshalb ich diese Entwicklungen hier kurz wiederholen werde. Auslassungen, die ich mir hier der Kürze wegen in den Ableitungen erlauben werde, kann man durch Nachschlagen in den beiden eben genannten Schriften ergänzen, in welchen diese Theorien ausführlich vorgetragen sind.

Bezieht man den Ort des Mondes auf eine beliebige feste Ebene und eine feste Linie in derselben durch die rechtwinklichen Coordinaten  $x, y, z$ , und nennt die entsprechenden Coordinaten der Sonne  $x', y', z'$ , ihre Masse  $m'$ , so ist bekanntlich

$$\Omega = \frac{m'}{1+m} \left\{ \frac{1}{A} - \frac{xx' + yy' + zz'}{r'^3} \right\}$$

wo

$$A^2 = (x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2$$

Nach den Differentiationen von  $\Omega$ , die die partiellen Differentialquotienten geben, die in der Störungstheorie gebraucht werden, muss man  $z=0$  machen, wodurch  $x$  und  $y$  von selbst in die idealen Coordinaten des Mondes  $X$  und  $Y$  übergehen, und da bei den für  $\left(\frac{d\Omega}{dv}\right)$  und  $\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)$  erforderlichen Differentiationen  $z$  unberührt bleibt, so darf man in dem vorstehenden Ausdruck von  $\Omega$ , insofern er nur für die eben genannten partiellen Differentiale angewandt werden soll, sogleich  $z=0$  machen. Es wird dadurch

$$(9) \dots \Omega = \frac{m'}{1+m} \left\{ \frac{1}{A} - \frac{Xx' + Yy'}{r'^3} \right\} = \frac{m'}{1+m} \left\{ \frac{1}{A} + \frac{A^2 - r'^2 - r'^2}{2r'^3} \right\}$$

wo

$$A^2 = (X-x')^2 + (Y-y')^2 + z'^2$$

wird.

## 9.

Bezeichnet man die gegenseitige Neigung der Mond- und der Sonnenbahn mit  $J$ , den Bogen, welcher sich auf der Mondbahn in der Richtung der Bewegung von der positiven  $X$  Achse bis zum aufsteigenden Knoten der Mondbahn auf der Sonnenbahn erstreckt mit  $\varphi$ , und den Bogen, welcher sich auf der Sonnenbahn in derselben Richtung von der positiven  $X'$  Achse bis zu demselben Knoten erstreckt, mit  $\psi$ , so bekommt man

$$\begin{aligned} X &= r \cos(v - \varphi); \quad x' = -r' \cos(v' - \psi) \\ Y &= r \sin(v - \varphi); \quad y' = -r' \cos J \sin(v' - \psi) \\ &\quad z' = -r' \sin J \sin(v' - \psi) \end{aligned}$$

womit

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^2 &= r^2 + r'^2 - 2rr' \cos^2 \frac{1}{2} J \cos(v - v' - \varphi + \psi) \\ &\quad - 2rr' \sin^2 \frac{1}{2} J \cos(v + v' - \varphi - \psi) \end{aligned}$$

wird. Substituirt man hierin die oben gegebene Gleichung

$$v = \bar{f} + n_0 y t + \pi_0$$

und die analoge für die Sonne

$$v' = \bar{f}' + n_0 y' t + \pi'_0$$

so wird  $\mathcal{A}$  und zufolge (8) auch  $\mathcal{Q}$  Function von  $r, r', \bar{f}, \bar{f}', J, \varphi, \psi$ , und da  $r$  Function von  $z$  und  $v, r'$  Function von  $z'$  und  $v', \bar{f}$  Function von  $z, \bar{f}'$  Function von  $z'$  ist, so werden  $\mathcal{A}$  und  $\mathcal{Q}$  Functionen von

$$z, z', v, v', J, \varphi, \psi.$$

Die analytischen Ausdrücke sowohl wie die numerischen Werthe von  $\varphi$  und  $\psi$  sind, letztere wenigstens in der Mondtheorie, wenig von einander verschieden, und dieser Umstand giebt Veranlassung, statt derselben ihre Summe und Differenz, welche letztere sehr klein ist, einzuführen. In ihren Ausdrücken kommt ferner ein der Zeit und deren Potenzen proportionales Glied vor, welches am Zweckmässigsten abgetrennt wird, gleichwie oben die Bewegung des Perigäums von den periodischen Gliedern abgetrennt wurde. Setzen wir daher

$$\begin{aligned} 2N &= \pi_0 + \pi'_0 - \varphi - \psi - 2n_0 \alpha t \} \\ 2K &= \pi_0 - \pi'_0 - \varphi + \psi + 2n_0 \eta t \} \dots \dots \dots (10) \end{aligned}$$

so sind  $N$  und  $K$  Grössen, die keine der Zeit und deren Potenzen proportionale Glieder enthalten, und  $\alpha$  und  $\eta$  müssen so bestimmt werden, dass diese Bedingung erfüllt wird. Wir erhalten hiemit

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^2 &= r^2 + r'^2 - 2rr' \cos^2 \frac{1}{2} J \cos(\bar{f} - \bar{f}' + n_0(y - y' - 2\eta)t + 2K) \\ &\quad - 2rr' \sin^2 \frac{1}{2} J \cos(\bar{f} + \bar{f}' + n_0(y + y' + 2\alpha)t + 2N) \end{aligned}$$

woraus die Bedeutung von  $K$  und  $N$  leicht hervorgeht. Bezeichnet man nemlich mit  $\omega$  die Entfernung des Mondperigäums vom aufsteigenden Knoten der Mondbahn auf der Sonnenbahn, und mit  $\omega'$  die Entfernung des Sonnenperigäums von demselben Knoten, so wird

$$\omega - \omega' = n_0(y - y' - 2\eta)t + 2K$$

$$\omega + \omega' = n_0(y + y' + 2\alpha)t + 2N$$

also  $2K$  der Unterschied dieser beiden Entfernungen, — oder der beiden Perigäen — und  $2N$  die Summe derselben, weniger den der Zeit proportionalen Bewegungen derselben. Ich bemerke noch, dass ebenso wie bei  $n_0yt$ , auch für  $n_0\alpha t$  und  $n_0\eta t$  der Strenge nach  $n_0\int\alpha dt$  und  $n_0\int\eta dt$  gesetzt werden muss, jene abgekürzte Bezeichnung aber hier angewandt werden durfte, weil in dieser Abhandlung noch nicht die veränderlichen Glieder in  $\alpha$  und  $\eta$ , die, gleichwie die in  $y$ , von den Planeten herrühren, berücksichtigt werden sollen.

Da  $\left(\frac{d\Omega}{dv}\right) = \left(\frac{d\Omega}{df}\right)$  ist, so können aus den obigen Ausdrücken für  $\Omega$  und  $\mathcal{A}$  leicht die Differentialquotienten nach  $v$  und  $r$  abgeleitet werden.

10.

Zur Vervollständigung der Differentialgleichungen für die Bewegung des Mondes ist noch die Ableitung der Gleichungen für die im vor. Art. eingeführten Functionen  $J, N, K$  übrig. Statt der beiden ersten dieser werde ich jedoch die auch schon in den »*Fundamenta etc.*« vorkommenden  $P$  und  $Q$  einführen, die mit jenen in folgender Verbindung stehen,

$$(11) \dots\dots\dots \begin{cases} P = 2 \sin \frac{1}{2} J \sin (N - N_0) \\ Q = 2 \sin \frac{1}{2} J \cos (N - N_0) \end{cases}$$

wo  $N_0$  der von den störenden Kräften unabhängige Theil von  $N$ , oder vielmehr der Werth von  $N$  ist, welcher zur Zeitepoche statt findet.

Führen wir den Bogen ein, welcher sich auf der Mondbahn vom aufsteigenden Knoten derselben auf der  $xy$  Ebene\*) der im Art. 8 eingeführten Coordinaten  $xyz$  bis zum aufsteigenden Knoten derselben auf der Sonnenbahn erstreckt und nennen ihn  $\Phi$ , und führen wir auch den Bogen der Sonnenbahn ein, welcher sich vom aufsteigenden Knoten dieser Bahn auf der  $xy$  Ebene bis zum aufsteigenden Knoten der Mondbahn auf der Sonnenbahn erstreckt, und nennen ihn  $\Psi$ . Seien ferner  $i$  und  $i'$  die Neigungen der Mond- und der Sonnenbahn gegen die  $xy$  Ebene, und  $\theta$  und  $\theta'$  die dazu gehörigen Längen der aufsteigenden Knoten, dann sind  $\Phi, \Psi, \theta - \theta'$  die Seiten eines sphärischen Dreiecks, welchen

\*) Eine Ebene, deren Lage völlig willkürlich ist.

bez. die Winkel  $i'$ ,  $180^\circ - i$ ,  $J$  gegenüber liegen. Die allgemeinen trigonometrischen, auf dieses Dreieck angewandten, Relationen geben uns die folgenden Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} dJ &= \cos \Phi di + \sin \Phi \sin i d\theta \\ &\quad - \cos \Psi di' - \sin \Psi \sin i' d\theta' \\ d\Phi &= -\cotg J \sin \Phi di + (\cotg J \cos \Phi \sin i - \cos i) d\theta \\ &\quad + \operatorname{cosec} J \sin \Psi di' - \operatorname{cosec} J \cos \Psi \sin i' d\theta' \\ d\Psi &= -\operatorname{cosec} J \sin \Phi di + \operatorname{cosec} J \cos \Phi \sin i d\theta \\ &\quad + \cotg J \sin \Psi di' - (\cotg J \cos \Psi \sin i' + \cos i') d\theta' \end{aligned}$$

in welchen aber die Grössen  $\Phi$ ,  $\Psi$ ,  $\theta$ ,  $\theta'$  durch andere ersetzt werden müssen.

11.

Sei  $\sigma$  der Bogen der Mondbahn, welcher sich von der positiven  $X$ Achse bis zum aufsteigenden Knoten der Mondbahn auf der  $xy$  Ebene, und  $\sigma'$  der Bogen der Sonnenbahn, welcher sich von der positiven  $X'$ Achse bis zum aufsteigenden Knoten der Sonnenbahn auf der  $xy$  Ebene erstreckt, dann geben uns die Definitionen der Bögen  $\varphi$ ,  $\psi$ ,  $\Phi$ ,  $\Psi$ ,  $\sigma$ ,  $\sigma'$  die folgenden Gleichungen

$$\varphi = \Phi + \sigma, \quad \psi = \Psi + \sigma'$$

und hiemit werden die Differentiale der Gleichungen (10)

$$\begin{aligned} dN &= -nadt - \frac{1}{2} (d\Phi + d\Psi + d\sigma + d\sigma') \\ dK &= n\eta dt - \frac{1}{2} (d\Phi - d\Psi + d\sigma - d\sigma') \end{aligned}$$

wo alle Differentiale in Bezug auf die Zeit zu verstehen sind. Erwägen wir, dass ausserdem

$$d\theta = \frac{d\sigma}{\cos i}, \quad d\theta' = \frac{d\sigma'}{\cos i'}$$

ist\*), so giebt die Substitution in die Differentialgleichungen des vor. Art.

$$\begin{aligned} dJ &= \cos \Phi di + \sin \Phi \operatorname{tg} i d\sigma - \cos \Psi di' - \sin \Psi \operatorname{tg} i' d\sigma' \\ dN &= -nadt + \frac{1}{2} \cotg \frac{1}{2} J (\sin \Phi di - \cos \Phi \operatorname{tg} i d\sigma) \\ &\quad - \frac{1}{2} \cotg \frac{1}{2} J (\sin \Psi di' - \cos \Psi \operatorname{tg} i' d\sigma') \\ dK &= n\eta dt - \frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{1}{2} J (\sin \Phi di - \cos \Phi \operatorname{tg} i d\sigma) \\ &\quad - \frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{1}{2} J (\sin \Psi di' - \cos \Psi \operatorname{tg} i' d\sigma') \end{aligned}$$

\*) S. Erste Abh. über d. Stör. d. kl. Pl. § 1.

Die Differentiation der Gleichungen (11) giebt

$$dP = \cos \frac{1}{2} J \sin (N - N_0) dJ + 2 \sin \frac{1}{2} J \cos (N - N_0) dN$$

$$dQ = \cos \frac{1}{2} J \cos (N - N_0) dJ - 2 \sin \frac{1}{2} J \sin (N - N_0) dN$$

Führen wir noch die Functionen  $p, q, p', q'$  durch die folgenden Gleichungen ein,

$$(12) \dots \dots \dots \begin{cases} p = \sin i \sin \sigma \\ q = \sin i \cos \sigma \\ p' = \sin i' \sin \sigma' \\ q' = \sin i' \cos \sigma' \end{cases}$$

woraus durch die Differentiation

$$di = \frac{\sin \sigma}{\cos i} dp + \frac{\cos \sigma}{\cos i} dq$$

$$d\sigma = \frac{\cos \sigma}{\sin i} dp - \frac{\sin \sigma}{\sin i} dq$$

$$di' = \frac{\sin \sigma'}{\cos i'} dp' + \frac{\cos \sigma'}{\cos i'} dq'$$

$$d\sigma' = \frac{\cos \sigma'}{\sin i'} dp' - \frac{\sin \sigma'}{\sin i'} dq'$$

folgt, so können wir die vorstehenden Differentialgleichungen leicht in die folgenden umwandeln,

$$dP = -n\alpha Q dt - \cos \frac{1}{2} J \left\{ \cos (\varphi + N - N_0) \frac{dp}{\cos i} - \sin (\varphi + N - N_0) \frac{dq}{\cos i} \right\}$$

$$+ \cos \frac{1}{2} J \left\{ \cos (\psi + N - N_0) \frac{dp'}{\cos i'} - \sin (\psi + N - N_0) \frac{dq'}{\cos i'} \right\}$$

$$dQ = n\alpha P dt + \cos \frac{1}{2} J \left\{ \sin (\varphi + N - N_0) \frac{dp}{\cos i} + \cos (\varphi + N - N_0) \frac{dq}{\cos i} \right\}$$

$$- \cos \frac{1}{2} J \left\{ \sin (\psi + N - N_0) \frac{dp'}{\cos i'} + \cos (\psi + N - N_0) \frac{dq'}{\cos i'} \right\}$$

$$dK = n\eta dt + \frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{1}{2} J \left\{ \cos \varphi \frac{dp}{\cos i} - \sin \varphi \frac{dq}{\cos i} \right\}$$

$$+ \frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{1}{2} J \left\{ \cos \psi \frac{dp'}{\cos i'} - \sin \psi \frac{dq'}{\cos i'} \right\}$$

durch welche schliesslich die Differentiale von  $P, Q, K$  von den Differentialen von  $p, q, p', q'$  abhängig gemacht worden sind.

Die Ausdrücke der Differentiale von  $p$  und  $q$  durch die störenden Kräfte entnehme ich aus meiner ersten Abhandlung über die Störungen der kleinen Planeten, und dieselbe würde auch die der Differentiale von  $p'$  und  $q'$  geben, die ich vorziehe hier stehen zu lassen, da sie weiter



unten nur in einigen wenigen besonderen Fällen gebraucht worden. Die Gleichungen (12) der genannten Abhandlung sind

$$\frac{d\alpha''}{dt} = -h\gamma'' Y \left(\frac{d\Omega}{dZ}\right)$$

$$\frac{d\beta''}{dt} = h\gamma'' X \left(\frac{d\Omega}{dZ}\right)$$

wo

$$\alpha'' = -\sin i \sin \sigma, \quad \beta'' = \sin i \cos \sigma, \quad \gamma'' = \cos i$$

$$X = r \cos v, \quad Y = r \sin v$$

ist. Es wird also zuerst

$$\frac{dp}{dt} = h \cos i \left(\frac{d\Omega}{dZ}\right) r \sin v$$

$$\frac{dq}{dt} = h \cos i \left(\frac{d\Omega}{dZ}\right) r \cos v$$

Um den Differentialquotienten von  $\mathcal{L}$  nach  $Z$  zu erhalten, müssen wir den Ausdruck von  $\mathcal{L}$  des Art. 8 nach  $z$  differentiiren, und nach der Differentiation  $z=0$  machen. Hiemit erhalten wir

$$\left(\frac{d\Omega}{dZ}\right) = \frac{m'}{1+m} \left\{ \frac{1}{A^2} - \frac{1}{r'^2} \right\} z'$$

$$= -\frac{m'}{1+m} \left\{ \frac{1}{A^2} - \frac{1}{r'^2} \right\} r' \sin J (v' - \psi)$$

also

$$\left. \begin{aligned} \frac{dp}{dt} &= -h \cos i \frac{m'}{1+m} \left\{ \frac{1}{A^2} - \frac{1}{r'^2} \right\} r r' \sin J \sin v \sin (v' - \psi) \\ \frac{dq}{dt} &= -h \cos i \frac{m'}{1+m} \left\{ \frac{1}{A^2} - \frac{1}{r'^2} \right\} r r' \sin J \cos v \sin (v' - \psi) \end{aligned} \right\} \dots (13)$$

woraus sich

$$\cos \varphi \frac{dp}{\cos i dt} - \sin \varphi \frac{dq}{\cos i dt} =$$

$$-h \frac{m'}{1+m} \left\{ \frac{1}{A^2} - \frac{1}{r'^2} \right\} r r' \sin J \sin (v - \varphi) \sin (v' - \psi)$$

$$\sin \varphi \frac{dp}{\cos i dt} + \cos \varphi \frac{dq}{\cos i dt} =$$

$$-h \frac{m'}{1+m} \left\{ \frac{1}{A^2} - \frac{1}{r'^2} \right\} r r' \sin J \cos (v - \varphi) \sin (v' - \psi)$$

ergibt.

13.

Den Ausdruck für  $\mathcal{L}^2$  können wir wie folgt stellen,

$$\mathcal{L}^2 = r^2 + r'^2 - 2rr' \{ \cos (v - \varphi) \cos (v' - \psi) + \cos J \sin (v - \varphi) \sin (v' - \psi) \}$$

und damit giebt der Ausdruck (8) durch die partielle Differentiation

$$\left(\frac{d\Omega}{dJ}\right) = -\frac{m'}{1+m} \left\{ \frac{1}{J^2} - \frac{1}{r'^2} \right\} rr' \sin J \sin(v-\varphi) \sin(v'-\psi)$$

$$\left(\frac{d\Omega}{d\varphi}\right) = \frac{m'}{1+m} \left\{ \frac{1}{J^2} - \frac{1}{r'^2} \right\} rr' \left\{ \sin(v-\varphi) \cos(v'-\psi) - \cos J \cos(v-\varphi) \sin(v'-\psi) \right\}$$

$$\left(\frac{d\Omega}{d\psi}\right) = \frac{m'}{1+m} \left\{ \frac{1}{J^2} - \frac{1}{r'^2} \right\} rr' \left\{ \cos(v-\varphi) \sin(v'-\psi) - \cos J \sin(v-\varphi) \cos(v'-\psi) \right\}$$

Statt  $\Omega$  als Function von  $J$ ,  $\varphi$ ,  $\psi$  zu betrachten, wie hier geschehen ist, kann man auch  $\Omega$  als Function von  $P$ ,  $Q$ ,  $K$  betrachten, und um von jenen partiellen Differentialen auf diese überzugehen, erhält man aus den im Vorhergehenden aufgestellten Relationen leicht die folgenden Gleichungen,

$$\left(\frac{d\Omega}{dP}\right) = \left(\frac{d\Omega}{dJ}\right) \frac{\sin(N-N_0)}{\cos \frac{1}{2}J} - \left[ \left(\frac{d\Omega}{d\varphi}\right) + \left(\frac{d\Omega}{d\psi}\right) \right] \frac{\cos(N-N_0)}{2 \sin \frac{1}{2}J}$$

$$\left(\frac{d\Omega}{dQ}\right) = \left(\frac{d\Omega}{dJ}\right) \frac{\cos(N-N_0)}{\cos \frac{1}{2}J} + \left[ \left(\frac{d\Omega}{d\varphi}\right) + \left(\frac{d\Omega}{d\psi}\right) \right] \frac{\sin(N-N_0)}{2 \sin \frac{1}{2}J}$$

$$\left(\frac{d\Omega}{dK}\right) = -\left(\frac{d\Omega}{d\varphi}\right) + \left(\frac{d\Omega}{d\psi}\right)$$

woraus in Verbindung mit den vorstehenden

$$\left(\frac{d\Omega}{dP}\right) = -\frac{m'}{1+m} \left\{ \frac{1}{J^2} - \frac{1}{r'^2} \right\} rr' \sin \frac{1}{2}J \left\{ \begin{array}{l} 2 \sin(v-\varphi) \sin(v'-\psi) \sin(N-N_0) \\ + \sin(v-\varphi) \cos(v'-\psi) \cos(N-N_0) \\ + \cos(v-\varphi) \sin(v'-\psi) \cos(N-N_0) \end{array} \right\}$$

$$\left(\frac{d\Omega}{dQ}\right) = -\frac{m'}{1+m} \left\{ \frac{1}{J^2} - \frac{1}{r'^2} \right\} rr' \sin \frac{1}{2}J \left\{ \begin{array}{l} 2 \sin(v-\varphi) \sin(v'-\psi) \cos(N-N_0) \\ - \sin(v-\varphi) \cos(v'-\psi) \sin(N-N_0) \\ - \cos(v-\varphi) \sin(v'-\psi) \sin(N-N_0) \end{array} \right\}$$

$$\left(\frac{d\Omega}{dK}\right) = -\frac{m'}{1+m} \left\{ \frac{1}{J^2} - \frac{1}{r'^2} \right\} rr' \cos^2 \frac{1}{2}J \left\{ \begin{array}{l} 2 \sin(v-\varphi) \cos(v'-\psi) \\ - 2 \cos(v-\varphi) \sin(v'-\psi) \end{array} \right\}$$

folgt, und hieraus

$$\left(\frac{d\Omega}{dQ}\right) \cos^2 \frac{1}{2}J + \frac{1}{2}P \left(\frac{d\Omega}{dK}\right) =$$

$$-\frac{m'}{1+m} \left\{ \frac{1}{J^2} - \frac{1}{r'^2} \right\} rr' \sin J \cos \frac{1}{2}J \left\{ \begin{array}{l} \sin(v-\varphi) \sin(v'-\psi) \cos(N-N_0) \\ - \cos(v-\varphi) \sin(v'-\psi) \sin(N-N_0) \end{array} \right\}$$

$$\left(\frac{d\Omega}{dP}\right) \cos^2 \frac{1}{2}J - \frac{1}{2}Q \left(\frac{d\Omega}{dK}\right) =$$

$$-\frac{m'}{1+m} \left\{ \frac{1}{J^2} - \frac{1}{r'^2} \right\} rr' \sin J \cos \frac{1}{2}J \left\{ \begin{array}{l} \sin(v-\varphi) \sin(v'-\psi) \sin(N-N_0) \\ + \cos(v-\varphi) \sin(v'-\psi) \cos(N-N_0) \end{array} \right\}$$

$$\frac{1}{2}P \left(\frac{d\Omega}{dP}\right) + \frac{1}{2}Q \left(\frac{d\Omega}{dQ}\right) = -\frac{m'}{1+m} \left\{ \frac{1}{J^2} - \frac{1}{r'^2} \right\} rr' \sin^2 \frac{1}{2}J \sin(v-\varphi) \sin(v'-\psi)$$

Durch Hülfe dieser kann man die letzten beiden Gleichungen des vor. Art. wie folgt schreiben.

$$\begin{aligned} \cos \varphi \frac{dp}{\cos i dt} - \sin \varphi \frac{dq}{\cos i dt} &= h \sec \frac{1}{2} J \left\{ \left( \frac{d\Omega}{dQ} \right) \cos^2 \frac{1}{2} J + \frac{1}{2} P \left( \frac{d\Omega}{dK} \right) \right\} \cos (N - N_0) \\ &\quad + h \sec \frac{1}{2} J \left\{ \left( \frac{d\Omega}{dP} \right) \cos^2 \frac{1}{2} J - \frac{1}{2} Q \left( \frac{d\Omega}{dK} \right) \right\} \sin (N - N_0) \\ \sin \varphi \frac{dp}{\cos i dt} + \cos \varphi \frac{dq}{\cos i dt} &= -h \sec \frac{1}{2} J \left\{ \left( \frac{d\Omega}{dQ} \right) \cos^2 \frac{1}{2} J + \frac{1}{2} P \left( \frac{d\Omega}{dK} \right) \right\} \sin (N - N_0) \\ &\quad + h \sec \frac{1}{2} J \left\{ \left( \frac{d\Omega}{dP} \right) \cos^2 \frac{1}{2} J - \frac{1}{2} Q \left( \frac{d\Omega}{dK} \right) \right\} \cos (N - N_0) \end{aligned}$$

und überdies

$$\cos \varphi \frac{dp}{\cos i dt} - \sin \varphi \frac{dq}{\cos i dt} = \frac{h}{2} \cotg \frac{1}{2} J \left\{ P \left( \frac{d\Omega}{dP} \right) + Q \left( \frac{d\Omega}{dQ} \right) \right\}$$

womit die drei letzten Gleichungen des Art. 41, wenn man zugleich für  $\varphi$  seinen Ausdruck setzt, in die folgenden übergehen,

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dt} &= -n\alpha Q - h \left\{ \left( \frac{d\Omega}{dQ} \right) \cos^2 \frac{1}{2} J + \frac{1}{2} P \left( \frac{d\Omega}{dK} \right) \right\} \\ &\quad + \frac{dp'}{\cos i' dt} \cos \frac{1}{2} J \cos \theta + \frac{dq'}{\cos i' dt} \cos \frac{1}{2} J \sin \theta \\ \frac{dQ}{dt} &= n\alpha P + h \left\{ \left( \frac{d\Omega}{dP} \right) \cos^2 \frac{1}{2} J - \frac{1}{2} Q \left( \frac{d\Omega}{dK} \right) \right\} \\ &\quad + \frac{dp'}{\cos i' dt} \cos \frac{1}{2} J \sin \theta - \frac{dq'}{\cos i' dt} \cos \frac{1}{2} J \cos \theta \\ \frac{dK}{dt} &= n\eta + \frac{1}{2} h \left\{ P \left( \frac{d\Omega}{dP} \right) + Q \left( \frac{d\Omega}{dQ} \right) \right\} \\ &\quad + \frac{1}{2} \left\{ \frac{Qdp'}{\cos i' dt} + \frac{Pdq'}{\cos i' dt} \right\} \sec \frac{1}{2} J \cos \theta \\ &\quad - \frac{1}{2} \left\{ \frac{Pdp'}{\cos i' dt} - \frac{Qdq'}{\cos i' dt} \right\} \sec \frac{1}{2} J \sin \theta \end{aligned}$$

wo

$$\theta = n(\alpha + \eta)t + N_0 - K - \pi'$$

ist, und das Supplement der siderischen Länge des aufsteigenden Mondknotens auf der Ecliptik bedeutet. Diese Gleichungen stimmen mit denen der »*Fundamenta etc.*« vollständig überein und werden zur Berechnung der Breitenstörungen des Mondes dienen. Die Grössen  $\alpha$  und  $\eta$  müssen so bestimmt werden, dass in den Ausdrücken von  $P$  und  $K$  keine der Zeit proportionalen Glieder vorkommen. Ihre Summe bildet, nachdem sie mit  $n$  multiplicirt worden ist, die siderische Bewegung der Mondknoten auf der Ecliptik.

## § 2. Beweis zweier Sätze, die in der Mondbewegung statt finden.

44.

Bei der vollständigen Entwicklung der eben für die Breitenstörungen des Mondes abgeleiteten Differentialgleichungen müssen in

$dp'$  und  $dq'$  nicht bloß die in der Sonnenbewegung vom Monde herührenden Glieder, sondern auch die von den Planeten bewirkten substituirt werden. Unter diesen ist die Säcularänderung der Ebene der Sonnenbahn von merkwürdigem Einfluss auf  $P$ ,  $Q$ ,  $K$ , und somit auch auf die Aenderung der Ebene der Mondbahn. Wir können diese Glieder wie folgt darstellen,

$$\frac{dp'}{\cos i' dt} = b, \quad \frac{dq'}{\cos i' dt} = c$$

und dürfen hier unter  $b$  und  $c$  constante Grössen verstehen. Substituiren wir diese in die Differentialgleichungen des Art. 13, und integriren mit bloßer Rücksicht auf dieselben, so bekommen wir, indem wir auch bloß auf die Glieder niedrigster Ordnung Rücksicht nehmen,

$$\begin{aligned} \delta P &= -\frac{b}{n(\alpha + \eta)} \sin \theta - \frac{c}{n(\alpha + \eta)} \cos \theta \\ \delta Q &= -\frac{b}{n(\alpha + \eta)} \cos \theta - \frac{c}{n(\alpha + \eta)} \sin \theta \end{aligned}$$

wenn wir überhaupt mit  $\delta P$  und  $\delta Q$  die in  $P$  und  $Q$  enthaltenen Störungen bezeichnen. Auf  $K$  brauchen wir hier keine Rücksicht zu nehmen, da  $\delta K$  eine Grösse höherer Ordnung ist wie  $\delta P$  und  $\delta Q$ .

Diese Gleichungen zeigen, dass die Säcularänderungen der Sonnenbahn in der Mondbahn keine ähnlichen hervorbringen, sondern in periodische Ungleichheiten übergehen, deren Periode in  $P$  und  $Q$  der siderischen Umlaufszeit der Mondknoten auf der Ecliptik gleichkommt. Sie geben daher den Satz der *Méc. cél.*, nach welchem die Ecliptik in ihrer Säcularänderung die Mondbahn nach sich zieht. Diese Gleichungen geben ausserdem einen anderen Satz, den ich schon vor mehreren Jahren veröffentlicht habe, welcher sich folgender Maassen aussprechen lässt:

»Wenn man von den periodischen Ungleichheiten die durch die Sonne und anderswie in der Breite des Mondes erzeugt werden absieht, so bewegt sich der Mond mit constanter Neigung nicht auf der gleichzeitig stattfindenden Ecliptik, sondern auf der, welche nahe drei Jahre vorher statt fand, und deren Knoten mit der gleichzeitigen Ecliptik überdies um einen Quadranten zurück gewichen sind.«

Um diesen Satz zu beweisen bemerke ich zuerst, dass aus dem Vorhergehenden leicht zu erkennen ist, dass das Argument der Breite des Mondes auf der Ecliptik den folgenden Ausdruck hat:

$$\bar{f} + n(y + \alpha - \eta)t + N + K$$

Uebergehen wir daher wieder die kleinen Störungen von  $K$ , setzen auch zur Abkürzung

$$\omega = n(y + \alpha - \eta)t + N_0 + K_0$$

und nennen den Sinus der Breite des Mondes  $S$ , so wird

$$S = \sin J \sin (\bar{f} + \omega + \delta N)$$

wenn wir  $\delta N = N - N_0$  machen. Erwägen wir nun dass

$$P = 2 \sin \frac{1}{2} J \sin \delta N$$

$$Q = 2 \sin \frac{1}{2} J \cos \delta N$$

und dass wir

$$P = \delta P$$

$$Q = 2 \sin \frac{1}{2} J_0 + \delta Q$$

setzen dürfen, so bekommen wir, wenn wir wieder nur die Glieder der niedrigsten Ordnung berücksichtigen,

$$\delta S = \delta Q \sin (\bar{f} + \omega) + \delta P \cos (\bar{f} + \omega)$$

Substituirt man hierin die obigen Ausdrücke für  $\delta P$  und  $\delta Q$ , so bekommt man

$$\delta S = - \frac{b}{n(\alpha + \eta)} \sin (\bar{f} + \omega - \theta) - \frac{c}{n(\alpha + \eta)} \cos (\bar{f} + \omega - \theta)$$

wo  $\bar{f} + \omega - \theta$  die wahre siderische Länge des Mondes in seiner Bahn bedeutet. Der vorstehende Ausdruck giebt zu erkennen, dass der Mond durch die Veränderung, die die Lage der Ecliptik im Laufe der Zeit erleidet, genöthigt wird, sich auf einer Ebene mit unveränderlicher Neigung zu bewegen, die von der gleichzeitigen Lage der Ecliptik verschieden ist, aber gegen diese eine bestimmte Lage hat. Um diese Lage zu ermitteln, nenne ich die Neigung der fraglichen Ebene gegen die gleichzeitige Ecliptik  $i_1$ , und die Länge des aufsteigenden Knotens derselben auf dieser  $\theta_1$ . Somit ergiebt sich aus dem vorstehenden Ausdruck für  $\delta S$  sofort

$$\sin i_1 \sin \theta_1 = \frac{c}{n(\alpha + \eta)}; \quad \sin i_1 \cos \theta_1 = - \frac{b}{n(\alpha + \eta)}$$

Da wir nur die erste Potenz von  $b$  und  $c$  berücksichtigen, so können wir in den obigen Ausdrücken für  $dp'$  und  $dq' \cos i' = 1$  und nach den Integrationen  $\theta'$  für  $\sigma'$  setzen; hiedurch wird

$$\sin i' \sin \theta' = bt; \quad \sin i' \cos \theta' = ct$$

Setzt man hierin

$$t = - \frac{4}{n(\alpha + \eta)}$$

und bezeichnet die zu diesem Werthe der Zeit gehörigen Werthe von  $i'$  und  $\theta'$  mit  $i_2$  und  $\theta_2$ , so entstehen die Gleichungen

$$\sin i_1 \sin \theta_1 = - \sin i_2 \cos \theta_2$$

$$\sin i_1 \cos \theta_1 = + \sin i_2 \sin \theta_2$$

woraus

$$i_1 = i_2, \quad \theta_1 = \theta_2 - 90^\circ$$

hervorgehen. Nimmt man das Julianische Jahr zur Einheit der Zeit an, dann ist sehr nahe  $n(\alpha + \eta) = 69680''$ , mithin  $t = -2,95$  Jul. Jahren, oder

$$t \text{ nahe} = -3 \text{ Jahren,}$$

womit der obige Satz bewiesen ist.

#### 15.

Der im vor. Art. gefundene Ausdruck von  $\delta S$  zeigt, dass in der **Mondbreite** eine Ungleichheit vorhanden ist, die von der **Säcularänderung der Ecliptik** abhängt und die **siderische Länge des Mondes in seiner Bahn zum Argument** hat. Eine ähnliche Ungleichheit wird von der **Abplattung der Erde** bewirkt, die aber die **tropische Länge des Mondes in seiner Bahn zum Argument** hat. Beide fallen also in der Zeitepoche zusammen, und entfernen sich nur nach Maassgabe des Anwachsens der Präcession von einander. Die Verschiedenheit, die dadurch entsteht, kann man durch eine Säcularänderung der Ungleichheit ausdrücken, und so habe ich es in den Mondtafeln gemacht. Die Glieder

$$+ 8'',764 \sin (f + \omega - \Theta + 169^\circ 54')$$

$$+ 0'',000388 (t - 1800) \cos (f + \omega - \Theta + 278^\circ 39')$$

die in der Einleitung der Mondtafeln als zum Ausdruck von  $S$  gehörig gegeben sind, so wie die in den Längenstörungen vom Argument  $\Theta$  abhängigen, bilden die Summe der beiden hier in Rede stehenden Ungleichheiten. Den Coefficienten  $8'',764$ , in so weit er von der Abplattung der Erde abhängt, kann man nicht aus der Theorie bestimmen, sondern muss Beobachtungen dazu anwenden. Die Bögen  $169^\circ 54'$  und  $278^\circ 39'$ , so wie der Coefficient der Säcularänderung — der übrigens so klein ist, dass ich ihn in den Tafeln selbst übergehen durfte — sind aus der Theorie bestimmt, wie man weiter unten sehen wird. Man muss ebenfalls die Theorie zu Hilfe nehmen, wenn man die aus dem Coefficienten sich ergebende Abplattung der Erde bestimmen will.

16.

Bei der Ermittlung der Mondstörungen muss auch auf die Ungleichheiten, die der Mond in der Bewegung der Erde (oder der hier supponirten Bewegung der Sonne) hervorbringt, Rücksicht genommen werden, da die Rückwirkung dieser Ungleichheiten auf die Bewegung des Mondes nicht unmerklich ist. Es lässt sich diese Rückwirkung durch Hilfe eines Satzes, den ich jetzt beweisen werde, sehr leicht und mit aller wünschenswerthen Genauigkeit berücksichtigen. Bezeichnen wir irgend welche rechtwinkliche Coordinaten des Mondes, die ihren Anfangspunkt im Schwerpunkt der Erde haben, mit  $x, y, z$ , und die analogen der Sonne mit  $x', y', z'$ , dann bekommt die von der Einwirkung der Sonne herrührende Störungfunction des Mondes den folgenden Ausdruck,

$$\Omega = \frac{m'}{1+m} \left\{ \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} - \frac{xx' + yy' + zz'}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{\frac{3}{2}}} \right\}$$

Aus der Ursache, dass die Entfernung des Mondes von der Erde immer viel kleiner ist wie die der Sonne, kann man den vorstehenden Ausdruck in eine nach den Potenzen des Verhältnisses dieser beiden Entfernungen fortschreitende, sehr stark convergirende Reihe auflösen. Aus der Gleichung

$$(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2 = (x^2 + y^2 + z^2) - 2(xx' + yy' + zz') + (x'^2 + y'^2 + z'^2)$$

wo die drei mittleren Glieder rechter Hand sich zu den drei ersten im Allgemeinen verhalten wie  $r:r'$ , und die drei letzten zu den drei ersten wie  $r^2:r'^2$ , folgt

$$\begin{aligned} \{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2\}^{-\frac{1}{2}} &= \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{xx' + yy' + zz'}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &- \frac{x^2 + y^2 + z^2}{2(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} + \frac{3(xx' + yy' + zz')^2}{2(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} \\ &- \frac{3(xx' + yy' + zz')(x^2 + y^2 + z^2)}{2(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{7}{2}}} + \frac{5(xx' + yy' + zz')^3}{2(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{7}{2}}} + \text{etc.} \end{aligned}$$

Lassen wir nun das erste Glied weg, welches keine Wirkung auf die Mondbewegung ausübt, und setzen

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \frac{m'}{1+m} \left\{ \frac{3(xx' + yy' + zz')^2}{2(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} - \frac{x^2 + y^2 + z^2}{2(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \right\} \\ \Omega_2 &= \frac{m'}{1+m} \left\{ \frac{5(xx' + yy' + zz')^3}{2(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{7}{2}}} - \frac{3(xx' + yy' + zz')(x^2 + y^2 + z^2)}{2(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} \right\} \end{aligned}$$

so wird

$$\Omega = \Omega_1 + \Omega_2 + \text{etc.}$$

Die beiden hingeschriebenen Glieder sind bis auf sehr Weniges ausreichend um alle Mondstörungen zu erhalten;  $\Omega_1$  ist viel grösser wie  $\Omega_2$ , denn es ist im Allgemeinen

$$\Omega_1 : \Omega_2 = r' : r \text{ nahe } = 400 : 1.$$

Es braucht jedenfalls nur die erste Potenz der in der Sonnenbewegung statt findenden Störungen berücksichtigt zu werden, und man braucht diese auch nur in  $\Omega_1$  zu berücksichtigen, da ihre Wirkung auf  $\Omega_2$  ganz unmerklich ist. Bezeichnen wir nun die durch den Mond in der Bewegung der Sonne hervorgebrachten Ungleichheiten mit  $\delta x'$ ,  $\delta y'$ ,  $\delta z'$ , substituiren  $x' + \delta x'$ , etc. für  $x'$ , etc. in  $\Omega_1$ , behalten nur die erste Potenz dieser Incremente bei, und nennen  $\delta\Omega_1$  den dadurch entstehenden Zuwachs von  $\Omega_1$ , so ergibt sich

$$\delta\Omega_1 = \frac{m'}{1+m} \left\{ \begin{array}{l} \frac{3(x\alpha' + y\beta' + z\gamma')(x\delta\alpha' + y\delta\beta' + z\delta\gamma')}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{\frac{5}{2}}} \\ - \frac{45(x\alpha' + y\beta' + z\gamma')^2(x'\delta\alpha' + y'\delta\beta' + z'\delta\gamma')}{2(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{\frac{5}{2}}} \\ + \frac{3(x^2 + y^2 + z^2)(x'\delta\alpha' + y'\delta\beta' + z'\delta\gamma')}{2(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{\frac{5}{2}}} \end{array} \right\}$$

und es wird nun

$$\Omega = \Omega_1 + \delta\Omega_1 + \Omega_2$$

Differentiiren wir den vorstehenden Ausdruck nach  $x$ , so ergibt sich

$$\left(\frac{d\delta\Omega_1}{dx}\right) = \frac{m'}{1+m} \left\{ \begin{array}{l} \frac{3x'(x\delta\alpha' + y\delta\beta' + z\delta\gamma')}{x'^2 + y'^2 + z'^2)^{\frac{5}{2}}} \\ + \frac{3(x\alpha' + y\beta' + z\gamma')\delta\alpha'}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{\frac{5}{2}}} \\ - \frac{45(x\alpha' + y\beta' + z\gamma')x'(x'\delta\alpha' + y'\delta\beta' + z'\delta\gamma')}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{\frac{5}{2}}} \\ + \frac{3x(x'\delta\alpha' + y'\delta\beta' + z'\delta\gamma')}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{\frac{5}{2}}} \end{array} \right\}$$

und ähnliche Ausdrücke ergeben sich für die Differentialquotienten nach  $y$  und  $z$ .

## 17.

Die einzig merkliche Einwirkung des Mondes auf die Bewegung der Erde (oder der hier supponirten der Sonne) besteht darin, dass er verursacht, dass der gemeinschaftliche Schwerpunkt der Erde und des Mondes, statt des Schwerpunktes jener, eine Ellipse um die Sonne beschreibt. Nennen wir daher, auf diesen Schwerpunkt bezogen, die rechtwinklichen Coordinaten der Erde  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$ , und die des Mondes  $x_1$ ,  $y_1$ ,  $z_1$ , so wird

$$0 = \xi + mx_1; \quad 0 = \eta + my_1; \quad 0 = \zeta + mz_1$$



Nennen wir ferner die auf denselben Schwerpunkt bezogenen Coordinaten der Sonne  $x'_1, y'_1, z'_1$ , so ergibt sich

$$x' = x'_1 - \xi; \quad y' = y'_1 - \eta; \quad z' = z'_1 - \zeta$$

und ebenso erhält man

$$x = x_1 - \xi; \quad y = y_1 - \eta; \quad z = z_1 - \zeta$$

Hieraus bekommt man

$$x' = x'_1 + \frac{m}{1+m} x; \quad y' = y'_1 + \frac{m}{1+m} y; \quad z' = z'_1 + \frac{m}{1+m} z$$

und es wird daher

$$\delta x' = \frac{m}{1+m} x; \quad \delta y' = \frac{m}{1+m} y; \quad \delta z' = \frac{m}{1+m} z$$

Substituirt man diese Ausdrücke in dem am Ende des vor. Art. erhaltenen Ausdruck, so ergibt sich

$$\left(\frac{d\delta\Omega_1}{dx}\right) = \frac{m}{1+m} \cdot \frac{m'}{1+m} \left\{ + \frac{3x'(x^2 + y^2 + z^2)}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{\frac{5}{2}}} + \frac{6x(ax' + yy' + zz')}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{\frac{5}{2}}} - \frac{15x'(axx' + yy' + zz')^2}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{\frac{7}{2}}} \right\}$$

Differentiirt man aber den obigen Ausdruck für  $\Omega_2$  nach  $x$ , so bekommt man

$$\left(\frac{d\Omega_2}{dx}\right) = - \frac{m'}{1+m} \left\{ + \frac{3x'(x^2 + y^2 + z^2)}{2(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{\frac{5}{2}}} + \frac{3x(axx' + yy' + zz')}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{\frac{5}{2}}} - \frac{15x'(axx' + yy' + zz')^2}{2(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{\frac{7}{2}}} \right\}$$

Die Vergleichung dieser beiden Ausdrücke zeigt dass

$$\left(\frac{d\delta\Omega_1}{dx}\right) = - \frac{2m}{1+m} \left(\frac{d\Omega_2}{dx}\right)$$

oder

$$\left(\frac{d\delta\Omega_1}{dx}\right) + \left(\frac{d\Omega_2}{dx}\right) = \frac{1-m}{1+m} \left(\frac{d\Omega_2}{dx}\right)$$

ist, und ähnliche Gleichungen ergeben sich für die partiellen Differentiale nach  $y$  und  $z$ . Es wird demzufolge

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\Omega}{dx}\right) &= \left(\frac{d\Omega_1}{dx}\right) + \frac{1-m}{1+m} \left(\frac{d\Omega_2}{dx}\right) \\ \left(\frac{d\Omega}{dy}\right) &= \left(\frac{d\Omega_1}{dy}\right) + \frac{1-m}{1+m} \left(\frac{d\Omega_2}{dy}\right) \\ \left(\frac{d\Omega}{dz}\right) &= \left(\frac{d\Omega_1}{dz}\right) + \frac{1-m}{1+m} \left(\frac{d\Omega_2}{dz}\right) \end{aligned}$$

in welchen die Einwirkung der Mondstörungen der Erde auf die Mondbewegung vollständig berücksichtigt ist. Da nun in den Differential-

gleichungen für die Mondbewegung nur Differentialquotienten von  $\Omega$  nach irgend welchen Coordinaten oder elliptischen Elementen des Mondes vorkommen, und alle solche Differentialquotienten auf die Form

$$A \left( \frac{d\Omega}{dx} \right) + B \left( \frac{d\Omega}{dy} \right) + C \left( \frac{d\Omega}{dz} \right)$$

gebracht werden können, in welcher  $A$ ,  $B$ ,  $C$  die Coordinaten oder elliptischen Elemente der Sonne nicht enthalten, so ergibt sich folgender

Satz.

»Um die Rückwirkung der in der Bewegung der Erde (oder Sonne) vom Monde verursachten Störungen auf die Mondbewegung vollständig zu berücksichtigen, braucht man nur dem eben mit  $\Omega_2$  bezeichneten Gliede der Störungsfuction, das ist demjenigen, welches bei der weiter unten folgenden Entwicklung derselben mit  $r^3$  multiplicirt sein wird, den Factor

$$\frac{1-m}{1+m}$$

beizufügen.«

18.

Plana wendet in seiner Mondtheorie den oben gefundenen Factor, oder vielmehr die Abkürzung  $1-2m$  desselben an, findet aber, dass ein Glied übrig bleibt, welches dem Satze nicht entspricht.\*) In Bezug darauf bemerke ich, dass die in den Gleichungen des Art. 13 für  $dP$ ,  $dQ$ ,  $dK$  mit  $dp'$  und  $dq'$  multiplicirten Glieder zwar ausserhalb des eben bewiesenen Satzes liegen, eben weil sie nicht von der Störungsfuction des Mondes, sondern von der der Sonne (oder Erde) abhängen. Dieser Satz gilt aber unbedingt für alle in der von der Sonne bewirkten Störungsfuction des Mondes befindlichen Glieder.

Poisson hat die Richtigkeit dieses Satzes bestritten, und behauptet, dass er nur für die Glieder der niedrigsten Ordnung im Coefficienten der parallactischen Gleichung statt finde.\*\*) Er sucht diese Behauptung a posteriori dadurch zu beweisen, dass er den Coefficienten der parallactischen Gleichung von der Form  $K-\lambda L$  annimmt, wo  $\lambda$  die Mondmasse bedeutet, und die Grössen  $K$  und  $L$  in Reihen entwickelt, die nach den Potenzen des Verhältnisses der mittleren Bewegungen der Sonne und des Mondes fortschreiten. Er findet

\*) Théorie du mouv. d. l. lune. Tome III, p. 824.

\*\*) Mémoire sur le mouv. d. l. lune autour d. l. terre, art. 35.

$$L = \frac{15}{4} + \frac{27}{4} m$$

während

$$K = \frac{15}{8} + \frac{93}{8} m$$

ist, wenn  $m$  das eben genannte Bewegungsverhältniss bedeutet. Da nun zufolge des obigen Satzes hier  $L = 2K$  werden müsste, so scheint aus diesen Entwicklungen hervorzugehen, dass der Satz sich nur auf das erste Glied von  $K$  und  $L$  erstrecke. Allein der obige Ausdruck von  $L$  ist unrichtig, es sind in der Berechnung desselben Combinationen übergegangen worden, die auch mit  $m$  multiplicirte Glieder geben. Wenn man diese zuzieht, so erhält man

$$L = \frac{15}{4} + \frac{93}{4} m$$

dem Satze entsprechend. Der Poissonsche Einwand gegen den Satz hat also keinen Grund.

### § 3. Specielle Entwicklung der Differentialgleichungen der Mondbewegung.

19.

Zunächst ist die Störungsfunction  $\Omega$  zu entwickeln, und die Entwicklung davon nach den Potenzen des Mondradius die angemessenste. Sie ist schon in den »*Fundamenta etc.*« ausführlich behandelt, und ich werde daher die dort erhaltenen Resultate ohne Weiteres hier aufnehmen. Trennen wir die einzelnen Glieder nach den Potenzen von  $r$ , und setzen mit Weglassung des mit  $r^0$  multiplicirten Gliedes, welches in den Differentiationen von selbst wegfällt, zuerst

$$\Omega^{(1)} = \frac{m'}{1+m} \frac{r^2}{r'^2} \left( \frac{8}{3} H^2 - \frac{1}{2} \right)$$

$$\Omega^{(2)} = \frac{m'}{1+m} \frac{r^3}{r'^3} \left( \frac{5}{2} H^3 - \frac{3}{2} H \right)$$

$$\Omega^{(3)} = \frac{m'}{1+m} \frac{r^4}{r'^4} \left( \frac{35}{8} H^4 - \frac{15}{4} H^2 + \frac{8}{8} \right)$$

wo

$$H = \cos^2 \frac{1}{2} J \cos (\bar{f} - \bar{f}' + n(y - y' - 2\eta)t + 2K) \\ + \sin^2 \frac{1}{2} J \cos (f + f' + n(y - y' + 2\alpha)t + 2N)$$

so wird

$$\Omega = \Omega^{(1)} + \Omega^{(2)} + \Omega^{(3)} + \text{etc.}$$

Schon das dritte der hier aufgenommenen Glieder kann mit Ausnahme einiger sehr kleinen Glieder, die vorzugsweise auf  $y$  und  $\alpha$  einwirken, nichts Merkliches geben, und um so weniger können die folgenden hier weggelassenen Glieder Merkliches geben.

## 20.

Bei den ersten Entwicklungen werden nun von  $r, \bar{f}, r', \bar{f}'$  nur die elliptischen Ausdrücke angewandt, und  $J, K, N$  als Constante betrachtet, der Unterschied zwischen diesen und den vollständigen Werthen derselben wird später berücksichtigt werden. Die Entwicklungen geschehen nach den Cosinussen der Vielfachen der mittleren Anomalien des Mondes und der Sonne, wobei aber auch die verschiedenen Combinationen der oben im Ausdruck von  $H$  befindlichen, mit  $t$  multiplicirten Glieder, so wie die Combinationen von  $N$  und  $K$  in Betracht kommen. Der Einfachheit wegen können wir auch für  $N$  und  $K$  die bereits im Art. 9 eingeführten und mit  $\omega$  und  $\omega'$  bezeichneten Grössen anwenden, wenn wir in den ersten Entwicklungen  $N_0$  und  $K_0$  statt  $N$  und  $K$  schreiben. Es wird daher zuerst

$$(14) \dots \dots \dots \left\{ \begin{array}{l} \omega = n(y + \alpha - \eta)t + N_0 + K_0 \\ \omega' = n(y' + \alpha + \eta)t + N_0 - K_0 \end{array} \right.$$

und es bedeutet  $\omega$  die mittlere Entfernung des Mondperigäums vom aufsteigenden Knoten, so wie  $\omega'$  die mittlere Entfernung des Sonnenperigäums von demselben Knoten. Später, bei der Berücksichtigung der von der Neigung und der Knotenlänge abhängigen Störungen müssen wir wieder  $N$  und  $K$  statt  $N_0$  und  $K_0$  substituiren.

Schreiben wir auch der Kürze wegen  $f$  und  $f'$  statt  $\bar{f}$  und  $\bar{f}'$ , so wird daher in jedem Falle

$$H = \cos^2 \frac{1}{2} J \cos(f - f' + \omega - \omega') + \sin^2 \frac{1}{2} J \cos(f + f' + \omega + \omega')$$

Die Sonnenmasse  $m'$ , die hier in Theilen der Erdmasse ausgedrückt werden muss, und deshalb eine grosse Zahl ist, kann auch, und zwar bleibend, eliminirt werden. Da wir hier unter  $n$  und  $n'$  die Bewegungen der mittleren Anomalien des Mondes und der Sonne verstehen müssen, wie die Entwicklungen des § 1 unabweislich verlangen, so müssen wir auch die grossen Halbachsen der Ellipsen so verstehen, dass sie den Gleichungen

$$n^2 a^3 = k^2 (1 + m); \quad n'^2 a'^3 = k^2 (1 + m')$$

Gnüge leisten, und aus diesen zieht man ohne Mühe

$$\frac{m'}{1+m} \frac{a^2}{a'^2} = u^2 \frac{m'}{1+m'}$$

wo

$$u = \frac{n'}{n}$$

ist.

21.

Aus dem obigen Ausdruck von  $H$ , in welchem zwei verschiedene Gruppen von  $\omega$  und  $\omega'$  vorkommen, folgt leicht, dass in  $H^2$  und folglich auch in  $\Omega^{(1)}$  fünf verschiedene Gruppen dieser Bögen vorkommen müssen. Theilen wir daher der leichteren Uebersicht wegen  $\Omega^{(1)}$  in fünf Theile, so dass

$$\Omega^{(1)} = \Omega_1 + \Omega_2 + \Omega_3 + \Omega_4 + \Omega_5$$

wird, so giebt die in den »Fundamenta etc.« nachzusehende Entwicklung, wenn wir auch zur Abkürzung

$$u^2 \frac{m'}{1+m'} = u_1^2$$

$$\beta_1 = \frac{1}{4} - \frac{3}{2} \sin^2 \frac{1}{2} J + \frac{3}{2} \sin^4 \frac{1}{2} J$$

$$\beta_2 = \frac{3}{4} - \frac{3}{2} \sin^2 \frac{1}{2} J + \frac{3}{4} \sin^4 \frac{1}{2} J$$

$$\beta_3 = \frac{3}{2} \sin^2 \frac{1}{2} J - \frac{3}{2} \sin^4 \frac{1}{2} J$$

$$\beta_4 = \frac{3}{2} \sin^2 \frac{1}{2} J - \frac{3}{2} \sin^4 \frac{1}{2} J$$

$$\beta_5 = \frac{3}{4} \sin^4 \frac{1}{2} J$$

setzen,

$$a\Omega_1 = u_1^2 \beta_1 \sum P^{(i)} K^{(i')} \cos (ig + i'g')$$

$$a\Omega_2 = u_1^2 \beta_2 \sum Q^{(i)} G^{(i')} \cos (ig + i'g' + 2\omega - 2\omega')$$

$$a\Omega_3 = u_1^2 \beta_3 \sum Q^{(i)} K^{(i')} \cos (ig + i'g' + 2\omega)$$

$$a\Omega_4 = u_1^2 \beta_4 \sum P^{(i)} G^{(i')} \cos (ig + i'g' + 2\omega')$$

$$a\Omega_5 = u_1^2 \beta_5 \sum Q^{(i)} G^{(i')} \cos (ig + i'g' + 2\omega + 2\omega')$$

wo die Summationen sowohl in Bezug auf  $i$  wie auf  $i'$  von  $-\infty$  bis  $+\infty$  auszudehnen sind, und die Coefficienten die folgenden Ausdrücke haben: \*)

\*) Ich habe hier  $Q^{(i)}$  und  $G^{(i')}$  statt der in den »Fundamenta etc.« angewandten Bezeichnung  $Q_c^{(i)} + Q_s^{(i)}$  und  $G_c^{(i')} - G_s^{(i')}$  geschrieben.

$$P^{(0)} = 1 + \frac{3}{2} e^2$$

$$P^{(1)} = -e + \frac{1}{8} e^3 - \frac{1}{192} e^5 + \dots$$

$$P^{(2)} = -\frac{1}{4} e^2 + \frac{1}{42} e^4 - \frac{1}{96} e^6 + \dots$$

$$P^{(3)} = -\frac{1}{8} e^3 + \frac{9}{428} e^5 + \dots$$

$$P^{(4)} = -\frac{1}{12} e^4 + \frac{1}{15} e^6 + \dots$$

$$P^{(5)} = -\frac{25}{884} e^5 + \dots$$

$$P^{(6)} = -\frac{9}{160} e^6 + \dots$$

$$P^{(-1)} = P^{(0)}$$

$$Q^{(-3)} = -\frac{17}{640} e^5 + \dots$$

$$Q^{(-2)} = -\frac{1}{16} e^4 - \frac{11}{480} e^6 + \dots$$

$$Q^{(-1)} = -\frac{7}{24} e^3 - \frac{47}{884} e^5 + \dots$$

$$Q^{(0)} = \frac{5}{2} e^2$$

$$Q^{(1)} = -3e + \frac{13}{8} e^3 + \frac{5}{192} e^5 + \dots *$$

$$Q^{(2)} = 1 - \frac{5}{2} e^2 + \frac{23}{16} e^4 - \frac{65}{288} e^6 + \dots$$

$$Q^{(3)} = e - \frac{19}{8} e^3 + \frac{107}{64} e^5 + \dots$$

$$Q^{(4)} = e^2 - \frac{5}{2} e^4 + \frac{101}{48} e^6 + \dots$$

$$Q^{(5)} = \frac{25}{24} e^3 - \frac{1075}{884} e^5 + \dots$$

$$Q^{(6)} = \frac{9}{8} e^4 - \frac{261}{80} e^6 + \dots$$

$$Q^{(7)} = \frac{2401}{4920} e^5 + \dots$$

$$Q^{(8)} = \frac{64}{45} e^6 + \dots$$

---

\*) In den »*Fundamenta etc.*« steht durch Druckfehler  $Q_s^{(4)} = \dots + \frac{53}{24} e^2 + \dots$  statt  $+\frac{23}{24} e^2$ . In meinen Manuscripten hat immer der richtige Werth  $+\frac{23}{24} e^2$  gestanden.

$$\begin{aligned}
 K^{(0)} &= (1 - e'^2) - 1 \\
 K^{(1)} &= \frac{3}{2} e' + \frac{27}{16} e'^3 + \dots \\
 K^{(2)} &= \frac{9}{4} e'^2 + \frac{7}{4} e'^4 + \dots \\
 K^{(3)} &= \frac{53}{16} e'^3 + \dots \\
 K^{(4)} &= \frac{281}{48} e'^4 + \dots \\
 K^{(5)} &= \frac{1773}{256} e'^5 + \dots \\
 K^{(-i)} &= K^{(i)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 G^{(2)} &= \frac{1}{24} e'^4 + \dots \\
 G^{(1)} &= \frac{1}{48} e'^3 + \dots \\
 G^{(0)} &= 0 \\
 G^{(-1)} &= -\frac{1}{2} e' + \frac{1}{16} e'^3 + \dots \\
 G^{(-2)} &= 1 - \frac{5}{2} e'^2 + \frac{43}{12} e'^4 + \dots \\
 G^{(-3)} &= \frac{7}{2} e' - \frac{123}{16} e'^3 + \dots \\
 G^{(-4)} &= \frac{17}{2} e'^2 - \frac{145}{6} e'^4 + \dots \\
 G^{(-5)} &= \frac{845}{48} e'^3 + \dots \\
 G^{(-6)} &= \frac{533}{16} e'^4 + \dots
 \end{aligned}$$

womit man vollständig ausreicht.

22.

Der zweite Theil der Störungfunction  $\Omega^{(2)}$  enthält  $H^3$ , und besteht daher aus sieben in Bezug auf  $\omega$  und  $\omega'$  verschiedenen Theilen, wovon jedoch zwei unmerklich sind. Zur Berücksichtigung der übrigen fünf Theile setze ich

$$\Omega^{(2)} = \Omega_6 + \Omega_7 + \Omega_8 + \Omega_9 + \Omega_{10}$$

und um den zweiten Satz des vor. § sogleich zu berücksichtigen, multiplicire ich jeden dieser fünf Theile mit

$$\lambda = \frac{1-m}{1+m}$$

Setzt man ausserdem zur Abkürzung

$$\begin{aligned}\mu &= \frac{a}{a'} \\ \beta_6 &= \frac{3}{8} - \frac{33}{8} \sin^2 \frac{1}{2} J + \frac{75}{8} \sin^4 \frac{1}{2} J \\ \beta_7 &= \frac{5}{8} - \frac{15}{8} \sin^2 \frac{1}{2} J + \frac{15}{8} \sin^4 \frac{1}{2} J \\ \beta_8 &= \frac{9}{4} \sin^2 \frac{1}{2} J - \frac{15}{2} \sin^4 \frac{1}{2} J \\ \beta_9 &= \frac{15}{8} \sin^2 \frac{1}{2} J - \frac{15}{4} \sin^4 \frac{1}{2} J \\ \beta_{10} &= \frac{15}{8} \sin^2 \frac{1}{2} J - \frac{15}{4} \sin^4 \frac{1}{2} J\end{aligned}$$

so ergibt sich

$$\begin{aligned}a\Omega_6 &= \lambda\mu u_1^2 \beta_6 \Sigma A^{(i)} C^{(v)} \cos (ig + i'g' + \omega - \omega') \\ a\Omega_7 &= \lambda\mu u_1^2 \beta_7 \Sigma B^{(i)} D^{(v)} \cos (ig + i'g' + 3\omega - 3\omega') \\ a\Omega_8 &= \lambda\mu u_1^2 \beta_8 \Sigma A^{(i)} C^{(-v)} \cos (ig + i'g' + \omega - \omega') \\ a\Omega_9 &= \lambda\mu u_1^2 \beta_9 \Sigma B^{(i)} C^{(v)} \cos (ig + i'g' + 3\omega - \omega') \\ a\Omega_{10} &= \lambda\mu u_1^2 \beta_{10} \Sigma A^{(i)} D^{(v)} \cos (ig + i'g' + \omega - 3\omega')\end{aligned}$$

wo die Ausdehnung der Summationen in Bezug auf  $i$  und  $i'$  dieselbe ist wie im vor. Art. Die hier vorkommenden Functionen der Excentricitäten haben die folgenden Ausdrücke:

$$\begin{aligned}A^{(-3)} &= \frac{7}{128} e^4 + \dots \\ A^{(-2)} &= \frac{1}{6} e^3 + \dots \\ A^{(-1)} &= \frac{11}{8} e^2 + \frac{7}{48} e^4 + \dots \\ A^{(0)} &= -\frac{5}{2} e - \frac{15}{8} e^3 + \dots \\ A^{(1)} &= 1 + 2e^2 - \frac{11}{64} e^4 + \dots \\ A^{(2)} &= -\frac{1}{2} e + e^3 + \dots \\ A^{(3)} &= -\frac{3}{8} e^2 + \frac{11}{16} e^4 + \dots \\ A^{(4)} &= -\frac{7}{24} e^3 + \dots \\ A^{(5)} &= -\frac{95}{384} e^4 + \dots \\ \hline B^{(-1)} &= \frac{75}{128} e^4 + \dots \\ B^{(0)} &= -\frac{35}{8} e^3 \\ B^{(1)} &= \frac{57}{8} e^2 - \frac{65}{16} e^4 + \dots\end{aligned}$$



$$B^{(2)} = -\frac{9}{2}e + \frac{33}{4}e^2 + \dots$$

$$B^{(3)} = 1 - 6e^2 + \frac{591}{64}e^4 + \dots$$

$$B^{(4)} = \frac{3}{2}e - \frac{57}{8}e^3 + \dots$$

$$B^{(5)} = \frac{45}{8}e^2 - \frac{435}{16}e^4 + \dots$$

$$B^{(6)} = \frac{9}{4}e^3 + \dots$$

$$B^{(7)} = \frac{343}{428}e^4 + \dots$$


---

$$C^{(2)} = \frac{33}{12}e'^3 + \dots$$

$$C^{(1)} = \frac{41}{8}e'^2 + \dots$$

$$C^{(0)} = e'(1 - e'^2) - \frac{1}{2}$$

$$C^{(-1)} = 1 + 2e'^2 + \dots$$

$$C^{(-2)} = 3e' + \frac{33}{12}e'^3 + \dots$$

$$C^{(-3)} = \frac{53}{8}e'^2 + \dots$$

$$C^{(-4)} = \frac{77}{6}e'^3 + \dots$$


---

$$D^{(0)} = 0$$

$$D^{(-1)} = \frac{1}{8}e'^2 + \dots$$

$$D^{(-2)} = -e' + \frac{5}{4}e'^3 + \dots$$

$$D^{(-3)} = 1 - 6e'^2 + \dots$$

$$D^{(-4)} = 5e' - 22e'^3 + \dots$$

$$D^{(-5)} = \frac{127}{8}e'^2 + \dots$$

$$D^{(-6)} = \frac{163}{4}e'^3 + \dots$$

womit man vollständig ausreicht.

Der hier vorkommende Factor  $\mu$  bezeichnet, wie sein Ausdruck zeigt, das Verhältniss der mittleren Sonnenparallaxe zur mittleren Mondparallaxe und es hängen daher alle aus  $\mathcal{N}_6$  bis  $\mathcal{N}_{10}$  sich ergebenden Störungen von der Sonnenparallaxe ab, und nicht blos die sogenannte parallactische Ungleichheit, die in dieser Beziehung oft ausschliesslich angeführt wird. Die Sonnenparallaxe kann aber nur durch Beobachtungen bestimmt werden, und der jetzt im Gebrauch befindliche Werth

derselben ist erstens auf keinen Fall genau genug, um in der Mondtheorie definitiv angewandt werden zu können, und zweitens in der letzten Reihe von Jahren ohnehin mehrmals als wesentlich von dem richtigen Werthe desselben abweichend bezeichnet worden. In Folge dieser Umstände wurde es bei der Bearbeitung der Mondtafeln nothwendig, den Werth des Factors  $\mu$ , welcher in den Störungsrechnungen angenommen worden war, durch die Mondbeobachtungen zu berichtigen, und dieses Verfahren ist daher kein Empirismus.

## 23.

Der dritte oben aufgestellte Theil der Störungfunction, nemlich  $\Omega^{(3)}$ , besteht, wenn man seinen vollständigen Ausdruck betrachtet, aus noch mehr Abtheilungen, wie die beiden vorhergehenden Theile, allein die Betrachtung der grössten derselben reicht aus, da nur diese etwas Merkliches geben können. Es wird zufolge des Art. 19, wenn man die Grössen  $\mu$  und  $u$  einführt,

$$a\Omega^{(3)} = \mu^2 u^2 \left(\frac{r}{a}\right)^4 \left(\frac{a'}{r'}\right)^5 \left\{ \frac{35}{8} H^4 - \frac{15}{4} H^2 + \frac{3}{8} \right\}$$

und der Ausdruck von  $H$  des Art. 20 giebt, wenn man nur die Glieder aufnimmt, die Merkliches geben können,

$$H^2 = \frac{1}{2} - \sin^2 \frac{1}{2} J + \frac{1}{2} \cos(2f - 2f' + 2\omega - 2\omega') \\ + \sin^2 \frac{1}{2} J \cos(2f' + 2\omega')$$

$$H^4 = \frac{3}{8} - \frac{3}{2} \sin^2 \frac{1}{2} J + \frac{1}{2} \cos(2f - 2f' + 2\omega - 2\omega') \\ + \frac{3}{2} \sin^2 \frac{1}{2} J \cos(2f' + 2\omega') \\ + \frac{1}{8} \cos(4f - 4f' + 4\omega - 4\omega')$$

woraus

$$\frac{35}{8} H^4 - \frac{15}{4} H^2 + \frac{3}{8} = \frac{9}{64} - \frac{45}{16} \sin^2 \frac{1}{2} J \\ + \frac{5}{16} \cos(2f - 2f' + 2\omega - 2\omega') \\ + \frac{45}{16} \sin^2 \frac{1}{2} J \cos(2f' + 2\omega') \\ + \frac{35}{64} \cos(4f - 4f' + 4\omega - 4\omega')$$

folgt. Berücksichtigen wir nun nur die erste Potenz der Excentricitäten und nehmen von den mit  $e'$  multiplicirten Gliedern nur das zugleich mit  $\cos g'$  multiplicirte Glied auf, da die übrigen unmerklich sind, so müssen

die Ausdrücke

$$f = g + 2e \sin g, \quad f' = g'$$

$$\left(\frac{r}{a}\right)^4 = 1 - 4e \cos g, \quad \left(\frac{a'}{r'}\right)^5 = 1 + 5e' \cos g'$$

substituirt werden, und hiemit erhält man

$$\begin{aligned} a\Omega^{(2)} = & \mu^2 u^2 \left\{ \frac{9}{64} - \frac{45}{16} \sin^2 \frac{1}{2} J \right\} - \frac{9}{16} \mu^2 u^2 e \cos g \\ & + \frac{45}{16} \mu^2 u^2 e' \cos g' - \frac{5}{4} \mu^2 u^2 e \cos(g - 2g' + 2\omega - 2\omega') \\ & + \frac{5}{16} \mu^2 u^2 \cos(2g - 2g' + 2\omega - 2\omega') + \frac{45}{16} \mu^2 u^2 \sin^2 \frac{1}{2} J \cos(2g' + 2\omega') \\ & - \frac{105}{32} \mu^2 u^2 e \cos(3g - 4g' + 4\omega - 4\omega') + \frac{35}{64} \mu^2 u^2 \cos(4g - 4g' + 4\omega - 4\omega') \\ & + \frac{35}{32} \mu^2 u^2 e \cos(5g - 4g' + 4\omega - 4\omega') \end{aligned}$$

Man wird weiter unten sehen, dass die grösste Wirkung dieser Glieder sich auf die Bewegungen des Perigäums und der Knoten erstreckt.

#### 24.

Wir kommen jetzt zur Entwicklung des Ausdrucks für  $dW_0$  des Art. 6, in welchem auch zuerst nur die elliptischen Ausdrücke der darin vorkommenden Functionen berücksichtigt werden sollen. Setzt man

$$\frac{dW_0}{n_0 dt} = T + \frac{y}{\sqrt{1-e_0^2}} \left\{ \frac{\rho_0^2}{a_0^3} \left( \frac{dW_0}{dy} \right) - \frac{d \cdot \rho_0^2}{2 a_0 dy} \left[ W_0 + \frac{h_0}{h} + 1 \right] \right\}$$

so wird, wenn wir zuerst nur auf die elliptischen Ausdrücke der in  $T$  enthaltenen Functionen Rücksicht nehmen, und um dieses anzudeuten  $T_0$  statt  $T$  schreiben, übrigens aber das Zeichen  $_0$  weglassen, wo daraus keine Undeutlichkeit entstehen kann,

$$\begin{aligned} T_0 = & \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} \left\{ 2 \frac{\rho}{r} \cos(f-\varphi) - 1 + \frac{2\rho}{a(1-e^2)} [\cos(f-\varphi) - 1] \right\} \left( \frac{da\Omega}{dv} \right) \\ & + \frac{2}{\sqrt{1-e^2}} \frac{\rho}{r} \sin(f-\varphi) r \left( \frac{da\Omega}{dr} \right) \end{aligned}$$

Man kann diesen Ausdruck auf mehrere Arten entwickeln. Man kann die Entwicklung der Coefficienten von  $\left(\frac{da\Omega}{dv}\right)$  und  $r\left(\frac{da\Omega}{dr}\right)$  unmittelbar suchen, und so habe ich es in den *Fundamenta etc.* ausgeführt. Man kann statt dessen  $T_0$  so umformen, dass  $\left(\frac{da\Omega}{dq}\right)$  statt  $\left(\frac{da\Omega}{dv}\right)$  darin enthalten ist, dies ist das Verfahren, welches ich bei der Berechnung der gegenseitigen Störungen des Jupiters und Saturns befolgt habe.\*) Endlich

\*) S. Untersuchung über die gegenseitigen Störungen des Jupiters und Saturns. Berlin 1834.

kann man auch  $\left(\frac{da\Omega}{de}\right)$  und  $\left(\frac{da\Omega}{dg}\right)$  statt  $r\left(\frac{da\Omega}{dr}\right)$  einführen, wie ich schon früher angegeben habe.\*) Dieses Verfahren ist jedoch nur dann mit Vortheil anzuwenden, wenn der Ausdruck von  $\Omega$  nach den Potenzen von  $e$  ausdrücklich vorhanden ist. Dieses ist hier der Fall und ich werde daher dieses dritte Verfahren anwenden. Ordnen wir den obigen Ausdruck von  $T_0$  nach den verschiedenartigen Functionen von  $\rho$  und  $\varphi$ , die darin enthalten sind, so bekommen wir leicht zuerst

$$T_0 = -\frac{3}{\sqrt{1-e^2}} \left(\frac{da\Omega}{dv}\right) \\ + 2 \frac{\rho \cos \varphi}{a \sqrt{1-e^2}} \left\{ \left(\frac{a}{r} \sin f + \frac{\cos f}{1-e^2} + \frac{e}{1-e^2}\right) \left(\frac{da\Omega}{dv}\right) + a \sin f \left(\frac{da\Omega}{dr}\right) \right\} \\ + 2 \frac{\rho \sin \varphi}{a \sqrt{1-e^2}} \left\{ \left(\frac{a}{r} \sin f + \frac{\sin f}{1-e^2}\right) \left(\frac{da\Omega}{dv}\right) - a \cos f \left(\frac{da\Omega}{dr}\right) \right\}$$

und dieser kann in den folgenden umgewandelt werden,

$$T_0 = -\frac{3}{\sqrt{1-e^2}} \left\{ \left(\frac{ae \cos f}{r} + \frac{e \cos f}{1-e^2} + \frac{1}{1-e^2}\right) \left(\frac{da\Omega}{dv}\right) + ae \sin f \left(\frac{da\Omega}{dr}\right) \right\} \\ + \frac{2\rho \cos \varphi + 3ae}{a \sqrt{1-e^2}} \left\{ \left(\frac{a}{r} \cos f + \frac{\cos f}{1-e^2} + \frac{e}{1-e^2}\right) \left(\frac{da\Omega}{dv}\right) + a \sin f \left(\frac{da\Omega}{dr}\right) \right\} \\ + \frac{2\rho \sin \varphi}{a \sqrt{1-e^2}} \left\{ \left(\frac{a}{r} \sin f + \frac{\sin f}{1-e^2}\right) \left(\frac{da\Omega}{dv}\right) - a \cos f \left(\frac{da\Omega}{dr}\right) \right\}$$

Da der gewöhnliche Ausdruck für  $\frac{dv}{dg}$ , nemlich

$$\frac{a^2}{r^2} \sqrt{1-e^2} = \frac{ae \cos f}{r \sqrt{1-e^2}} + \frac{e \cos f}{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}$$

ist, so wird

$$\left(\frac{da\Omega}{dg}\right) = \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} \left(\frac{ae \cos f}{r} + \frac{e \cos f}{1-e^2} + \frac{1}{1-e^2}\right) \left(\frac{da\Omega}{dv}\right) + \frac{ae \sin f}{\sqrt{1-e^2}} \left(\frac{da\Omega}{dr}\right) \\ \left(\frac{da\Omega}{de}\right) = \left(\frac{a \sin f}{r} + \frac{\sin f}{1-e^2}\right) \left(\frac{da\Omega}{dr}\right) - a \cos f \left(\frac{da\Omega}{dv}\right)$$

woraus

$$\left(\frac{da\Omega}{dg}\right) - \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} \left(\frac{da\Omega}{dv}\right) = \\ \frac{e}{\sqrt{1-e^2}} \left\{ \frac{a \cos f}{r} + \frac{\cos f}{1-e^2} + \frac{e}{1-e^2} \right\} \left(\frac{da\Omega}{dv}\right) + \frac{ae \sin f}{\sqrt{1-e^2}} \left(\frac{da\Omega}{dr}\right)$$

folgt. Hiemit geht der vorstehende Ausdruck von  $T_0$  unmittelbar in den folgenden über,

$$T_0 = -3 \left(\frac{da\Omega}{dg}\right) \\ + \frac{1}{e} \left\{ \left(\frac{da\Omega}{dg}\right) - \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} \left(\frac{da\Omega}{dv}\right) \right\} \left(2 \frac{\rho}{a} \cos \varphi + 3e\right) \\ + \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} \left(\frac{da\Omega}{de}\right) 2 \frac{\rho}{a} \sin \varphi$$

\*) S. Schumacher Astr. Nachr. Bd. 49. p. 55.

welches der einfachste Ausdruck ist, auf welchen  $T_0$  hingeführt werden kann.

25.

Das im vorstehenden Ausdruck von  $T_0$  enthaltene Differential von  $\Omega$  nach  $g$  wird unmittelbar erhalten, weil in den vorhergehenden Entwicklungen von  $a\Omega$  der Bogen  $g$  ausdrücklich enthalten ist, und da

$$\left(\frac{d\Omega}{du}\right) = \left(\frac{d\Omega}{d\omega}\right)$$

ist, so verhält es sich ebenso mit dem Differential nach  $v$ , da der Bogen  $\omega$  auch ausdrücklich in den Entwicklungen von  $\Omega$  enthalten ist. Die Ermittlung der Coefficienten der Function

$$\frac{i}{e} \left\{ \left(\frac{da\Omega}{dg}\right) - \frac{i}{\sqrt{1-e^2}} \left(\frac{da\Omega}{d\omega}\right) \right\}$$

aus  $a\Omega$  führt darauf hin, dass die Coefficienten von  $a\Omega$  mit den folgenden Factoren zu multipliciren,

$$\begin{aligned} a\Omega_1 \text{ und } a\Omega_4 & \quad \text{mit } -\frac{i}{e} \\ a\Omega_2, a\Omega_3 \text{ und } a\Omega_5 & \quad -\frac{i}{e} + \frac{3}{e\sqrt{1-e^2}} \\ a\Omega_6, a\Omega_8 \text{ und } a\Omega_{10} & \quad -\frac{i}{e} + \frac{i}{e\sqrt{1-e^2}} \\ a\Omega_7 \text{ und } a\Omega_9 & \quad -\frac{i}{e} + \frac{3}{e\sqrt{1-e^2}} \end{aligned}$$

und ausserdem die Cosinuse, die  $\Omega$  enthält, in Sinusse zu verwandeln sind. Das Differential von  $\Omega$  nach  $e$  wird ebenfalls unmittelbar erhalten, da oben die Functionen  $P^{(i)}$ ,  $Q^{(i)}$ , etc. in Reihen, die nach den Potenzen von  $e$  fortschreiten, ausgedrückt worden sind.

Setzen wir nun noch

$$\begin{aligned} 2\frac{e}{a} \cos \varphi + 3e &= 2f \cos \gamma + \dots \\ 2\frac{e \sin \varphi}{a\sqrt{1-e^2}} &= 2f' \sin \gamma + \dots \end{aligned}$$

wo die Zeichen  $f$  und  $f'$  nicht wie bisher die wahren Anomalien bedeuten, sondern

$$\begin{aligned} f &= 1 - \frac{3}{8}e^2 + \frac{5}{192}e^4 - \frac{7}{9216}e^6 + \dots \\ f' &= 1 - \frac{1}{8}e^2 + \frac{1}{192}e^4 - \frac{1}{9216}e^6 + \dots \end{aligned}$$

ist. so haben wir alles, welches zur Entwicklung von  $T_0$  erforderlich ist. Die Coefficienten  $f$  und  $f'$  sind die einzigen der Entwicklung der

vorstehenden Functionen, die gebraucht werden, und der Grund davon liegt in einem längst von mir bewiesenen und weiter unten anzuführenden Satze, der die unmittelbare Berücksichtigung der mit  $\frac{\cos}{\sin} \left\{ 2\gamma, \frac{\cos}{\sin} \right\} 3\gamma$ , etc. multiplicirten Glieder überflüssig macht, und dadurch eine bedeutende Abkürzung der Berechnungen herbeiführt.

## 26.

Die Ausdrücke des vor. Art. könnte man unmittelbar zur numerischen Entwicklung von  $T_0$  anwenden, allein es ist einfacher, die aus denselben hervorgehenden, nach den Potenzen von  $e$  fortschreitenden Reihen zu ermitteln und anzuwenden, es wird hiedurch  $T_0$  auf dieselbe Form gebracht wie  $\Omega$ . Da bei dieser Umwandlung  $T_0$  in die, den zehn Abtheilungen von  $\Omega$  entsprechenden, Theile zerlegt werden muss, so werde ich mich dabei der Bezeichnung  $T_1, T_2$ , etc. bedienen. Es ergibt sich hienach

$$\begin{aligned}
 T_1 &= 3u_1^2\beta_1 \sum i P^{(i)} K^{(i)} \sin (ig + i'g') \\
 &\quad + u_1^2\beta_1 \sum P^{\pm 1, i} K^{(i)} \sin (\pm\gamma + ig + i'g') \\
 T_2 &= 3u_1^2\beta_2 \sum i Q^{(i)} G^{(i)} \sin (ig + i'g' + 2\omega - 2\omega') \\
 &\quad + u_1^2\beta_2 \sum Q^{\pm 1, i} G^{(i)} \sin (\pm\gamma + ig + i'g' + 2\omega - 2\omega') \\
 T_3 &= 3u_1^2\beta_3 \sum i Q^{(i)} K^{(i)} \sin (ig + i'g' + 2\omega) \\
 &\quad + u_1^2\beta_3 \sum Q^{\pm 1, i} K^{(i)} \sin (\pm\gamma + ig + i'g' + 2\omega) \\
 T_4 &= 3u_1^2\beta_4 \sum i P^{(i)} G^{(-i)} \sin (ig + i'g' + 2\omega') \\
 &\quad + u_1^2\beta_4 \sum P^{\pm 1, i} G^{(-i)} \sin (\pm\gamma + ig + i'g' + 2\omega') \\
 T_5 &= 3u_1^2\beta_5 \sum i Q^{(i)} G^{(-i)} \sin (ig + i'g' + 2\omega + 2\omega') \\
 &\quad + u_1^2\beta_5 \sum Q^{\pm 1, i} G^{(-i)} \sin (\pm\gamma + ig + i'g' + 2\omega + 2\omega') \\
 T_6 &= 3\lambda\mu u_1^2\beta_6 \sum i A^{(i)} C^{(i)} \sin (ig + i'g' + \omega - \omega') \\
 &\quad + \lambda\mu u_1^2\beta_6 \sum A^{\pm 1, i} C^{(i)} \sin (\pm\gamma + ig + i'g' + \omega - \omega') \\
 T_7 &= 3\lambda\mu u_1^2\beta_7 \sum i B^{(i)} D^{(i)} \sin (ig + i'g' + 3\omega - 3\omega') \\
 &\quad + \lambda\mu u_1^2\beta_7 \sum B^{\pm 1, i} D^{(i)} \sin (\pm\gamma + ig + i'g' + 3\omega - 3\omega') \\
 T_8 &= 3\lambda\mu u_1^2\beta_8 \sum i A^{(i)} C^{(-i)} \sin (ig + i'g' + \omega + \omega') \\
 &\quad + \lambda\mu u_1^2\beta_8 \sum A^{\pm 1, i} C^{(-i)} \sin (\pm\gamma + ig + i'g' + \omega + \omega') \\
 T_9 &= 3\lambda\mu u_1^2\beta_9 \sum i B^{(i)} C^{(i)} \sin (ig + i'g' + 3\omega - \omega') \\
 &\quad + \lambda\mu u_1^2\beta_9 \sum B^{\pm 1, i} C^{(i)} \sin (\pm\gamma + ig + i'g' + 3\omega - \omega') \\
 T_{10} &= 3\lambda\mu u_1^2\beta_{10} \sum i A^{(i)} D^{(i)} \sin (ig + i'g' + \omega - 3\omega') \\
 &\quad + \lambda\mu u_1^2\beta_{10} \sum A^{\pm 1, i} D^{(i)} \sin (\pm\gamma + ig + i'g' + \omega - 3\omega')
 \end{aligned}$$

und aus dem Vorhergehenden erhellet leicht, dass

$$\begin{aligned}
 P^{\pm 1, i} &= -\frac{i}{e} P^{(i)} f \pm \frac{dP^{(i)}}{de} f' \\
 Q^{\pm 1, i} &= \left\{ -\frac{i}{e} + \frac{2}{e\sqrt{1-e^2}} \right\} Q^{(i)} f \pm \frac{dQ^{(i)}}{de} f' \\
 A^{\pm 1, i} &= \left\{ -\frac{i}{e} + \frac{4}{e\sqrt{1-e^2}} \right\} A^{(i)} f \pm \frac{dA^{(i)}}{de} f' \\
 B^{\pm 1, i} &= \left\{ -\frac{i}{e} + \frac{8}{e\sqrt{1-e^2}} \right\} B^{(i)} f \pm \frac{dB^{(i)}}{de} f'
 \end{aligned}$$

27.

Die Entwicklung der vorstehenden Functionen in Reihen ist sehr leicht zu bewerkstelligen, wenn man ausser den oben schon angegebenen Reihen noch die folgende

$$\frac{1}{e\sqrt{1-e^2}} = \frac{1}{e} + \frac{1}{2} e + \frac{3}{8} e^3 + \frac{5}{16} e^5 + \dots$$

zuzieht. Man erhält mit hinreichender Genauigkeit

$$\begin{aligned}
 P^{-1, 0} &= -3e + \frac{3}{8} e^3 - \frac{1}{64} e^5 \\
 P^{-1, 1} &= 2 - e^2 + \frac{5}{32} e^4 \\
 P^{-1, 2} &= e - \frac{3}{4} e^3 + \frac{13}{64} e^5 \\
 P^{-1, 3} &= \frac{3}{4} e^2 - \frac{3}{4} e^4 \\
 P^{-1, 4} &= \frac{2}{3} e^3 - \frac{5}{6} e^5 \\
 P^{-1, 5} &= \frac{125}{192} e^4 \\
 P^{-1, -1} &= 0 \\
 P^{-1, -2} &= -\frac{1}{24} e^3 + \frac{1}{96} e^5 \\
 P^{-1, -3} &= -\frac{3}{64} e^4
 \end{aligned}$$

und ausserdem

$$\underline{\underline{P^{1, i} = -P^{-1, -i}}}$$

Ferner

$$\begin{aligned}
 Q^{-1, -1} &= \frac{11}{64} e^4 \\
 Q^{1, -3} &= -\frac{17}{64} e^4 \\
 Q^{-1, 0} &= \frac{5}{4} e^2 + \frac{25}{24} e^5 \\
 Q^{1, -2} &= -\frac{1}{2} e^3 - \frac{1}{6} e^5
 \end{aligned}$$

$$Q^{-1,1} = -\frac{11}{2}e^2 + \frac{1}{8}e^4$$

$$Q^{1,-1} = -\frac{7}{4}e^2 - \frac{5}{8}e^4$$

$$Q^{-1,2} = 6e - \frac{17}{2}e^3 + \frac{35}{32}e^5$$

$$Q^{1,0} = 10e + \frac{85}{32}e^5$$

$$Q^{-1,3} = -2 + 11e^2 - \frac{448}{32}e^4$$

$$Q^{1,1} = -6 + 5e^2 - \frac{21}{32}e^4$$

$$Q^{-1,4} = -4e + 17e^3 - \frac{1068}{48}e^5$$

$$Q^{1,2} = -4e + \frac{17}{4}e^3 - \frac{59}{48}e^5$$

$$Q^{-1,5} = -\frac{25}{4}e^2 + 25e^4$$

$$Q^{1,3} = -\frac{7}{2}e^2 + \frac{11}{8}e^4$$

$$Q^{-1,6} = -9e^2 + 36e^5$$

$$Q^{1,4} = -\frac{7}{2}e^2 + \frac{45}{8}e^5$$

$$Q^{-1,7} = -\frac{2401}{192}e^4$$

$$Q^{1,5} = -\frac{725}{192}e^4$$

Ferner

$$A^{-1,0} = \frac{35}{8}e^2$$

$$A^{1,-2} = e^2$$

$$A^{-1,1} = -\frac{7}{2}e + \frac{17}{4}e^3$$

$$A^{1,-1} = \frac{11}{2}e + \frac{3}{16}e^3$$

$$A^{-1,2} = 1 - \frac{9}{2}e^2$$

$$A^{1,0} = -5 - \frac{15}{2}e^2$$

$$A^{-1,3} = \frac{3}{2}e - \frac{75}{16}e^3$$

$$A^{1,1} = \frac{9}{2}e - \frac{15}{8}e^3$$

$$A^{-1,4} = \frac{7}{4}e^2$$

$$A^{1,2} = \frac{13}{8}e^2$$



Ferner

$$\begin{aligned}
 B^{-1,1} &= \frac{61}{4} e^3 \\
 B^{1,-1} &= \frac{75}{16} e^3 \\
 \hline
 B^{-1,2} &= -\frac{177}{8} e^2 \\
 B^{1,0} &= -\frac{105}{4} e^2 \\
 \hline
 B^{-1,3} &= \frac{37}{2} e - \frac{375}{8} e^3 \\
 B^{1,1} &= \frac{57}{2} e - \frac{333}{16} e^3 \\
 \hline
 B^{-1,4} &= -3 + \frac{63}{2} e^2 \\
 B^{1,2} &= -9 + \frac{57}{2} e^2 \\
 \hline
 B^{-1,5} &= -\frac{15}{2} e + \frac{385}{16} e^3 \\
 B^{1,3} &= -\frac{21}{2} e + 30 e^3 \\
 \hline
 B^{-1,6} &= -\frac{27}{2} e^2 \\
 B^{1,4} &= -\frac{93}{8} e^2 \\
 \hline
 \hline
 \end{aligned}$$

womit man zur Berechnung von  $T_0$  vollständig ausreicht.

28.

Es ist noch der Theil von  $T_0$  zu entwickeln, welcher von  $\Omega^{(3)}$  abhängt und daher mit  $T_0^{(3)}$  bezeichnet werden soll. Bringen wir auch nach der Entwicklung diesen auf die Form

$$T_0^{(3)} = A \left( \frac{da\Omega^{(3)}}{dv} \right) + Br \left( \frac{da\Omega^{(3)}}{dr} \right)$$

so folgt aus den »*Fundamenta etc.*« mit dem hier ausreichenden Grade von Genauigkeit, dass

$$\begin{aligned}
 A &= -3 + 4 \cos(g - \gamma) - 6e \cos g - e \cos \gamma + 5e \cos(2g - \gamma) \\
 B &= 2 \sin(g - \gamma) - 3e \sin g + e \sin \gamma + 3e \sin(2g - \gamma)
 \end{aligned}$$

Da nun der Ausdruck von  $a\Omega^{(3)}$  des Art. 23

$$\begin{aligned}
 \left( \frac{da\Omega^{(3)}}{dv} \right) &= \frac{5}{2} \mu^2 u^2 e \sin(g - 2g' + 2\omega - 2\omega') - \frac{5}{8} \mu^2 u^2 \sin(2g - 2g' + 2\omega - 2\omega') \\
 &+ \frac{105}{8} \mu^2 u^2 e \sin(3g - 4g' + 4\omega - 4\omega') - \frac{35}{16} \mu^2 u^2 \sin(4g - 4g' + 4\omega - 4\omega') \\
 &- \frac{35}{8} \mu^2 u^2 e \sin(5g - 4g' + 4\omega - 4\omega')
 \end{aligned}$$

$$r \left( \frac{da\Omega^{(4)}}{dr} \right) = \frac{9}{16} \mu^2 u^2 - \frac{9}{4} \mu^2 u^2 e \cos g + \frac{45}{4} \mu^2 u^2 e' \cos g' - 5 \mu^2 u^2 e \cos (g - 2g' + 2\omega - 2\omega') \\ + \frac{5}{4} \mu^2 u^2 \cos (2g - 2g' + 2\omega - 2\omega') - \frac{105}{8} \mu^2 u^2 e \cos (3g - 4g' + 4\omega - 4\omega') \\ + \frac{35}{16} \mu^2 u^2 \cos (4g - 4g' + 4\omega - 4\omega') + \frac{35}{8} \mu^2 u^2 e \cos (5g - 4g' + 4\omega - 4\omega')$$

gibt, so bekommt man

$$T_0^{(8)} = -\frac{27}{16} \mu^2 u^2 e \sin g \\ + \frac{9}{8} \mu^2 u^2 \sin (-\gamma + g) - \frac{9}{16} \mu^2 u^2 e \sin (-\gamma + 2g) + \frac{45}{4} \mu^2 u^2 e' \sin (-\gamma + g - g') \\ + \frac{45}{16} \mu^2 u^2 e \sin \gamma - \frac{45}{4} \mu^2 u^2 e' \sin (\gamma - g - g') \\ - \frac{45}{4} \mu^2 u^2 e \sin (g - 2g' + 2\omega - 2\omega') + \frac{45}{8} \mu^2 u^2 \sin (2g - 2g' + 2\omega - 2\omega') \\ - \frac{5}{16} \mu^2 u^2 e \sin (-\gamma + 2g - 2g' + 2\omega - 2\omega') \\ + \frac{105}{16} \mu^2 u^2 e \sin (\gamma - 2g' + 2\omega - 2\omega') - \frac{5}{8} \mu^2 u^2 \sin (\gamma + g - 2g' + 2\omega - 2\omega') \\ - \frac{945}{32} \mu^2 u^2 e \sin (3g - 4g' + 4\omega - 4\omega') \\ + \frac{5}{16} \mu^2 u^2 e \sin (-\gamma + 4g - 2g' + 2\omega - 2\omega') + \frac{105}{8} \mu^2 u^2 e \sin (-\gamma + 4g - 4g' + 4\omega - 4\omega') \\ + \frac{45}{16} \mu^2 u^2 e \sin (\gamma + 2g - 2g' + 2\omega - 2\omega') + \frac{245}{8} \mu^2 u^2 e \sin (\gamma + 2g - 4g' + 4\omega - 4\omega') \\ + \frac{105}{16} \mu^2 u^2 \sin (4g - 4g' + 4\omega - 4\omega') + \frac{525}{32} \mu^2 u^2 e \sin (5g - 4g' + 4\omega - 4\omega') \\ - \frac{35}{16} \mu^2 u^2 \sin (-\gamma + 5g - 4g' + 4\omega - 4\omega') - \frac{105}{16} \mu^2 u^2 e \sin (-\gamma + 6g - 4g' + 4\omega - 4\omega') \\ - \frac{105}{16} \mu^2 u^2 \sin (\gamma + 3g - 4g' + 4\omega - 4\omega') - \frac{475}{16} \mu^2 u^2 e \sin (\gamma + 4g - 4g' + 4\omega - 4\omega')$$

die den oben entwickelten Gliedern von  $T_0$  hinzuzufügen sind.

## 29.

Im Vorhergehenden sind die Entwicklungen des Differentialis der Längenstörungen und der des Radius Vectors für die erste Potenz der störenden Kraft ausgeführt, und wir könnten daher jetzt schon zur Entwicklung der Differentiale, von welchen die Breitenstörungen abhängen, übergehen. Allein zur Berechnung der Störungen der zweiten und höheren Ordnungen wird die Entwicklung von noch einer Hilfsgrösse erfordert, die ich hier sogleich einschalten will, um eine spätere, sonst nothwendig werdende, Digression zu vermeiden. Diese Hilfsgrösse wird in den *Fundamenta etc.*  $U$  genannt und hat folgenden Ausdruck,

$$U = \frac{2e}{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}} [\cos (f-\varphi) - 1] \left( \frac{da\Omega}{dv} \right)$$

dessen Entwicklung auch dort gegeben ist. Statt dieser Hilfsgrösse kann man mit einigem Vortheil die folgende anwenden,

$$G_0 = \frac{3}{\sqrt{1-\epsilon^2}} \left\{ \frac{\rho}{r} \cos(f-\varphi) \left( \frac{da\Omega}{dv} \right) + \frac{\rho}{r} \sin(f-\varphi) r \left( \frac{da\Omega}{dr} \right) \right\}$$

deren Entwicklung ich auf dieselbe Form bringen werde, wie oben die von  $T_0$ .

30.

Theilen wir auch  $G_0$  in die zehn den Abtheilungen von  $\Omega$  entsprechenden Theile, so giebt zuerst der Umstand, dass für die Abtheilungen 1 und 4

$$\left( \frac{d\Omega}{d\omega} \right) = 0$$

ist, die Gleichungen

$$G_1 = T_1 \text{ und } G_4 = T_4$$

für alle übrigen Abtheilungen ist aber  $G$  von  $T$  verschieden. Der obige Ausdruck giebt zuerst durch eine leichte Umformung

$$G_0 = -3eA + \left( 2 \frac{\rho}{a} \cos \varphi + 3e \right) A + 2 \frac{\rho}{a} \sin \varphi B$$

wo

$$A = \frac{a \cos f}{r \sqrt{1-\epsilon^2}} \left( \frac{da\Omega}{d\omega} \right) + \frac{a \sin f}{r \sqrt{1-\epsilon^2}} r \left( \frac{da\Omega}{dr} \right)$$

$$B = \frac{a \sin f}{r \sqrt{1-\epsilon^2}} \left( \frac{da\Omega}{d\omega} \right) - \frac{a \cos f}{r \sqrt{1-\epsilon^2}} r \left( \frac{da\Omega}{dr} \right)$$

Wenden wir uns nun zuerst zur Abtheilung 2, so ist

$$a\Omega_2 = u_1^2 \beta_2 \left( \frac{r}{a} \right)^2 \left( \frac{a'}{r'} \right)^3 \cos(2f - 2f' + 2\omega - 2\omega')$$

also

$$\left( \frac{da\Omega_2}{d\omega} \right) = -2u_1^2 \beta_2 \left( \frac{r}{a} \right)^2 \left( \frac{a'}{r'} \right)^3 \sin(2f - 2f' + 2\omega - 2\omega')$$

$$r \left( \frac{da\Omega_2}{dr} \right) = 2u_1^2 \beta_2 \left( \frac{r}{a} \right)^2 \left( \frac{a'}{r'} \right)^3 \cos(2f - 2f' + 2\omega - 2\omega')$$

und hiemit wird

$$A_2 = -\frac{2u_1^2 \beta_2}{\sqrt{1-\epsilon^2}} \left( \frac{r}{a} \right) \left( \frac{a'}{r'} \right)^3 \sin(f - 2f' + 2\omega - 2\omega')$$

$$B_2 = -\frac{2u_1^2 \beta_2}{\sqrt{1-\epsilon^2}} \left( \frac{r}{a} \right) \left( \frac{a'}{r'} \right)^3 \cos(f - 2f' + 2\omega - 2\omega')$$

Setzen wir wie in den »Fundamenta etc.« pag. 160

$$\left( \frac{a'}{r'} \right)^3 \cos 2f' = \sum_{-\infty}^{+\infty} G_0^{(i')} \cos i'g'$$

$$\left( \frac{a'}{r'} \right)^3 \sin 2f' = \sum_{-\infty}^{+\infty} G_2^{(i')} \sin i'g'$$

$$G_2^{(-i')} = G_0^{(i')}, \quad G_0^{(-i')} = -G_2^{(i')}$$

so ergibt sich durch das a. a. O. erklärte Verfahren zuerst

$$A_2 = - \frac{2u_1^2 \beta_2}{\sqrt{1-e^2}} \sum_{-\infty}^{+\infty} G^{(i')} \frac{r}{a} \sin(f - i'g' + 2\omega - 2\omega')$$

$$B_2 = - \frac{2u_1^2 \beta_2}{\sqrt{1-e^2}} \sum_{-\infty}^{+\infty} G^{(i')} \frac{r}{a} \cos(f - i'g' + 2\omega - 2\omega')$$

wo

$$G^{(i')} = G_c^{(i')} - G_s^{(i')}$$

also dieselbe Function ist, die oben ebenso bezeichnet wurde. Setzen wir ferner

$$\frac{2r \cos f}{a \sqrt{1-e^2}} = \sum_{-\infty}^{+\infty} L_c^{(i)} \cos ig$$

$$\frac{2r \sin f}{a \sqrt{1-e^2}} = \sum_{-\infty}^{+\infty} L_s^{(i)} \sin ig$$

so bekommen wir auf dieselbe Art wie oben

$$A_2 = - u_1^2 \beta_2 \sum L^{(i)} G^{(i')} \sin(ig + i'g' + 2\omega - 2\omega')$$

$$B_2 = - u_1^2 \beta_2 \sum L^{(i)} G^{(i')} \cos(ig + i'g' + 2\omega - 2\omega')$$

wo

$$L^{(i)} = L_c^{(i)} + L_s^{(i)}$$

und die Summation sowohl nach  $i$  wie nach  $i'$  von  $-\infty$  bis  $+\infty$  auszudehnen ist. Substituirt man diese nebst

$$2 \frac{e}{a} \cos \varphi + 3e = 2f \cos \gamma$$

$$2 \frac{e}{a} \sin \varphi = 2f'' \sin \gamma$$

wo  $f$  derselbe Coefficient wie im Art. 25 und

$$f'' = f' \sqrt{1-e^2}$$

ist, so wird

$$G_2 = u_1^2 \beta_2 \sum U^{(i)} G^{(i')} \sin(ig + i'g' + 2\omega - 2\omega')$$

$$+ u_1^2 \beta_2 \sum U^{\pm 1, i} G^{(i')} \sin(\pm \gamma + ig + i'g' + 2\omega - 2\omega')$$

wo

$$U^{(i)} = 3eL^{(i)}$$

$$U^{-1, i} = -(f - f'')L^{(i)}$$

$$U^{1, i} = -(f + f'')L^{(i)}$$

### 31.

Da wohl nicht nöthig sein wird, die Entwicklungen der übrigen Abtheilungen von  $G_0$  speciell auseinander zu setzen, da sie eben so ausgeführt werden, wie die der Abtheilung 2, die eben gegeben wurde, so werde ich die Zusammenstellung hier gleich folgen lassen. Es wird

$$\begin{aligned}
 G_1 &= T_1 \\
 G_2 &= u_1^2 \beta_2 \sum U^{(i)} G^{(i)} \sin(ig + i'g' + 2\omega - 2\omega') \\
 &\quad + u_1^2 \beta_2 \sum U^{\pm 1, i} G^{(i)} \sin(\pm\gamma + ig + i'g' + 2\omega - 2\omega') \\
 G_3 &= u_1^2 \beta_3 \sum U^{(i)} K^{(i)} \sin(ig + i'g' + 2\omega) \\
 &\quad + u_1^2 \beta_3 \sum U^{\pm 1, i} K^{(i)} \sin(\pm\gamma + ig + i'g' + 2\omega) \\
 G_4 &= T_4 \\
 G_5 &= u_1^2 \beta_5 \sum U^{(i)} G^{(-i)} \sin(ig + i'g' + 2\omega + 2\omega') \\
 &\quad + u_1^2 \beta_5 \sum U^{\pm 1, i} G^{(-i)} \sin(\pm\gamma + ig + i'g' + 2\omega + 2\omega') \\
 G_6 &= \lambda \mu u_1^2 \beta_6 \sum V^{(i)} C^{(i)} \sin(ig + i'g' + \omega - \omega') \\
 &\quad + \lambda \mu u_1^2 \beta_6 \sum V^{\pm 1, i} C^{(i)} \sin(\pm\gamma + ig + i'g' + \omega - \omega') \\
 G_7 &= \lambda \mu u_1^2 \beta_7 \sum W^{(i)} D^{(i)} \sin(ig + i'g' + 3\omega - 3\omega') \\
 &\quad + \lambda \mu u_1^2 \beta_7 \sum W^{\pm 1, i} D^{(i)} \sin(\pm\gamma + ig + i'g' + 3\omega - 3\omega') \\
 G_8 &= \lambda \mu u_1^2 \beta_8 \sum V^{(i)} C^{(-i)} \sin(ig + i'g' + \omega + \omega') \\
 &\quad + \lambda \mu u_1^2 \beta_8 \sum V^{\pm 1, i} C^{(-i)} \sin(\pm\gamma + ig + i'g' + \omega + \omega') \\
 G_9 &= \lambda \mu u_1^2 \beta_9 \sum W^{(i)} C^{(i)} \sin(ig + i'g' + 3\omega - \omega') \\
 &\quad + \lambda \mu u_1^2 \beta_9 \sum W^{\pm 1, i} C^{(i)} \sin(\pm\gamma + ig + i'g' + 3\omega - \omega') \\
 G_{10} &= \lambda \mu u_1^2 \beta_{10} \sum V^{(i)} D^{(i)} \sin(ig + i'g' + \omega - 3\omega') \\
 &\quad + \lambda \mu u_1^2 \beta_{10} \sum V^{\pm 1, i} D^{(i)} \sin(\pm\gamma + ig + i'g' + \omega - 3\omega')
 \end{aligned}$$

und es haben die hier eingeführten Functionen von  $e$  die folgende Bedeutung

$$\begin{aligned}
 U^{(i)} &= 3eL^{(i)} \\
 U^{\pm 1, i} &= -(f \pm f'') L^{(i)} \\
 \sum_{-\infty}^{+\infty} L_c^{(i)} \cos ig &= \frac{2r \cos f}{a \sqrt{1-e^2}} \\
 \sum_{-\infty}^{+\infty} L_s^{(i)} \sin ig &= \frac{2r \sin f}{a \sqrt{1-e^2}} \\
 L^{(i)} &= L_c^{(i)} + L_s^{(i)} \\
 \hline
 V^{(i)} &= -3eH^{(i)} \\
 V^{\pm 1, i} &= H^{(i)} f \mp M^{(i)} f'' \\
 \sum_{-\infty}^{+\infty} H_c^{(i)} \cos ig &= \frac{r^2 \cos 2f}{a^2 \sqrt{1-e^2}} - \frac{3r^2}{a^2 \sqrt{1-e^2}} \\
 \sum_{-\infty}^{+\infty} H_s^{(i)} \sin ig &= \frac{r^2 \sin 2f}{a^2 \sqrt{1-e^2}} \\
 \sum_{-\infty}^{+\infty} M_c^{(i)} \cos ig &= \frac{r^2 \cos 2f}{a^2 \sqrt{1-e^2}} + \frac{3r^2}{a^2 \sqrt{1-e^2}} \\
 H^{(i)} &= H_c^{(i)} + H_s^{(i)} \\
 M^{(i)} &= M_c^{(i)} + H_s^{(i)} \\
 \hline
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W^{(i)} &= 3eK^{(i)} \\
 W^{\pm 1, i} &= -(f \pm f'') K^{(i)} \\
 \sum_{-\infty}^{+\infty} K_0^{(i)} \cos ig &= \frac{3r^2 \cos 2f}{a^2 \sqrt{1-e^2}} \\
 \sum_{-\infty}^{+\infty} K_1^{(i)} \sin ig &= \frac{3r^2 \sin 2f}{a^2 \sqrt{1-e^2}} \\
 K^{(i)} &= K_c^{(i)} + K_s^{(i)}
 \end{aligned}$$

32.

Durch das Verfahren, welches ich in den »*Fundamenta etc.*« ausführlich erklärt habe, reducirt man die hier erforderlichen Reihenentwickelungen auf die von  $r^2$ , und namentlich ist

$$\begin{aligned}
 \frac{2r \cos f}{a \sqrt{1-e^2}} &= -\frac{1}{a^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{d. r^2}{de} \\
 \frac{2r \sin f}{a \sqrt{1-e^2}} &= \frac{1}{a^2 e} \frac{d. r^2}{dg}
 \end{aligned}$$

woraus

$$\begin{aligned}
 L_c^{(0)} &= -3e - \frac{8}{3}e^3 - \frac{9}{8}e^5 \\
 L_c^{(1)} &= 1 + \frac{1}{8}e^2 + \frac{41}{192}e^4, & L_s^{(1)} &= 1 - \frac{1}{8}e^2 + \frac{1}{192}e^4 \\
 L_c^{(2)} &= \frac{1}{2}e - \frac{1}{12}e^3 + \frac{1}{12}e^5, & L_s^{(2)} &= \frac{1}{2}e - \frac{1}{6}e^3 + \frac{1}{48}e^5 \\
 L_c^{(3)} &= \frac{3}{8}e^2 - \frac{21}{128}e^4, & L_s^{(3)} &= \frac{3}{8}e^2 - \frac{27}{128}e^4 \\
 L_c^{(4)} &= \frac{1}{8}e^3 - \frac{7}{30}e^5, & L_s^{(4)} &= \frac{1}{8}e^3 - \frac{4}{15}e^5 \\
 L_c^{(5)} &= \frac{125}{884}e^4, & L_s^{(5)} &= \frac{125}{884}e^4 \\
 L_c^{(6)} &= \frac{27}{80}e^5, & L_s^{(6)} &= \frac{27}{80}e^5
 \end{aligned}$$

folgt, also

$$\begin{aligned}
 L^{(-2)} &= \frac{1}{12}e^3 + \frac{1}{16}e^5 \\
 L^{(-1)} &= \frac{1}{4}e^2 + \frac{5}{24}e^4 \\
 L^{(0)} &= -3e - \frac{8}{3}e^3 - \frac{9}{8}e^5 \\
 L^{(1)} &= 2 + \frac{7}{32}e^4 \\
 L^{(2)} &= e - \frac{1}{4}e^3 + \frac{5}{48}e^5 \\
 L^{(3)} &= \frac{3}{4}e^2 - \frac{3}{8}e^4 \\
 L^{(4)} &= \frac{2}{3}e^3 - \frac{1}{3}e^5 \\
 L^{(5)} &= \frac{125}{192}e^4 \\
 L^{(6)} &= \frac{27}{40}e^5
 \end{aligned}$$

Ferner, es ist in den »*Fundamenta etc.*« pag. 160 schon

$$\begin{aligned} \left(\frac{r}{a}\right)^2 \cos 2f &= \sum_{-\infty}^{+\infty} Q_e^{(i)} \cos ig \\ \left(\frac{r}{a}\right)^2 \sin 2f &= \sum_{-\infty}^{+\infty} Q_s^{(i)} \sin ig \\ \left(\frac{r}{a}\right)^2 &= \sum_{-\infty}^{+\infty} R_2^{(i)} \cos ig \end{aligned}$$

gesetzt worden, folglich wird

$$\begin{aligned} H^{(i)} &= \frac{Q^{(i)} - 2R_2^{(i)}}{\sqrt{1-e^2}} \\ M^{(i)} &= \frac{Q^{(i)} + 2R_2^{(i)}}{\sqrt{1-e^2}} \end{aligned}$$

da  $Q^{(i)} = Q_e^{(i)} + Q_s^{(i)}$  ist, und endlich erhalten wir

$$K^{(i)} = \frac{2Q^{(i)}}{\sqrt{1-e^2}}$$

Diese Ausdrücke geben

$$\begin{aligned} H^{(-2)} &= \frac{1}{2} e^2, & M^{(-2)} &= -\frac{1}{2} e^2 \\ H^{(-1)} &= 2e + \frac{11}{24} e^3, & M^{(-1)} &= -2e - \frac{25}{24} e^3 \\ H^{(0)} &= -2 - \frac{3}{2} e^2, & M^{(0)} &= 2 + \frac{13}{2} e^2 \\ H^{(1)} &= -e + \frac{7}{8} e^3, & M^{(1)} &= -5e - \frac{5}{8} e^3 \\ H^{(2)} &= 1 - \frac{3}{2} e^2, & M^{(2)} &= 1 - \frac{5}{2} e^2 \\ H^{(3)} &= e - \frac{13}{8} e^3, & M^{(3)} &= e - \frac{17}{8} e^3 \\ H^{(4)} &= e^2, & M^{(4)} &= e^2 \\ K^{(-1)} &= -\frac{7}{8} e^3 \\ K^{(0)} &= \frac{15}{2} e^2 \\ K^{(1)} &= -9e + \frac{3}{8} e^3 \\ K^{(2)} &= 3 - 6e^2 \\ K^{(3)} &= 3e - \frac{45}{8} e^3 \\ K^{(4)} &= 3e^2 \\ K^{(5)} &= \frac{25}{8} e^3 \end{aligned}$$

$$f = 1 - \frac{3}{8}e^2 + \frac{5}{192}e^4$$

$$f'' = 1 - \frac{5}{8}e^2 - \frac{11}{192}e^4$$

$$f - f'' = \frac{1}{4}e^2 + \frac{1}{12}e^4$$

$$f + f'' = 2 - e^2 - \frac{1}{32}e^4$$

ist, so bekommt man leicht,

$$U^{(-1)} = \frac{3}{4}e^3 + \frac{5}{8}e^5$$

$$U^{-1,0} = \frac{3}{4}e^3 + \frac{5}{8}e^5$$

$$U^{1,-2} = -\frac{1}{6}e^3 - \frac{1}{24}e^5$$

$$U^{(0)} = -9e^2 - \frac{9}{2}e^4$$

$$U^{-1,1} = -\frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{6}e^4$$

$$U^{1,-1} = -\frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{6}e^4$$

$$U^{(0)} = 6e + \frac{21}{32}e^5$$

$$U^{-1,2} = -\frac{1}{4}e^3 - \frac{1}{48}e^5$$

$$U^{1,0} = 6e + \frac{21}{32}e^5$$

$$U^{(2)} = 3e^2 - \frac{3}{4}e^4$$

$$U^{-1,3} = -\frac{3}{16}e^4$$

$$U^{1,1} = -4 + 2e^2 - \frac{3}{8}e^4$$

$$U^{(3)} = \frac{9}{4}e^3 - \frac{9}{8}e^5$$

$$U^{-1,4} = -\frac{1}{6}e^5$$

$$U^{1,2} = -2e + \frac{3}{2}e^3 - \frac{11}{96}e^5$$

$$U^{(4)} = 2e^4$$

$$U^{-1,5} = 0e^4$$

$$U^{1,3} = -\frac{3}{2}e^2 + \frac{3}{2}e^4$$

$$U^{(5)} = \frac{125}{64}e^5$$

$$U^{-1,6} = 0e^5$$

$$U^{1,4} = -\frac{1}{3}e^3 + \frac{5}{8}e^5$$



$V^{(-1)} = -6e^2$	$W^{(0)} = \frac{45}{2}e^3$
$V^{-1,0} = \frac{9}{2}e^2$	$W^{-1,1} = \frac{9}{4}e^3$
$V^{1,-2} = e^2$	$W^{1,-1} = \frac{7}{4}e^3$
<hr/>	<hr/>
$V^{(0)} = 6e + \frac{9}{2}e^3$	$W^{(1)} = -27e^2$
$V^{-1,1} = -6e + \frac{15}{4}e^3$	$W^{-1,2} = -\frac{3}{4}e^2$
$V^{1,-1} = 4e - \frac{1}{2}e^3$	$W^{1,0} = -15e^2$
<hr/>	<hr/>
$V^{(1)} = 3e^2$	$W^{(2)} = 9e - 18e^3$
$V^{-1,2} = 2 - 5e^2$	$W^{-1,3} = -\frac{3}{4}e^3$
$V^{1,0} = -\frac{1}{4} - 6e^2$	$W^{1,1} = 18e - \frac{89}{4}e^3$
<hr/>	<hr/>
$V^{(2)} = -3e + \frac{9}{2}e^3$	$W^{(3)} = 9e^2$
$V^{-1,3} = 2e - \frac{19}{4}e^3$	$W^{-1,4} = 0e^2$
$V^{1,1} = 4e - \frac{5}{4}e^3$	$W^{1,2} = -6 + 15e^2$
<hr/>	<hr/>
$V^{(3)} = -3e^2$	$W^{(4)} = 9e^3$
$V^{-1,4} = 2e^2$	$W^{-1,5} = 0e^3$
$V^{1,2} = \frac{5}{4}e^2$	$W^{1,3} = -6e + \frac{57}{4}e^3$
<hr/>	<hr/>
	$W^{(5)} = 0e^2$
	$W^{-1,6} = 0e^2$
	$W^{1,4} = -6e^2$

die für die Berechnung der Mondstörungen mehr wie hinreichend ausgedehnt sind.

34.

Bei der noch auszuführenden Entwicklung von  $G^{(3)}$  dürfen wir uns auf die von den Excentricitäten unabhängigen Glieder beschränken, und hiemit ergibt sich leicht, dass

$$G_0^{(3)} = 2 \cos(g-\gamma) \left( \frac{da\Omega^{(3)}}{dv} \right) + 2 \sin(g-\gamma) r \left( \frac{da\Omega^{(3)}}{dr} \right)$$

wird. Durch Zuziehung der im Art. 28 entwickelten Differentialquotienten von  $a\Omega^{(3)}$  findet man daher sogleich

$$\begin{aligned} G_0^{(3)} = & \frac{9}{8} \mu^2 u^2 \sin(-\gamma+g) + \frac{5}{8} \mu^2 u^2 \sin(-\gamma+3g-2g'+2\omega-2\omega') \\ & - \frac{15}{8} \mu^2 u^2 \sin(\gamma+g-2g'+2\omega-2\omega') \\ & - \frac{35}{8} \mu^2 u^2 \sin(\gamma+3g-4g'+4\omega-4\omega') \end{aligned}$$

## 35.

Dass in den vorhergehenden Entwicklungen von  $T_0$  und  $G_0$  von den beiden Functionen

$$2 \frac{e}{a} \cos \varphi + 3e \quad \text{und} \quad 2 \frac{e}{a} \sin \varphi$$

nur die mit  $\cos \gamma$  und bez.  $\sin \gamma$  multiplicirten Glieder gebraucht werden, hat seinen Grund in einem Satze, den ich zuerst in den »Untersuchungen über die gegenseitigen Störungen des Jupiters und Saturns« bewiesen und später in den »*Fundamenta etc.*« wiederholt habe, weil in einigen inzwischen über meine Theorie erschienenen Aufsätzen desselben entweder gar nicht, oder doch nur auf höchst mangelhafte Weise erwähnt worden war, während er einen sehr wesentlichen Bestandtheil dieser Theorie bildet, indem er die Berechnung der Störungen auf sehr bedeutende Weise abkürzt, und nicht bloß für die erste Potenz der störenden Kraft, sondern ganz allgemein gilt. Dieser Satz kann so gestellt werden:

»Wenn  $L, G, H$  Functionen von bloß  $t$  bedeuten, und  $\Gamma$  eine »Function von folgender Form ist,

$$\Gamma = L + G \rho \cos \varphi + H \rho \sin \varphi$$

»die sich in eine convergirende Reihe von der folgenden Form entwickeln lässt,

$$\Gamma = \sum_{x=-\infty}^{x=+\infty} \alpha^{(x)} \frac{\cos}{\sin} (x\gamma + \beta t + \beta')$$

»wo  $x$  eine ganze Zahl ist, aber  $\beta$  und  $\beta'$  die mannigfaltigsten Werthe »annehmen können, so ist

»für positive Werthe von  $x$

$$\alpha^{(x)} = \eta^{(x)} \cdot \alpha^{(1)} + \theta^{(x)} \cdot \alpha^{(-1)}$$

»und für negative Werthe von  $x$

$$\alpha^{(-x)} = \eta^{(x)} \cdot \alpha^{(-1)} + \theta^{(x)} \cdot \alpha^{(1)}$$

»wenn

$$\eta^{(x)} = \frac{\frac{dR_2^{(x)}}{ds}}{\frac{dR_2^{(1)}}{ds}} + x \frac{R_2^{(x)}}{2R_2^{(1)}}$$

$$\theta^{(x)} = \frac{\frac{dR_2^{(x)}}{ds}}{\frac{dR_2^{(1)}}{ds}} - x \frac{R_2^{(x)}}{2R_2^{(1)}}$$

»gesetzt wird, wo  $x$  immer positiv angenommen werden muss, und  
 » $R_2^{(x)}$  die Entwicklungscoefficienten von  $\left(\frac{r}{a}\right)^2$  sind, so dass

$$\left(\frac{r}{a}\right)^2 = R_2^{(0)} + 2R_2^{(1)} \cos g + 2R_2^{(2)} \cos 2g + \text{etc.}$$

»wird.«

Aus den in den »*Fundamenta etc.*« gegebenen Werthen von  $R_2^{(x)}$  findet man durch die obigen Ausdrücke,

$$\eta^{(2)} = \frac{1}{8} e - \frac{1}{8} e^3 + 0 e^5 + \dots$$

$$\eta^{(3)} = \frac{3}{8} e^2 - \frac{3}{16} e^4 + \frac{3}{128} e^6 + \dots$$

$$\eta^{(4)} = \frac{1}{8} e^3 - \frac{1}{4} e^5 + \dots$$

$$\eta^{(5)} = \frac{135}{884} e^4 - \frac{135}{884} e^6 + \dots$$

$$\eta^{(6)} = \frac{27}{80} e^5 + \dots$$

$$\eta^{(7)} = \frac{46807}{46080} e^6 + \dots$$

$$\theta^{(3)} = -\frac{1}{48} e^3 - \frac{1}{192} e^5 + \dots$$

$$\theta^{(4)} = -\frac{3}{128} e^4 - \frac{1}{640} e^6 + \dots$$

$$\theta^{(5)} = -\frac{1}{40} e^5 + \dots$$

$$\theta^{(6)} = -\frac{125}{4608} e^6 + \dots$$

Da die beiden hier vorkommenden Functionen von  $\gamma$  und  $g$ , nemlich  $T_0$  und  $G_0$  von derselben Form sind, wie die oben allgemein mit  $T$  bezeichnete Function, so findet der vorstehende Satz darauf Anwendung, und es brauchten daher vorläufig nur die Glieder berücksichtigt zu werden, in welchen  $\gamma$  mit  $\pm 1$  multiplicirt ist. Hiemit gütigte es, alle Entwicklungen auszuführen und erst am Schlusse derselben, oder mit andern Worten zugleich mit der Integration der Differentialgleichung für  $dW_0$ , in welcher sie eintreten, braucht man auf die Glieder Rücksicht zu nehmen, die  $\pm 2\gamma$ ,  $\pm 3\gamma$ , etc. enthalten, und man erhält diese Glieder auf höchst einfache Weise durch den vorstehenden Satz, d. i. durch die Multiplication der zu  $\pm \gamma$  gehörigen Glieder mit den obigen  $\eta$  und  $\theta$  genannten Factoren, von welchen die  $\theta$  überdiess so klein sind, dass sie fast gar nicht in Betracht kommen.

Wir kommen jetzt zur Entwicklung der Functionen, von welchen die Breitenstörungen abhängen. Setzt man

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dt} &= -n_0 \alpha Q + n_0 B \\ &\quad + \frac{dp'}{\cos i' dt} \cos \frac{1}{2} J \cos [\pi' - N_0 + K - n_0(\alpha + \eta) t] \\ &\quad - \frac{dq'}{\cos i' dt} \cos \frac{1}{2} J \sin [\pi' - N_0 + K - n_0(\alpha + \eta) t] \\ \frac{dQ}{dt} &= n_0 \alpha P + n_0 C \\ &\quad - \frac{dp'}{\cos i' dt} \cos \frac{1}{2} J \sin [\pi' - N_0 + K - n_0(\alpha + \eta) t] \\ &\quad - \frac{dq'}{\cos i' dt} \cos \frac{1}{2} J \cos [\pi' - N_0 + K - n_0(\alpha + \eta) t] \\ \frac{dK}{dt} &= n_0 \eta + n_0 D \\ &\quad + \frac{1}{2} \left\{ \frac{Qdp'}{\cos i' dt} + \frac{Pdq'}{\cos i' dt} \right\} \sec \frac{1}{2} J \cos [\pi' - N_0 + K - n_0(\alpha + \eta) t] \\ &\quad + \frac{1}{2} \left\{ \frac{Pdp'}{\cos i' dt} - \frac{Qdq'}{\cos i' dt} \right\} \sec \frac{1}{2} J \sin [\pi' - N_0 + K - n_0(\alpha + \eta) t] \end{aligned}$$

dann ist zufolge des Art. 13

$$\begin{aligned} n_0 B &= -h \left\{ \left( \frac{d\Omega}{dQ} \right) \cos^2 \frac{1}{2} J + \frac{1}{2} P \left( \frac{d\Omega}{dK} \right) \right\} \\ n_0 C &= h \left\{ \left( \frac{d\Omega}{dP} \right) \cos^2 \frac{1}{2} J - \frac{1}{2} Q \left( \frac{d\Omega}{dK} \right) \right\} \\ n_0 D &= \frac{1}{2} h \left\{ P \left( \frac{d\Omega}{dP} \right) + Q \left( \frac{d\Omega}{dQ} \right) \right\} \end{aligned}$$

Da nach den Entwicklungen allenthalben für  $P$ ,  $Q$ ,  $K$  die Werthe gesetzt werden müssen, die sie mit Ausschluss der in ihnen enthaltenen Störungen annehmen, so ergibt sich aus den Gleichungen (11), dass nach den Entwicklungen

$$P = 0; \quad Q = 2 \sin \frac{1}{2} J_0; \quad K = K_0$$

gesetzt werden muss. Für  $J_0$  und  $K_0$  werde ich jedoch in der Folge an den Orten, wo keine Unbestimmtheit daraus entstehen kann, der Kürze wegen blos  $J$  und  $K$  schreiben. Berücksichtigen wir nun fernerst in den vorstehenden Ausdrücken nur die erste Potenz der störenden Kraft der Sonne, so wird, wenn wir den übrigen Bezeichnungen analog auch die Bezeichnungen  $B_0$ ,  $C_0$ ,  $D_0$  einführen,

$$\begin{aligned} B_0 &= -\frac{1}{\sqrt{1-e^2}} \left( \frac{da\Omega}{dQ} \right) \cos^2 \frac{1}{2} J \\ D_0 &= \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} \left( \frac{da\Omega}{dQ} \right) \frac{\sin \frac{1}{2} J}{2} \end{aligned}$$

Hieraus geht hervor, dass mit Ausnahme der von  $dp'$  und  $dq'$  abhängigen Glieder, die übrigens in  $K$  wenig oder nichts hervorbringen,

$$\delta K = - \frac{\sin \frac{1}{2} J}{2 \cos^2 \frac{1}{2} J} \delta P$$

ist, wenn wir mit  $\delta K$  und  $\delta P$  die in  $K$  und  $P$  enthaltenen Störungen bezeichnen. Wir werden weiter unten sehen, dass diese Relation mit sehr unbedeutender Abweichung auch für das Quadrat und die höheren Potenzen der störenden Kraft statt findet, und können sie daher ohne Schaden der Genauigkeit in den nachfolgenden Entwicklungen anwenden. Die Relation zwischen den Grössen  $\alpha$  und  $\eta$  ist anders. Bezeichnen wir das constante Glied in der Entwicklung von  $\left(\frac{da\Omega}{dQ}\right)$  mit  $A$ , so wird in Folge der vorstehenden Gleichungen

$$2\alpha \sin \frac{1}{2} J + \frac{A \cos^2 \frac{1}{2} J}{\sqrt{1-e^2}} = 0$$

$$\eta + \frac{A \sin \frac{1}{2} J}{2 \sqrt{1-e^2}} = 0$$

woraus

$$\eta = \alpha \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} J$$

hervorgeht. Diese Relation bekommt übrigens durch die Betrachtung des Quadrats und der höheren Potenzen der störenden Kraft einen nicht unwesentlichen Zusatz.

### 37.

Die in  $p'$  und  $q'$  enthaltenen planetarischen Störungen der Sonnenbewegung werden zwar in dieser Abhandlung nicht berücksichtigt werden, aber die in denselben mit enthaltenen Ungleichheiten, die der Mond in der Sonnenbewegung verursacht, müssen in Betracht gezogen werden, da sie nicht unmerklich sind, und Glieder von derselben Form geben, wie die in  $B$ ,  $C$  und  $D$  enthaltenen. Um die genannten Glieder zu erhalten, müssen wir  $dp'$  und  $dq'$  unmittelbar durch die störende Kraft ausdrücken, und dies geschieht am Einfachsten dadurch, dass wir in den Gleichungen (13), die  $dp$  und  $dq$  geben, alle auf den Mond sich beziehenden Grössen auf die Sonne, und umgekehrt, übertragen. Hiebei ist zu bemerken, dass wir statt der Bögen  $\varphi$  und  $\psi$  zwei analoge  $\varphi'$  und  $\psi'$  uns denken müssen, die sich eben so auf die Mond- und die Sonnenbahn beziehen, wie jene auf die Sonnen- und die Mondbahn. Aus der Bedeutung von  $\varphi$  und  $\psi$  ist nun leicht zu erkennen, dass die Relationen

$$\varphi - \psi' = 180^\circ; \quad \psi - \varphi' = 180^\circ$$

statt finden, von welchen hier jedoch nur die erstere gebraucht wird. Die Gleichungen (43) geben auf diese Weise

$$\begin{aligned}\frac{dp'}{dt} &= \frac{m}{1+m} h' \cos i' \sin J \left\{ \frac{1}{\mathcal{A}^2} - \frac{1}{r^2} \right\} r r' \sin v' \sin (v - \varphi) \\ \frac{dq'}{dt} &= \frac{m}{1+m} h' \cos i' \sin J \left\{ \frac{1}{\mathcal{A}^2} - \frac{1}{r^2} \right\} r r' \cos v' \sin (v - \varphi)\end{aligned}$$

Da nahe  $\frac{r^2}{\mathcal{A}^2} = \frac{1}{(400)^2}$  ist, so dürfen wir in diesen Gleichungen  $\mathcal{A}$  übergehen. Es muss ferner der sicheren numerischen Berechnung wegen die grosse Sonnenmasse  $m'$  eliminirt werden, und dieses geschieht durch die Gleichung

$$1 + m' = \frac{a'^2 n'^2}{a^2 n^2} (1 + m)$$

Endlich müssen auch

$$\begin{aligned}v' &= \bar{f}' + n y' t + \pi' \\ v - \varphi &= \bar{f} + n (y + \alpha - \eta) t + N + K \\ u &= \frac{n'}{n}\end{aligned}$$

berücksichtigt werden. Nach diesen Substitutionen erhalten wir

$$\begin{aligned}\frac{dp'}{\cos i' dt} &= -\frac{1}{2} n \frac{m}{1+m} \frac{a^2 r'}{a'^2 r^2 u} \frac{\sin J}{\sqrt{1-e'^2}} \left\{ \begin{array}{l} \cos (\bar{f} - \bar{f}' + n(y - y' + \alpha - \eta)t + N + K - \pi) \\ - \cos (\bar{f} + \bar{f}' + n(y + y' + \alpha - \eta)t + N + K + \pi) \end{array} \right\} \\ \frac{dq'}{\cos i' dt} &= -\frac{1}{2} n \frac{m}{1+m} \frac{a^2 r'}{a'^2 r^2 u} \frac{\sin J}{\sqrt{1-e'^2}} \left\{ \begin{array}{l} \sin (\bar{f} - \bar{f}' + n(y - y' + \alpha - \eta)t + N + K - \pi) \\ + \sin (\bar{f} + \bar{f}' + n(y + y' + \alpha - \eta)t + N + K + \pi) \end{array} \right\}\end{aligned}$$

die mit den Gleichungen der »*Fundamenta etc.*« p. 498 übereinstimmen.

38.

Substituirt man nun die eben gefundenen Ausdrücke in die Ausdrücke des Art. 36 für  $dP$ ,  $dQ$ ,  $dK$ , so ergibt sich, wenn wir der Kürze wegen  $f$  und  $f'$  statt  $\bar{f}$  und  $\bar{f}'$  schreiben,

$$\begin{aligned}\frac{dP}{ndt} &= -\alpha Q - G \left( \frac{r'}{a'} \right) \left( \frac{a}{r} \right)^2 \sin \frac{1}{2} J \cos^2 \frac{1}{2} J \left\{ \begin{array}{l} \cos (f - f' + n(y - y' - 2\eta)t + \delta N + 2K) \\ - \cos (f + f' + n(y + y' + 2\alpha)t + \delta N + 2N_0) \end{array} \right\} \\ \frac{dQ}{ndt} &= \alpha P + G \left( \frac{r'}{a'} \right) \left( \frac{a}{r} \right)^2 \sin \frac{1}{2} J \cos^2 \frac{1}{2} J \left\{ \begin{array}{l} \sin (f - f' + n(y - y' - 2\eta)t + \delta N + 2K) \\ + \sin (f + f' + n(y + y' + 2\alpha)t + \delta N + 2N_0) \end{array} \right\} \\ \frac{dK}{ndt} &= \eta - \frac{1}{2} G \left( \frac{r'}{a'} \right) \left( \frac{a}{r} \right)^2 \sin^2 \frac{1}{2} J \left\{ \begin{array}{l} \cos (f - f' + n(y - y' - 2\eta)t + 2K) \\ - \cos (f + f' + n(y + y' + 2\alpha)t + 2N) \end{array} \right\}\end{aligned}$$

wo zur Abkürzung

$$G = \frac{m}{1+m} \frac{a}{a'} \frac{1}{u \sqrt{1-e'^2}}$$

gesetzt worden ist. Man erkennt sogleich, dass hier die Relation

$$\delta K = \frac{\sin \frac{1}{2} J}{2 \cos^2 \frac{1}{2} J} \delta P$$

statt findet, die sich von der oben gefundenen ähnlichen bloß durch das Vorzeichen unterscheidet.

Bei der ersten Anwendung, die von den eben entwickelten Gleichungen gemacht werden wird, kann man sich mit den Gliedern niedrigster Ordnung begnügen, und daher die Excentricitäten Null machen. Es wird somit

$$\frac{dP}{ndt} = -G \sin \frac{1}{2} J \cos^2 \frac{1}{2} J \{ \cos(g-g'+\omega-\omega') - \cos(g+g'+\omega+\omega') \}$$

$$\frac{dQ}{ndt} = G \sin \frac{1}{2} J \cos^2 \frac{1}{2} J \{ \sin(g-g'+\omega-\omega') + \sin(g+g'+\omega+\omega') \}$$

wo

$$G = \frac{m}{1+m} \frac{a}{a'} \frac{1}{u}$$

ist. Auf  $K$  braucht hier keine Rücksicht genommen zu werden.

Es scheint auf den ersten Anblick, dass hier noch zwei Glieder merklich werden können, die von der Excentricität der Mondbahn abhängen, weil sie bei den Integrationen kleine Divisoren bekommen, nemlich die Glieder, die

$$\frac{\sin}{\cos}(-g'+\omega-\omega') \quad \text{und} \quad \frac{\sin}{\cos}(g'+\omega+\omega')$$

zu den Argumenten haben, aber es zeigt sich leicht, dass die Coefficienten dieser Glieder Null sind.

Bei der Berechnung der Mondbreite über der Ecliptik müssen übrigens sowohl die eben entwickelten Glieder wie die von den Planetenmassen abhängigen periodischen Glieder in  $dp'$  und  $dq'$  weggelassen werden, und zwar aus folgendem Grunde. Unter der Ebene der gleichzeitigen Ecliptik, auf welche wir die Oerter der Planeten und Satelliten beziehen, verstehen wir nicht die Ebene, welche durch irgend zwei den Zeiten  $t$  und  $t+dt$  gehörige Radii Vectores der Sonne gelegt werden kann, sondern die Ebene, die von einer beliebigen festen Ecliptik sich nur im Laufe der Zeit vermöge der Säcularänderungen, welchen die Lage der Sonnenbahn im Raume unterworfen ist, allmählig entfernt. Es dürfen daher bei der Ermittlung der Mondbreite über der gleichzeitigen Ecliptik in  $\delta P$ ,  $\delta Q$ ,  $\delta K$  nur die Säcularänderungen der Lage der Sonnenbahn im Raume aufgenommen werden, und in § 2 ist gezeigt

worden, dass diese in der Mondbreite nicht wieder eine Säcularänderung, sondern eine periodische Ungleichheit hervorbringen.

Bei der Berechnung der in  $\delta P$ ,  $\delta Q$ ,  $\delta K$  enthaltenen Glieder zweiter und höherer Ordnung in Bezug auf die störende Kraft müssen hingegen die im Vorstehenden entwickelten Glieder mit berücksichtigt werden. Sie liefern, wie man weiter unten sehen wird, einen nicht unmerklichen Beitrag zur Bewegung der Mondknoten.

## 39.

Wir kommen jetzt zur Entwicklung der im Art. 36 mit  $B$  und  $C$  bezeichneten Grössen, die auf verschiedene Arten ausgeführt werden kann. Um diese Entwicklung so einzurichten, dass sie zugleich zur Berechnung der vom Quadrat und den höheren Potenzen der störenden Kraft abhängigen Glieder dienen kann, ist es am Zweckmässigsten  $B$  und  $C$  gradezu in Functionen von  $P$  und  $Q$  zu verwandeln, und zu diesem Zweck müssen wir zuvörderst  $\Omega$  als Function dieser Grössen darstellen. Zu diesem Ende haben wir einestheils die Factoren von  $a\Omega_1$ ,  $a\Omega_2$ ,  $a\Omega_3$ , etc. zu betrachten, die Functionen von  $J$  sind, und in den Art. 21 und 22 mit  $\beta_1$ ,  $\beta_2$ , etc. bezeichnet wurden, und andern Theils die Functionen von  $N$  und  $K$ , die in den Argumenten vorkommen und in  $\omega$  und  $\omega'$  enthalten sind. Wir müssen daher für jetzt die durch die Gleichungen (14) gegebenen Ausdrücke dieser Grössen substituiren, und dabei  $N$  und  $K$  statt  $N_0$  und  $K_0$  schreiben, wobei wir indess von den mit der Zeit ausdrücklich multiplicirten Gliedern absehen können, da diese von den vorzunehmenden Differentiationen unberührt bleiben. Für die Substitutionen, die auszuführen sind, geben die Gleichungen (11)

$$\begin{aligned} \sin^2 \frac{1}{2} J &= \frac{1}{4} P^2 + \frac{1}{4} Q^2 \\ \sin^4 \frac{1}{2} J &= \frac{1}{16} P^4 - \frac{1}{8} P^2 Q^2 + \frac{1}{16} Q^4 \\ \sin^2 \frac{1}{2} J \sin 2(N - N_0) &= \frac{1}{4} P Q \\ \sin^2 \frac{1}{2} J \cos 2(N - N_0) &= \frac{1}{4} Q^2 - \frac{1}{4} P^2 \\ \sin^4 \frac{1}{2} J \sin 2(N - N_0) &= \frac{1}{8} P^3 Q + \frac{1}{8} P Q^3 \\ \sin^4 \frac{1}{2} J \cos 2(N - N_0) &= \frac{1}{16} Q^4 - \frac{1}{16} P^4 \\ \sin^4 \frac{1}{2} J \sin 4(N - N_0) &= \frac{1}{4} P Q^3 - \frac{1}{4} P^3 Q \\ \sin^4 \frac{1}{2} J \cos 4(N - N_0) &= \frac{1}{16} Q^4 - \frac{3}{8} P^2 Q^2 + \frac{1}{16} P^4 \end{aligned}$$

Substituiren wir nun diese in die Ausdrücke für  $a\Omega_1$ ,  $a\Omega_2$ , etc. des



Art. 24 und in die für  $a\Omega_5$ ,  $a\Omega_6$ , etc. des Art. 22 und schreiben zur Abkürzung für die mit  $t$  multiplicirten Glieder, die wir hier nicht näher kennen zu lernen brauchen,  $n\alpha_2 t$ ,  $n\alpha_3 t$ , etc., so erhalten wir

$$\begin{aligned}
 a\Omega_1 &= u_1^2 \left\{ \frac{1}{4} - \frac{3}{8} P^2 - \frac{3}{8} Q^2 \right. \\
 &\quad \left. + \frac{3}{8} P^4 + \frac{3}{8} P^2 Q^2 + \frac{3}{8} Q^4 \right\} \Sigma P^{(6)} K^{(6)} \cos(ig + i'g') \\
 a\Omega_2 &= u_1^2 \left\{ \frac{1}{4} - \frac{3}{8} P^2 - \frac{3}{8} Q^2 \right. \\
 &\quad \left. + \frac{3}{8} P^4 + \frac{3}{8} P^2 Q^2 + \frac{3}{8} Q^4 \right\} \Sigma Q^{(6)} G^{(6)} \cos(ig + i'g' + n\alpha_2 t + 4K) \\
 a\Omega_3 &= u_1^2 \left\{ \frac{3}{8} Q^2 - \frac{3}{8} P^2 - \frac{3}{8} Q^4 + \frac{3}{8} P^4 \right\} \Sigma Q^{(6)} K^{(6)} \cos(ig + i'g' + n\alpha_3 t + 2N_0 + 2K) \\
 &\quad - u_1^2 \left\{ \frac{3}{8} PQ - \frac{3}{8} P^3 Q - \frac{3}{8} P Q^3 \right\} \Sigma Q^{(6)} K^{(6)} \sin(ig + i'g' + n\alpha_3 t + 2N_0 + 2K) \\
 a\Omega_4 &= u_1^2 \left\{ \frac{3}{8} Q^2 - \frac{3}{8} P^2 - \frac{3}{8} Q^4 + \frac{3}{8} P^4 \right\} \Sigma P^{(6)} G^{(6)} \cos(ig + i'g' + n\alpha_4 t + 2N_0 - 2K) \\
 &\quad - u_1^2 \left\{ \frac{3}{8} PQ - \frac{3}{8} P^3 Q - \frac{3}{8} P Q^3 \right\} \Sigma P^{(6)} G^{(6)} \sin(ig + i'g' + n\alpha_4 t + 2N_0 - 2K) \\
 a\Omega_5 &= u_1^2 \left\{ \frac{3}{8} Q^4 - \frac{3}{8} P^2 Q^2 + \frac{3}{8} P^4 \right\} \Sigma Q^{(6)} G^{(6)} \cos(ig + i'g' + n\alpha_5 t + 4N_0) \\
 &\quad - u_1^2 \left\{ \frac{3}{8} P Q^3 - \frac{3}{8} P^3 Q \right\} \Sigma Q^{(6)} G^{(6)} \sin(ig + i'g' + n\alpha_5 t + 4N_0) \\
 a\Omega_6 &= \lambda \mu u_1^2 \left\{ \frac{3}{8} - \frac{3}{8} P^2 - \frac{3}{8} Q^2 \right. \\
 &\quad \left. + \frac{3}{8} P^4 + \frac{3}{8} P^2 Q^2 + \frac{3}{8} Q^4 \right\} \Sigma A^{(6)} C^{(6)} \cos(ig + i'g' + n\alpha_6 t + 2K) \\
 a\Omega_7 &= \lambda \mu u_1^2 \left\{ \frac{3}{8} - \frac{3}{8} P^2 - \frac{3}{8} Q^2 \right. \\
 &\quad \left. + \frac{3}{8} P^4 + \frac{3}{8} P^2 Q^2 + \frac{3}{8} Q^4 \right\} \Sigma B^{(6)} D^{(6)} \cos(ig + i'g' + n\alpha_7 t + 6K) \\
 a\Omega_8 &= \lambda \mu u_1^2 \left\{ \frac{3}{8} Q^2 - \frac{3}{8} P^2 - \frac{3}{8} Q^4 + \frac{3}{8} P^4 \right\} \Sigma A^{(6)} C^{(6)} \cos(ig + i'g' + n\alpha_8 t + 2N_0) \\
 &\quad - \lambda \mu u_1^2 \left\{ \frac{3}{8} PQ - \frac{3}{8} P^3 Q - \frac{3}{8} P Q^3 \right\} \Sigma A^{(6)} C^{(6)} \sin(ig + i'g' + n\alpha_8 t + 2N_0) \\
 a\Omega_9 &= \lambda \mu u_1^2 \left\{ \frac{3}{8} Q^2 - \frac{3}{8} P^2 - \frac{3}{8} Q^4 + \frac{3}{8} P^4 \right\} \Sigma B^{(6)} C^{(6)} \cos(ig + i'g' + n\alpha_9 t + 2N_0 + 4K) \\
 &\quad - \lambda \mu u_1^2 \left\{ \frac{3}{8} PQ - \frac{3}{8} P^3 Q - \frac{3}{8} P Q^3 \right\} \Sigma B^{(6)} C^{(6)} \sin(ig + i'g' + n\alpha_9 t + 2N_0 + 4K) \\
 a\Omega_{10} &= \lambda \mu u_1^2 \left\{ \frac{3}{8} Q^2 - \frac{3}{8} P^2 - \frac{3}{8} Q^4 + \frac{3}{8} P^4 \right\} \Sigma A^{(6)} D^{(6)} \cos(ig + i'g' + n\alpha_{10} t - 2N_0 + 4K) \\
 &\quad + \lambda \mu u_1^2 \left\{ \frac{3}{8} PQ - \frac{3}{8} P^3 Q - \frac{3}{8} P Q^3 \right\} \Sigma A^{(6)} D^{(6)} \sin(ig + i'g' + n\alpha_{10} t - 2N_0 + 4K)
 \end{aligned}$$

40.

Differentiiren wir nun diese Ausdrücke nach  $P$ ,  $Q$  und  $K$ , und substituiren die Differentialquotienten in die Ausdrücke für  $B$  und  $C$  des Art. 36, so bekommen wir

$$\begin{aligned}
 n_0 B_1 &= h u_1^2 \left\{ \frac{3}{8} Q - \frac{3}{8} P^2 Q - \frac{3}{8} Q^3 \right. \\
 &\quad \left. + \frac{3}{8} P^3 Q + \frac{3}{8} P^2 Q^3 + \frac{3}{8} Q^5 \right\} \Sigma P^{(6)} K^{(6)} \cos(ig + i'g') \\
 n_0 B_2 &= h u_1^2 \left\{ \frac{3}{8} Q - \frac{3}{8} P^2 Q - \frac{3}{8} Q^3 \right. \\
 &\quad \left. + \frac{3}{8} P^4 Q + \frac{3}{8} P^2 Q^3 + \frac{3}{8} Q^5 \right\} \Sigma Q^{(6)} G^{(6)} \cos(ig + i'g' + n\alpha_2 t + 4K) \\
 &\quad + h u_1^2 \left\{ \frac{3}{8} P - \frac{3}{8} P^3 - \frac{3}{8} P Q^2 \right. \\
 &\quad \left. + \frac{3}{8} P^5 + \frac{3}{8} P^3 Q^2 + \frac{3}{8} P Q^4 \right\} \Sigma Q^{(6)} G^{(6)} \sin(ig + i'g' + n\alpha_2 t + 4K)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
n_0 B_3 &= h\mu_1^2 \left\{ -\frac{1}{3}Q + \frac{1}{15}P^2Q + \frac{1}{15}Q^3 \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{32}P^4Q - \frac{1}{16}P^2Q^3 - \frac{1}{32}Q^5 \right\} \Sigma Q^{(6)} K^{(i)} \cos (ig + i'g' + n\alpha_3 t + 2N_0 + 2K) \\
&\quad + h\mu_1^2 \left\{ \frac{1}{4}P - \frac{1}{8}P^3 - \frac{1}{8}PQ^2 \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{32}P^5 + \frac{1}{16}P^3Q^2 + \frac{1}{32}PQ^4 \right\} \Sigma Q^{(6)} K^{(i)} \sin (ig + i'g' + n\alpha_3 t + 2N_0 + 2K) \\
n_0 B_4 &= h\mu_1^2 \left\{ -\frac{1}{3}Q - \frac{1}{15}P^2Q + \frac{1}{15}Q^3 \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{32}P^4Q - \frac{1}{32}Q^5 \right\} \Sigma P^{(6)} G^{(-i)} \cos (ig + i'g' + n\alpha_4 t + 2N_0 - 2K) \\
&\quad + h\mu_1^2 \left\{ \frac{1}{4}P - \frac{1}{8}P^3 - \frac{1}{8}PQ^2 \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{32}P^5 + \frac{1}{16}P^3Q^2 + \frac{1}{32}PQ^4 \right\} \Sigma P^{(6)} G^{(-i)} \sin (ig + i'g' + n\alpha_4 t + 2N_0 - 2K) \\
n_0 B_5 &= h\mu_1^2 \left\{ \frac{1}{15}P^2Q - \frac{1}{15}Q^3 \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{32}P^4Q - \frac{1}{16}P^2Q^3 + \frac{1}{32}Q^5 \right\} \Sigma Q^{(6)} G^{(-i)} \cos (ig + i'g' + n\alpha_5 t + 4N_0) \\
&\quad + h\mu_1^2 \left\{ -\frac{1}{8}P^3 + \frac{1}{8}PQ^2 \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{32}P^5 - \frac{1}{32}P^3Q^2 - \frac{1}{32}PQ^4 \right\} \Sigma Q^{(6)} G^{(-i)} \sin (ig + i'g' + n\alpha_5 t + 4N_0) \\
n_0 B_6 &= h\lambda\mu_1^2 \left\{ \frac{1}{15}Q - \frac{1}{32}P^2Q - \frac{1}{32}Q^3 \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{128}P^4Q + \frac{1}{64}P^2Q^3 + \frac{1}{128}Q^5 \right\} \Sigma A^{(6)} C^{(i)} \cos (ig + i'g' + n\alpha_6 t + 2K) \\
&\quad + h\lambda\mu_1^2 \left\{ \frac{1}{8}P - \frac{1}{8}P^3 - \frac{1}{8}PQ^2 \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{32}P^5 + \frac{1}{16}P^3Q^2 + \frac{1}{32}PQ^4 \right\} \Sigma A^{(6)} C^{(i)} \sin (ig + i'g' + n\alpha_6 t + 2K) \\
n_0 B_7 &= h\lambda\mu_1^2 \left\{ \frac{1}{15}Q - \frac{1}{15}P^2Q - \frac{1}{15}Q^3 \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{32}P^4Q + \frac{1}{16}P^2Q^3 + \frac{1}{32}Q^5 \right\} \Sigma B^{(6)} D^{(i)} \cos (ig + i'g' + n\alpha_7 t + 6K) \\
&\quad + h\lambda\mu_1^2 \left\{ \frac{1}{8}P - \frac{1}{8}P^3 - \frac{1}{8}PQ^2 \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{32}P^5 + \frac{1}{16}P^3Q^2 + \frac{1}{32}PQ^4 \right\} \Sigma B^{(6)} D^{(i)} \sin (ig + i'g' + n\alpha_7 t + 6K) \\
n_0 B_8 &= h\lambda\mu_1^2 \left\{ -\frac{1}{3}Q + \frac{1}{15}P^2Q + \frac{1}{15}Q^3 \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{32}P^4Q - \frac{1}{16}P^2Q^3 - \frac{1}{32}Q^5 \right\} \Sigma A^{(6)} C^{(-i)} \cos (ig + i'g' + n\alpha_8 t + 2N_0) \\
&\quad + h\lambda\mu_1^2 \left\{ \frac{1}{8}P - \frac{1}{8}P^3 - \frac{1}{8}PQ^2 \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{32}P^5 + \frac{1}{16}P^3Q^2 + \frac{1}{32}PQ^4 \right\} \Sigma A^{(6)} C^{(-i)} \sin (ig + i'g' + n\alpha_8 t + 2N_0) \\
n_0 B_9 &= h\lambda\mu_1^2 \left\{ -\frac{1}{3}Q + \frac{1}{15}P^2Q + \frac{1}{15}Q^3 \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{32}P^4Q - \frac{1}{16}P^2Q^3 - \frac{1}{32}Q^5 \right\} \Sigma B^{(6)} C^{(i)} \cos (ig + i'g' + n\alpha_9 t + 2N_0 + 4K) \\
&\quad + h\lambda\mu_1^2 \left\{ \frac{1}{8}P - \frac{1}{8}P^3 - \frac{1}{8}PQ^2 \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{32}P^5 + \frac{1}{16}P^3Q^2 + \frac{1}{32}PQ^4 \right\} \Sigma B^{(6)} C^{(i)} \sin (ig + i'g' + n\alpha_9 t + 2N_0 + 4K) \\
n_0 B_{10} &= h\lambda\mu_1^2 \left\{ -\frac{1}{3}Q - \frac{1}{15}P^2Q + \frac{1}{15}Q^3 \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{32}P^4Q + \frac{1}{16}P^2Q^3 - \frac{1}{32}Q^5 \right\} \Sigma A^{(6)} D^{(i)} \cos (ig + i'g' + n\alpha_{10} t - 2N_0 + 4K) \\
&\quad + h\lambda\mu_1^2 \left\{ -\frac{1}{8}P + \frac{1}{8}P^3 + \frac{1}{8}PQ^2 \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{32}P^5 - \frac{1}{32}P^3Q^2 - \frac{1}{32}PQ^4 \right\} \Sigma A^{(6)} D^{(i)} \sin (ig + i'g' + n\alpha_{10} t - 2N_0 + 4K) \\
n_0 C_1 &= h\mu_1^2 \left\{ -\frac{1}{3}P + \frac{1}{15}P^3 + \frac{1}{15}PQ^2 \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{32}P^5 - \frac{1}{16}P^3Q^2 - \frac{1}{32}PQ^4 \right\} \Sigma P^{(6)} K^{(i)} \cos (ig + i'g')
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 n_0 C_2 &= h u_1^2 \left\{ -\frac{1}{4} P + \frac{3}{8} P^3 + \frac{1}{8} P Q^2 \right. \\
 &\quad \left. - \frac{3}{8} P^5 - \frac{3}{8} P^3 Q^2 - \frac{3}{8} P Q^4 \right\} \Sigma Q^{(i)} G^{(i')} \cos (i g + i' g' + n \alpha_2 t + 4 K) \\
 &+ h u_1^2 \left\{ \frac{1}{4} Q - \frac{3}{8} P^2 Q - \frac{1}{8} Q^3 \right. \\
 &\quad \left. + \frac{3}{8} P^4 Q + \frac{3}{8} P^2 Q^3 + \frac{3}{8} Q^5 \right\} \Sigma Q^{(i)} G^{(i')} \sin (i g + i' g' + n \alpha_2 t + 4 K) \\
 n_0 C_3 &= h u_1^2 \left\{ -\frac{1}{4} P + \frac{1}{8} P^3 + \frac{1}{8} P Q^2 \right. \\
 &\quad \left. - \frac{3}{8} P^5 - \frac{3}{8} P^3 Q^2 - \frac{3}{8} P Q^4 \right\} \Sigma Q^{(i)} K^{(i')} \cos (i g + i' g' + n \alpha_3 t + 2 N_0 + 2 K) \\
 &+ h u_1^2 \left\{ -\frac{1}{4} Q + \frac{1}{8} P^2 Q + \frac{1}{8} Q^3 \right. \\
 &\quad \left. - \frac{3}{8} P^4 Q - \frac{3}{8} P^2 Q^3 - \frac{3}{8} Q^5 \right\} \Sigma Q^{(i)} K^{(i')} \sin (i g + i' g' + n \alpha_3 t + 2 N_0 + 2 K) \\
 n_0 C_4 &= h u_1^2 \left\{ -\frac{1}{4} P + \frac{1}{8} P^3 - \frac{1}{8} P Q^2 \right. \\
 &\quad \left. - \frac{3}{8} P^5 + \frac{3}{8} P Q^4 \right\} \Sigma P^{(i)} G^{(-i')} \cos (i g + i' g' + n \alpha_4 t + 2 N_0 - 2 K) \\
 &+ h u_1^2 \left\{ -\frac{1}{4} Q + \frac{1}{8} P^2 Q + \frac{1}{8} Q^3 \right. \\
 &\quad \left. - \frac{3}{8} P^4 Q - \frac{3}{8} P^2 Q^3 \right\} \Sigma P^{(i)} G^{(-i')} \sin (i g + i' g' + n \alpha_4 t + 2 N_0 - 2 K) \\
 n_0 C_5 &= h u_1^2 \left\{ \frac{1}{8} P^3 - \frac{1}{8} P Q^2 \right. \\
 &\quad \left. - \frac{3}{8} P^5 + \frac{3}{8} P^3 Q^2 + \frac{3}{8} P Q^4 \right\} \Sigma Q^{(i)} G^{(-i')} \cos (i g + i' g' + n \alpha_5 t + 4 N_0) \\
 &+ h u_1^2 \left\{ \frac{1}{8} P^2 Q - \frac{1}{8} Q^3 \right. \\
 &\quad \left. - \frac{3}{8} P^4 Q - \frac{3}{8} P^2 Q^3 + \frac{3}{8} Q^5 \right\} \Sigma Q^{(i)} G^{(-i')} \sin (i g + i' g' + n \alpha_5 t + 4 N_0) \\
 n_0 C_6 &= h \lambda \mu u_1^2 \left\{ -\frac{1}{4} P + \frac{1}{8} P^3 + \frac{1}{8} P Q^2 \right. \\
 &\quad \left. - \frac{3}{8} P^5 - \frac{3}{8} P^3 Q^2 - \frac{3}{8} P Q^4 \right\} \Sigma A^{(i)} C^{(i')} \cos (i g + i' g' + n \alpha_6 t + 2 K) \\
 &+ h \lambda \mu u_1^2 \left\{ \frac{1}{4} Q - \frac{1}{8} P^2 Q - \frac{1}{8} Q^3 \right. \\
 &\quad \left. + \frac{3}{8} P^4 Q + \frac{3}{8} P^2 Q^3 + \frac{3}{8} Q^5 \right\} \Sigma A^{(i)} C^{(i')} \sin (i g + i' g' + n \alpha_6 t + 2 K) \\
 n_0 C_7 &= h \lambda \mu u_1^2 \left\{ -\frac{1}{4} P + \frac{1}{8} P^3 + \frac{1}{8} P Q^2 \right. \\
 &\quad \left. - \frac{3}{8} P^5 - \frac{3}{8} P^3 Q^2 - \frac{3}{8} P Q^4 \right\} \Sigma B^{(i)} D^{(i')} \cos (i g + i' g' + n \alpha_7 t + 6 K) \\
 &+ h \lambda \mu u_1^2 \left\{ \frac{1}{4} Q - \frac{1}{8} P^2 Q - \frac{1}{8} Q^3 \right. \\
 &\quad \left. + \frac{3}{8} P^4 Q + \frac{3}{8} P^2 Q^3 + \frac{3}{8} Q^5 \right\} \Sigma B^{(i)} D^{(i')} \sin (i g + i' g' + n \alpha_7 t + 6 K) \\
 n_0 C_8 &= h \lambda \mu u_1^2 \left\{ -\frac{1}{4} P + \frac{1}{8} P^3 + \frac{1}{8} P Q^2 \right. \\
 &\quad \left. - \frac{3}{8} P^5 - \frac{3}{8} P^3 Q^2 \right\} \Sigma A^{(i)} C^{(-i')} \cos (i g + i' g' + n \alpha_8 t + 2 N_0) \\
 &+ h \lambda \mu u_1^2 \left\{ -\frac{1}{4} Q + \frac{1}{8} P^2 Q + \frac{1}{8} Q^3 \right. \\
 &\quad \left. - \frac{3}{8} P^4 Q - \frac{3}{8} P^2 Q^3 - \frac{3}{8} Q^5 \right\} \Sigma A^{(i)} C^{(-i')} \sin (i g + i' g' + n \alpha_8 t + 2 N_0) \\
 n_0 C_9 &= h \lambda \mu u_1^2 \left\{ -\frac{1}{4} P + \frac{1}{8} P^3 + \frac{1}{8} P Q^2 \right. \\
 &\quad \left. - \frac{3}{8} P^5 - \frac{3}{8} P^3 Q^2 - \frac{3}{8} P Q^4 \right\} \Sigma B^{(i)} C^{(i')} \cos (i g + i' g' + n \alpha_9 t + 2 N_0 + 4 K) \\
 &+ h \lambda \mu u_1^2 \left\{ -\frac{1}{4} Q + \frac{1}{8} P^2 Q + \frac{1}{8} Q^3 \right. \\
 &\quad \left. - \frac{3}{8} P^4 Q - \frac{3}{8} P^2 Q^3 - \frac{3}{8} Q^5 \right\} \Sigma B^{(i)} C^{(i')} \sin (i g + i' g' + n \alpha_9 t + 2 N_0 + 4 K) \\
 n_0 C_{10} &= h \lambda \mu u_1^2 \left\{ -\frac{1}{4} P + \frac{1}{8} P^3 - \frac{1}{8} P Q^2 \right. \\
 &\quad \left. - \frac{3}{8} P^5 + \frac{3}{8} P^3 Q^2 + \frac{3}{8} P Q^4 \right\} \Sigma A^{(i)} D^{(i')} \cos (i g + i' g' + n \alpha_{10} t - 2 N_0 + 4 K) \\
 &+ h \lambda \mu u_1^2 \left\{ \frac{1}{4} Q - \frac{1}{8} P^2 Q - \frac{1}{8} Q^3 \right. \\
 &\quad \left. + \frac{3}{8} P^4 Q + \frac{3}{8} P^2 Q^3 - \frac{3}{8} Q^5 \right\} \Sigma A^{(i)} D^{(i')} \sin (i g + i' g' + n \alpha_{10} t - 2 N_0 + 4 K)
 \end{aligned}$$

Diese Ausdrücke sind allgemein gültig, und wenn man darin  $h_0$  statt  $h$ ,  $K_0$  statt  $K$ , so wie

$$P = 0; \quad Q = 2 \sin \frac{1}{2} J_0$$

setzt, so bekommt man die Ausdrücke für die erste Potenz der störenden Kraft.

## 41.

Für die erste Potenz der störenden Kraft wird also

$$\begin{aligned}
 B_1 &= \frac{u_1^2}{\sqrt{1-\sigma^2}} \left\{ \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sin^2 \frac{1}{2} J + 3 \sin^4 \frac{1}{2} J \right\} \sin \frac{1}{2} J \Sigma P^{(0)} K^{(i)} \cos (ig + i'g') \\
 B_2 &= \frac{u_1^2}{\sqrt{1-\sigma^2}} \left\{ \frac{1}{2} - 3 \sin^2 \frac{1}{2} J + \frac{3}{2} \sin^4 \frac{1}{2} J \right\} \sin \frac{1}{2} J \Sigma Q^{(0)} G^{(i)} \cos (ig + i'g' + 2\omega - 2\omega') \\
 B_3 &= \frac{u_1^2}{\sqrt{1-\sigma^2}} \left\{ -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sin^2 \frac{1}{2} J - 3 \sin^4 \frac{1}{2} J \right\} \sin \frac{1}{2} J \Sigma Q^{(0)} K^{(i)} \cos (ig + i'g' + 2\omega) \\
 B_4 &= \frac{u_1^2}{\sqrt{1-\sigma^2}} \left\{ -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sin^2 \frac{1}{2} J - 3 \sin^4 \frac{1}{2} J \right\} \sin \frac{1}{2} J \Sigma P^{(0)} G^{(-i)} \cos ig + i'g' + 2\omega' \\
 B_5 &= \frac{u_1^2}{\sqrt{1-\sigma^2}} \left\{ -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sin^2 \frac{1}{2} J \right\} \sin^3 \frac{1}{2} J \Sigma Q^{(0)} G^{(-i)} \cos (ig + i'g' + 2\omega + 2\omega') \\
 B_6 &= \frac{\lambda \mu u_1^2}{\sqrt{1-\sigma^2}} \left\{ \frac{33}{8} - \frac{133}{8} \sin^2 \frac{1}{2} J + \frac{75}{4} \sin^4 \frac{1}{2} J \right\} \sin \frac{1}{2} J \Sigma A^{(0)} C^{(i)} \cos (ig + i'g' + \omega - \omega') \\
 B_7 &= \frac{\lambda \mu u_1^2}{\sqrt{1-\sigma^2}} \left\{ \frac{15}{8} - \frac{45}{8} \sin^2 \frac{1}{2} J + \frac{15}{4} \sin^4 \frac{1}{2} J \right\} \sin \frac{1}{2} J \Sigma B^{(0)} D^{(i)} \cos (ig + i'g' + 3\omega - 3\omega') \\
 B_8 &= \frac{\lambda \mu u_1^2}{\sqrt{1-\sigma^2}} \left\{ -\frac{1}{2} + \frac{9}{4} \sin^2 \frac{1}{2} J - 15 \sin^4 \frac{1}{2} J \right\} \sin \frac{1}{2} J \Sigma A^{(0)} C^{(-i)} \cos (ig + i'g' + \omega + \omega') \\
 B_9 &= \frac{\lambda \mu u_1^2}{\sqrt{1-\sigma^2}} \left\{ -\frac{15}{8} + \frac{75}{8} \sin^2 \frac{1}{2} J - \frac{15}{2} \sin^4 \frac{1}{2} J \right\} \sin \frac{1}{2} J \Sigma B^{(0)} C^{(i)} \cos (ig + i'g' + 3\omega - \omega') \\
 B_{10} &= \frac{\lambda \mu u_1^2}{\sqrt{1-\sigma^2}} \left\{ -\frac{15}{8} + \frac{75}{8} \sin^2 \frac{1}{2} J - \frac{15}{2} \sin^4 \frac{1}{2} J \right\} \sin \frac{1}{2} J \Sigma A^{(0)} D^{(i)} \cos (ig + i'g' + \omega - 3\omega') \\
 C_1 &= 0 \\
 C_2 &= \frac{u_1^2}{\sqrt{1-\sigma^2}} \left\{ \frac{1}{2} - 3 \sin^2 \frac{1}{2} J + \frac{3}{2} \sin^4 \frac{1}{2} J \right\} \sin \frac{1}{2} J \Sigma Q^{(0)} G^{(i)} \sin (ig + i'g' + 2\omega - 2\omega') \\
 C_3 &= \frac{u_1^2}{\sqrt{1-\sigma^2}} \left\{ -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sin^2 \frac{1}{2} J - 3 \sin^4 \frac{1}{2} J \right\} \sin \frac{1}{2} J \Sigma Q^{(0)} K^{(i)} \sin (ig + i'g' + 2\omega) \\
 C_4 &= \frac{u_1^2}{\sqrt{1-\sigma^2}} \left\{ -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sin^2 \frac{1}{2} J \right\} \sin \frac{1}{2} J \Sigma P^{(0)} G^{(-i)} \sin (ig + i'g' + 2\omega') \\
 C_5 &= \frac{u_1^2}{\sqrt{1-\sigma^2}} \left\{ -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sin^2 \frac{1}{2} J \right\} \sin^3 \frac{1}{2} J \Sigma Q^{(0)} G^{(-i)} \sin (ig + i'g' + 2\omega + 2\omega') \\
 C_6 &= \frac{\lambda \mu u_1^2}{\sqrt{1-\sigma^2}} \left\{ \frac{3}{8} - \frac{33}{8} \sin^2 \frac{1}{2} J + \frac{75}{8} \sin^4 \frac{1}{2} J \right\} \sin \frac{1}{2} J \Sigma A^{(0)} C^{(i)} \sin (ig + i'g' + \omega - \omega') \\
 C_7 &= \frac{\lambda \mu u_1^2}{\sqrt{1-\sigma^2}} \left\{ \frac{15}{8} - \frac{45}{8} \sin^2 \frac{1}{2} J + \frac{15}{8} \sin^4 \frac{1}{2} J \right\} \sin \frac{1}{2} J \Sigma B^{(0)} D^{(i)} \sin (ig + i'g' + 3\omega - 3\omega') \\
 C_8 &= \frac{\lambda \mu u_1^2}{\sqrt{1-\sigma^2}} \left\{ -\frac{1}{2} + \frac{9}{4} \sin^2 \frac{1}{2} J - \frac{15}{4} \sin^4 \frac{1}{2} J \right\} \sin \frac{1}{2} J \Sigma A^{(0)} C^{(-i)} \sin (ig + i'g' + \omega + \omega') \\
 C_9 &= \frac{\lambda \mu u_1^2}{\sqrt{1-\sigma^2}} \left\{ -\frac{15}{8} + \frac{75}{8} \sin^2 \frac{1}{2} J - \frac{15}{4} \sin^4 \frac{1}{2} J \right\} \sin \frac{1}{2} J \Sigma B^{(0)} C^{(i)} \sin (ig + i'g' + 3\omega - \omega') \\
 C_{10} &= \frac{\lambda \mu u_1^2}{\sqrt{1-\sigma^2}} \left\{ \frac{15}{8} - \frac{15}{8} \sin^2 \frac{1}{2} J - \frac{15}{4} \sin^4 \frac{1}{2} J \right\} \sin \frac{1}{2} J \Sigma A^{(0)} D^{(i)} \sin (ig + i'g' + \omega - 3\omega')
 \end{aligned}$$

Die Form dieser Ausdrücke bietet ein leichtes Mittel zu ihrer Berechnung dar. Da sie sich nur von  $\Omega$  darin unterscheiden, dass in jedem der zehn Theile, aus welchen sie bestehen, eine andere Function von  $J$  eintritt, so braucht man, um  $B$  und  $C$  zu erhalten, nur  $\Omega$  nach der Entwicklung mit dem betreffenden Verhältniss der Function von  $J$  zu multipliciren, welches sich aus dem Vorhergehenden leicht ergibt. Wir erhalten somit die

Factoren, womit  $\frac{a\Omega}{\sqrt{1-e^2}}$  multiplicirt werden

muss, um

$B_0$  und  $C_0$

zu geben, wie folgt:

1)	$\frac{6 \cos J \cos \frac{3}{2}J \sin \frac{1}{2}J}{1 - 6 \sin^2 \frac{1}{2}J \cos^2 \frac{3}{2}J}$	0
2)	$2 \sin \frac{1}{2}J$	$2 \sin \frac{1}{2}J$
3)	$-\frac{\cos J}{\sin \frac{1}{2}J}$	$-\frac{\cos J}{\sin \frac{1}{2}J}$
4)	$-\frac{\cos J}{\sin \frac{3}{2}J}$	$-\frac{4}{\sin \frac{3}{2}J}$
5)	$-\frac{2 \cos \frac{3}{2}J}{\sin \frac{1}{2}J}$	$-\frac{2 \cos \frac{3}{2}J}{\sin \frac{1}{2}J}$
6)	$\frac{(11 - 50 \sin^2 \frac{1}{2}J) \cos \frac{3}{2}J \sin \frac{1}{2}J}{1 - 11 \sin^2 \frac{1}{2}J + 25 \sin^4 \frac{1}{2}J}$	$\sin \frac{1}{2}J$
7)	$\frac{3 \cos J \cos \frac{3}{2}J \sin \frac{1}{2}J}{1 - 3 \sin^2 \frac{1}{2}J \cos^2 \frac{3}{2}J}$	$3 \sin \frac{1}{2}J$
8)	$-\frac{(8 - 20 \sin^2 \frac{1}{2}J) \cos \frac{3}{2}J}{(3 - 10 \sin^2 \frac{1}{2}J) \sin \frac{1}{2}J}$	$-\frac{\cos \frac{3}{2}J}{\sin \frac{1}{2}J}$
9)	$-\frac{(1 - 4 \sin^2 \frac{1}{2}J) \cos \frac{3}{2}J}{\cos J \sin \frac{1}{2}J}$	$-\frac{4 - 3 \sin^2 \frac{1}{2}J}{\sin \frac{1}{2}J}$
10)	$-\frac{(1 - 4 \sin^2 \frac{1}{2}J) \cos \frac{3}{2}J}{\cos J \sin \frac{1}{2}J}$	$\frac{4 + \sin^2 \frac{1}{2}J}{\sin \frac{1}{2}J}$

wo die linker Hand hingeschriebenen Indices 1 bis 10 sich auf  $a\Omega_1$  bis  $a\Omega_{10}$  beziehen. Ausser der Multiplication der letztgenannten Functionen mit diesen Factoren müssen für  $C_0$  die in  $\Omega$  enthaltenen Cosinusse in die Sinusse derselben Bögen verwandelt werden.

Endlich giebt der im Art. 23 aufgestellte Ausdruck von  $\Omega^{(3)}$  die kleinen Glieder

$$B_0^{(3)} = \mu^2 u^2 \frac{1}{8} \sin \frac{1}{2}J - \mu^2 u^2 \frac{1}{8} \sin \frac{1}{2}J \cos (2g' + 2\omega')$$

$$C_0^{(3)} = -\mu^2 u^2 \frac{1}{8} \sin \frac{1}{2}J \sin (2g' + 2\omega')$$

womit die Entwicklungen der Glieder, die die von der ersten Potenz der störenden Kraft abhängigen Theile der Störungen geben, beendigt sind.

## 42.

In Betreff der vom Quadrat und den höheren Potenzen der störenden Kraft abhängigen Glieder bemerke ich im Voraus, dass sie alle aus Factoren zusammen gesetzt sind, die zwei verschiedenen Gattungen angehören. Der erste Factor dieser Glieder ergibt sich aus den im Vorhergehenden entwickelten Functionen und ist daher an sich bekannt, der zweite Factor, welcher, vom Cubus der störenden Kraft an, aus dem Product von zwei oder mehreren Factoren besteht, ist eine Function der zu ermittelnden Störungen selbst, die also zu diesem Zweck als bekannt betrachtet werden müssen. Man kann zu dem Ende die Störungen, deren Form bekannt sein muss und auch leicht gefunden werden kann, mit unbestimmten Coefficienten aufstellen und in die vorhergehenden Gleichungen substituiren, wodurch man die Bedingungsgleichungen erhält, auf deren Auflösung die Auflösung der vorliegenden Aufgabe beruht. Vor der Auflösung dieser Bedingungsgleichungen muss man jedenfalls die numerischen Werthe der bekannten Coefficienten darin substituiren, und da diese Bedingungsgleichungen eine sehr grosse Anzahl von Unbekannten enthalten, auch nicht linearisch sind, sondern die Quadrate, Producte und höhere Potenzen der zu berechnenden Coefficienten enthalten, so kann die Auflösung nur durch eine Reihe von Annäherungen ausgeführt werden, die damit angefangen werden müssen, dass man genäherte Werthe der Unbekannten substituirt, und nach und nach zu den genauen Werthen dieser gelangt.

Dieses ist das rationelste Verfahren, welches angewandt werden kann, aber da es nur durch eine Reihe von Annäherungen zum Ziele führt, so vergiebt man nichts von der Genauigkeit, die jeden Falls zu erlangen ist, wenn man das Princip der successiven Annäherungen in den Vordergrund stellt und die Bildung der Bedingungsgleichungen unterlässt. Man kann mit Weglassung der Bedingungsgleichungen genäherte numerische Werthe der Störungen in die Gleichungen der Bewegung substituiren und wird darauf, weil die störende Kraft weit kleiner ist, wie die Hauptkraft, mehr genäherte Werthe derselben zum Resultat erhalten; substituirt man nun diese, so werden noch genauere Werthe zum Vorschein kommen, und wiederholt man diese Substitutionen so lange, bis die zuletzt substituirtten Werthe selbst aus der Rechnung hervorgehen, so hat man die wahren Werthe der Unbekannten, das ist der Störungen erhalten.

Von theoretischer Seite betrachtet stehen die beiden eben betrachteten Methoden einander gleich, man kann durch jede derselben das Resultat mit beliebiger Genauigkeit erhalten, vorausgesetzt, dass man nicht Operationen hinein slicht, wodurch die Convergenz der Reihen beträchtlich gemindert, oder ganz und gar in Zweifel gestellt wird. Von practischer Seite betrachtet hat jedoch die Methode der successiven Annäherungen mit sofortiger Anwendung der numerischen Coefficienten vor der der unbestimmten Coefficienten, auch wenn man hier die bekannten Theile der Bedingungsgleichungen sogleich durch ihre numerischen Werthe ausdrückt, einen bedeutenden Vortheil voraus. Bei Aufstellung der Bedingungsgleichungen ist es sehr schwer, die Glieder, welche Merkliches geben, im vollen Umfang der Gleichung von den Gliedern zu unterscheiden, die Unmerkliches geben. Man geräth daher leicht in die unangenehme Alternative, entweder Glieder jener Art auszulassen, wodurch der Genauigkeit des Resultats geschadet wird, oder Glieder dieser Art aufzunehmen, wovon in dieser ohnehin mühsamen Aufgabe überflüssige und unnöthige Arbeit die Folge ist. Bei der beschriebenen Methode der successiven Annäherungen hingegen zeigt sich für jeden Coefficienten auf den ersten Blick, welche Substitutionen Merkliches und welche Unmerkliches geben werden, und die eben angeführte Klippe wird auf die leichteste Art vermieden. Man ist der Genauigkeit des Resultats im Voraus gewiss und erhält auch schliesslich über die Genauigkeit eines jeden der berechneten Coefficienten ein so sicheres Urtheil, wie bei keiner andern Methode möglich ist.

Es ist oben schon gesagt worden, dass man, um der Genauigkeit des Resultats sicher zu werden, dem Verfahren keine solche Operationen beimischen darf, wodurch die Convergenz der Reihen bedeutend geschwächt oder ganz und gar in Zweifel gestellt werden müsste; eine solche nachtheilige Operation ist die Auflösung der Nenner der Coefficienten, die durch die Integrationen entstehen, in unendliche Reihen, die nach den Potenzen des Verhältnisses der mittleren Bewegungen der Sonne und des Mondes fortschreiten. Bei diesem Verfahren, welches in der letzten Reihe von Jahren mehr wie ein Mal angewandt worden ist, kann man über die absolute Genauigkeit des Resultats gar keinen sicheren Schluss fällen, denn abgesehen davon, dass man schliesslich nicht ein Mal die Convergenz der daraus entstehenden Ausdrücke der Störungscoefficienten darthun kann, liegt es auch, wenigstens jetzt noch, ausser

dem Bereiche der Möglichkeit, die Summe der nicht entwickelten Glieder höherer Ordnung zum Mindesten annähernd zu bestimmen. Ohne solche Restbestimmung dieser Reihen, von welchen ausserdem vergeblich erwartet werden muss, dass das Gesetz der Fortschreitung derselben aufgefunden würde, ist es unmöglich, von der absoluten Genauigkeit, die die Summe der berechneten Glieder gewährt, sich eine Vorstellung zu machen.

## 43.

Es sind jetzt von den Producten, aus welchen die Störungsglieder der höheren Ordnungen bestehen, die im vor. Art. bezeichneten ersten Factoren, die an sich bekannt sind, zu entwickeln. Bezeichnen wir wieder, gleichwie im Art. 24, die Glieder des Ausdrucks für  $dW_0$  des Art. 6, die  $y$  nicht explicite enthalten, mit  $T$ , schreiben aber den strengen Werth von  $T$  hin, so wird

$$T = h_0 \left\{ 2 \frac{e_0}{r} \cos(\bar{f} - \varphi_0) - 1 + 2 \frac{h^2 e_0}{h_0^2 a_0 (1 - e_0^2)} [\cos(\bar{f} - \varphi_0) - 1] \right\} \left( \frac{d\Omega}{dv} \right) \\ + 2 h_0 \frac{e_0}{r} \sin(\bar{f} - \varphi_0) r \left( \frac{d\Omega}{dr} \right)$$

Erinnern wir uns nun, dass  $r = \bar{r} (1 + \nu)$ , so ist ersichtlich, dass im vorstehenden Ausdruck die Coefficienten der Differentialquotienten von  $\Omega$  in drei wesentlich verschiedene Theile zerfallen. Der eine dieser Theile enthält weder  $\nu$  noch  $h^2$ , der andere enthält nur  $\nu$ , und der dritte nur  $h^2$ , während ausser diesen beiden Veränderlichen diese Coefficienten Functionen der Veränderlichen  $nz$  sind.

Dem Vorhergehenden zufolge ist  $\Omega$  Function von

$$\bar{f}, r, P, Q, K$$

also auch Function von

$$nz, \nu, P, Q, K$$

der Sonnencoordinaten nicht zu gedenken. Wir haben aber im Art. 19 gesehen, dass durch die dort eingeführte Zerlegung von  $\Omega$  in die beiden Theile  $\Omega^{(1)}$  und  $\Omega^{(2)}$ ,  $\Omega^{(1)}$  eine Function ist, die  $r^2$ , und  $\Omega^{(2)}$  eine Function, die  $r^3$  zum allgemeinen Factor hat, während beide  $r$  auf keine andere Weise enthalten. Substituiren wir daher  $\bar{r}$  statt  $r$  in  $\Omega^{(1)}$  und  $\Omega^{(2)}$ , und nennen die daraus entstehenden Functionen  $\bar{\Omega}^{(1)}$  und  $\bar{\Omega}^{(2)}$ , so bekommen wir die Gleichungen

$$\Omega^{(1)} = \bar{\Omega}^{(1)} (1 + \nu)^2; \quad \Omega^{(2)} = \bar{\Omega}^{(2)} (1 + \nu)^3$$



und diese erstrecken sich auf alle Differentialquotienten von  $\Omega$ , die hier gebraucht werden. Setzt man nun in Folge dieser Betrachtungen

$$\begin{aligned} \bar{G} &= 2h_0 \left\{ \frac{e_0}{r} \cos(\bar{f}-\varphi_0) \left( \frac{d\bar{\Omega}}{d\omega} \right) + \frac{e_0}{r} \sin(\bar{f}-\varphi_0) \bar{r} \left( \frac{d\bar{\Omega}}{dr} \right) \right\} \\ \bar{U} &= 2 \frac{h_0 e_0}{a_0(1-e_0^2)} [\cos(\bar{f}-\varphi_0) - 1] \left( \frac{d\bar{\Omega}}{d\omega} \right) \\ \bar{\Sigma} &= -h_0 \left( \frac{d\bar{\Omega}}{d\omega} \right) \end{aligned}$$

und

$$\bar{T} = \bar{G} + \bar{U} + \bar{\Sigma} \dots \dots \dots (16)$$

so sind  $\bar{T}$ ,  $\bar{G}$ ,  $\bar{U}$ ,  $\bar{\Sigma}$  bloß Functionen von

$$nz, P, Q, K$$

die weder  $\nu$  noch  $h$  enthalten, und es ergibt sich, wenn wir diese vier Functionen auch nach  $\bar{\Omega}^{(1)}$  und  $\bar{\Omega}^{(2)}$  je in zwei Theile zerlegen,

$$\begin{aligned} T^{(1)} &= \bar{T}^{(1)} + \bar{G}^{(1)}\nu + \bar{U}^{(1)} \left\{ (1+\nu)^2 \frac{h^2}{h_0^2} - 1 \right\} + \bar{\Sigma}^{(1)} (2\nu + \nu^2) \\ T^{(2)} &= \bar{T}^{(2)} + \bar{G}^{(2)} (2\nu + \nu^2) + \bar{U}^{(2)} \left\{ (1+\nu)^2 \frac{h^2}{h_0^2} - 1 \right\} + \bar{\Sigma}^{(2)} (3\nu + 3\nu^2 + \nu^3) \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} T^{(1)} \\ T^{(2)} \end{aligned}} \right\} (17)$$

wo also die Wirkung der Incremente  $n\delta z$ ,  $\delta P$ ,  $\delta Q$ ,  $\delta K$  auf  $T$  von der Wirkung der Incremente  $\nu$  und  $\delta \frac{h^2}{h_0^2}$  abgesondert ist.

44.

Die Functionen  $B$  und  $C$ , von welchen die Breitenstörungen abhängen, lassen sich auf ähnliche Weise behandeln. Die vollständigen Ausdrücke derselben sind zufolge des Art. 36

$$\begin{aligned} n_0 B &= -h \left\{ \left( \frac{d\Omega}{dQ} \right) \cos^2 \frac{1}{2} J + \frac{1}{2} P \left( \frac{d\Omega}{dK} \right) \right\} \\ n_0 C &= h \left\{ \left( \frac{d\Omega}{dP} \right) \cos^2 \frac{1}{2} J - \frac{1}{2} Q \left( \frac{d\Omega}{dK} \right) \right\} \end{aligned}$$

Setzen wir nun hier

$$\begin{aligned} \bar{B} &= -\frac{1}{\sqrt{1-e^2}} \left\{ \left( \frac{da\bar{\Omega}}{dQ} \right) \cos^2 \frac{1}{2} J + \frac{1}{2} P \left( \frac{da\bar{\Omega}}{dK} \right) \right\} \\ \bar{C} &= \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} \left\{ \left( \frac{da\bar{\Omega}}{dP} \right) \cos^2 \frac{1}{2} J - \frac{1}{2} Q \left( \frac{da\bar{\Omega}}{dK} \right) \right\} \end{aligned}$$

und theilen auch  $B$  und  $C$  je nach  $\Omega^{(1)}$  und  $\Omega^{(2)}$  in zwei Theile, so ergibt sich

$$B^{(1)} = \bar{B}^{(1)} + \bar{B}^{(1)} \left\{ (1 + \nu)^2 \frac{h}{h_0} - 1 \right\}$$

$$B^{(2)} = \bar{B}^{(2)} + \bar{B}^{(2)} \left\{ (1 + \nu)^3 \frac{h}{h_0} - 1 \right\}$$

$$C^{(1)} = \bar{C}^{(1)} + \bar{C}^{(1)} \left\{ (1 + \nu)^2 \frac{h}{h_0} - 1 \right\}$$

$$C^{(2)} = \bar{C}^{(2)} + \bar{C}^{(2)} \left\{ (1 + \nu)^3 \frac{h}{h_0} - 1 \right\}$$

wo dieselbe Absonderung bewirkt ist wie oben.

45.

Die in den vorstehenden Ausdrücken erforderlichen Functionen von  $\nu$  und  $h$  kann man leicht durch  $w$  und  $\delta \frac{h_0}{h}$  ausdrücken, wenn man bedenkt, dass

$$w = \log. \text{ nat } (1 + \nu); \quad \frac{h_0}{h} = 1 + \delta \frac{h_0}{h}$$

ist. Man bekommt leicht

$$\nu = w + \frac{1}{2}w^2 + \frac{1}{6}w^3 + \frac{1}{24}w^4 + \dots$$

$$2\nu + \nu^2 = 2w + 2w^2 + \frac{4}{3}w^3 + \frac{2}{3}w^4 + \dots$$

$$3\nu + 3\nu^2 + \nu^3 = 3w + \frac{3}{2}w^2 + \frac{3}{2}w^3 + \frac{2}{5}w^4 + \dots$$

$$\delta \frac{h^2}{h_0^2} = -2\delta \frac{h_0}{h} + 3 \left( \delta \frac{h_0}{h} \right)^2 - \frac{4}{3} \left( \delta \frac{h_0}{h} \right)^3 + \dots$$

$$(1 + \nu)^2 \frac{h^2}{h_0^2} - 1 = (2\nu + \nu^2) + \delta \frac{h^2}{h_0^2} + (2\nu + \nu^2) \delta \frac{h^2}{h_0^2}$$

$$(1 + \nu)^3 \frac{h^2}{h_0^2} - 1 = (3\nu + 3\nu^2 + \nu^3) + \delta \frac{h^2}{h_0^2} + (3\nu + 3\nu^2 + \nu^3) \delta \frac{h^2}{h_0^2}$$

$$\delta \frac{h}{h_0} = -\delta \frac{h_0}{h} + \left( \delta \frac{h_0}{h} \right)^2 - \left( \delta \frac{h_0}{h} \right)^3 + \dots$$

$$(1 + \nu)^2 \frac{h}{h_0} - 1 = (2\nu + \nu^2) + \delta \frac{h}{h_0} + (2\nu + \nu^2) \delta \frac{h}{h_0}$$

$$(1 + \nu)^3 \frac{h}{h_0} - 1 = (3\nu + 3\nu^2 + \nu^3) + \delta \frac{h}{h_0} + (3\nu + 3\nu^2 + \nu^3) \delta \frac{h}{h_0}$$

die alle sehr leicht und sicher berechnet werden können, wenn  $w$  und  $\delta \frac{h_0}{h}$  nebst deren Potenzen gegeben sind. Zur Berechnung von  $\delta \frac{h_0}{h}$  sind zwei sehr verschiedene Verfahren vorhanden. Im Art. 5 wurde die Gleichung

$$\frac{dh}{dt} = -h^2 \left( \frac{d\Omega}{dv} \right)$$

gefunden, da nun  $d \frac{1}{h} = -\frac{dh}{h^2}$  ist, so wird zufolge des Vorhergehenden

$$(18) \dots \delta \frac{h_0}{h} = -n \int \{ \bar{\Sigma}^{(1)} + \bar{\Sigma}^{(1)} (2\nu + \nu^2) \} dt \\ - n \int \{ \bar{\Sigma}^{(2)} + \bar{\Sigma}^{(2)} (3\nu + 3\nu^2 + \nu^3) \} dt$$

und hängt daher nur von Functionen ab, die ohnehin für die Berechnung von  $T$  gebraucht werden.

Andernthails kann  $\delta \frac{h_0}{h}$  auch durch Hülfe der Gleichung (6), nemlich durch

$$\frac{dz}{dt} = \frac{h_0}{h(1+\nu)^2} - \frac{y}{\sqrt{1-e_0^2}} \frac{r^2}{a_0^3}$$

ohne besondere Integration berechnet werden, wenn  $n\delta z$ ,  $\nu$  und  $y$  als bekannt vorausgesetzt werden. Eine leichte Entwicklung giebt

$$\begin{aligned} \delta \frac{h_0}{h} &= \frac{d\delta z}{dt} + (2\nu + \nu^2) + \frac{d\delta z}{dz} (\nu + \nu^2) \\ &+ \frac{y}{\sqrt{1-e_0^2}} \left\{ \frac{r^2}{a^2} + \frac{d \cdot r^2}{a^2 dg} n\delta z + \frac{1}{2} \frac{d^2 \cdot r^2}{a^2 dg^2} (n\delta z)^2 + \dots \right\} \\ &+ \frac{y}{\sqrt{1-e_0^2}} \left\{ \frac{r^2}{a^2} + \frac{d \cdot r^2}{a^2 dg} n\delta z + \frac{1}{2} \frac{d^2 \cdot r^2}{a^2 dg^2} (n\delta z)^2 + \dots \right\} (2\nu + \nu^2) \end{aligned} \quad (19)$$

wo auch  $\frac{d\delta z}{dt} = \frac{dz}{dt} - 1$  gesetzt worden ist.

Die Anwendung des ersten Ausdrucks von  $\delta \frac{h_0}{h}$  ist die vortheilhaftere, wendet man aber beide Ausdrücke an, so erhält man eine durchgreifende Controlle der Berechnung der Störungen. Will man diesen Zweck verfolgen, so muss man aus beiden Ausdrücken  $\delta \frac{h_0}{h}$  mit möglichster Genauigkeit berechnen, will man aber  $\delta \frac{h_0}{h}$  nur zum Zweck der Substitution in die vorhergehenden Ausdrücke ermitteln, so ist die grösste Genauigkeit in der Berechnung davon nicht erforderlich, da  $\frac{h}{h_0}$  und  $\frac{h^2}{h_0^2}$ , die nur in den Ausdrücken von  $T, B, C$  gebraucht werden, allenthalben mit Functionen von der ersten Ordnung der störenden Kraft multiplicirt werden, und also eine etwaige Ungenauigkeit in den Coefficienten des Ausdrucks von  $\delta \frac{h_0}{h}$  bedeutend verkleinert in die Störungen der Länge, des Radius und der Breite übergeht.

46.

Die Functionen

$$\bar{T}, \bar{G}, \bar{U}, \bar{\Sigma}, \bar{B}, \bar{C}$$

auf welchen dem Vorhergehenden zufolge die Berechnung der Störungen mitberuht, sind, wie schon angeführt ist, Functionen der vier Veränderlichen

$$nz, P, Q, K$$

und müssen in Bezug auf den Zuwachs, den diese durch die Störungen erhalten, mittelst des auf mehrere Veränderliche ausgedehnten Taylorschen Theorems entwickelt werden. Da

$$nz = g + n\delta z$$

gesetzt wird, wo  $g$  die elliptische mittlere Anomalie des Mondes bezeichnet, so ist  $n\delta z$  der Zuwachs von  $nz$ , für die übrigen Veränderlichen werde ich den Zuwachs durch ein dem betreffenden Buchstaben vorgesetztes  $\delta$  bezeichnen, wie schon oben theilweise geschehen ist. Nach den Differentiationen, die das auf mehrere Veränderliche ausgedehnte Taylorsche Theorem erfordert, müssen in allen Differentialquotienten die elliptischen Werthe der Grössen, von welchen sie Functionen sind, substituirt werden, auch muss gleich wie oben

$$P = 0 \quad \text{und} \quad Q = 2 \sin \frac{1}{2} J$$

geschrieben werden. Das Increment  $\delta K$  kann durch die Relation, die im Art. 46 gefunden wurde, eliminirt werden, nemlich durch

$$\delta K = -F\delta P$$

wo zur Abkürzung

$$F = \frac{\sin \frac{1}{2} J}{2 \cos^2 \frac{1}{2} J}$$

gesetzt ist. Man erhält nach diesen Bemerkungen, und wenn man nur die Glieder hinschreibt, die in der Mondtheorie Merkliches geben können,

$$\begin{aligned} \bar{T} = & T_0 + \left(\frac{dT_0}{dg}\right) n\delta z + R\delta P + Y\delta Q \\ & + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2 T_0}{dg^2}\right) (n\delta z)^2 + \left(\frac{dR}{dg}\right) (n\delta z) \delta P + \left(\frac{dY}{dg}\right) (n\delta z) \delta Q \\ & + \frac{1}{2} S\delta P^2 + V\delta P \delta Q + \frac{1}{2} Z\delta Q^2 \\ & + \frac{1}{6} \left(\frac{d^3 T_0}{dg^3}\right) (n\delta z)^3 + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2 R}{dg^2}\right) (n\delta z)^2 \delta P + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2 Y}{dg^2}\right) (n\delta z)^2 \delta Q \\ & + \frac{1}{2} \left(\frac{dS}{dg}\right) n\delta z \cdot \delta P^2 + \left(\frac{dV}{dg}\right) n\delta z \cdot \delta P \delta Q + \frac{1}{2} \left(\frac{dZ}{dg}\right) n\delta z \cdot \delta Q^2 \end{aligned}$$

wo die eingeführten Bezeichnungen die folgende Bedeutung haben:

$$\begin{aligned} R &= \left(\frac{dT_0}{dP}\right) - F \left(\frac{dT_0}{dK}\right) \\ Y &= \left(\frac{dT_0}{dQ}\right) \\ S &= \left(\frac{d^2 T_0}{dP^2}\right) - 2F \left(\frac{d^2 T_0}{dP dK}\right) + F^2 \left(\frac{d^2 T_0}{dK^2}\right) \\ V &= \left(\frac{d^2 T_0}{dP dQ}\right) - F \left(\frac{d^2 T_0}{dQ dK}\right) \\ Z &= \left(\frac{d^2 T_0}{dQ^2}\right) \end{aligned}$$

Diesen Ausdruck habe ich in den folgenden zusammengezogen,

$$\begin{aligned} \bar{T} = T_0 + \left(\frac{dT_0}{dg}\right) n\delta z + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2T_0}{dg^2}\right) (n\delta z)^2 + \frac{1}{6} \left(\frac{d^3T_0}{dg^3}\right) (n\delta z)^3 \\ + H\delta P + N\delta Q \dots \dots \dots (20) \end{aligned}$$

den ich weiter unten anwenden werde, und in welchem zur Abkürzung

$$H = R + \left(\frac{dR}{dg}\right) n\delta z + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2R}{dg^2}\right) (n\delta z)^2 + \frac{1}{6} L\delta P + M\delta Q$$

$$N = Y + \left(\frac{dY}{dg}\right) n\delta z + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2Y}{dg^2}\right) (n\delta z)^2 + \frac{1}{6} O\delta Q$$

$$L = S + \left(\frac{dS}{dg}\right) n\delta z$$

$$M = V + \left(\frac{dV}{dg}\right) n\delta z$$

$$O = Z + \left(\frac{dZ}{dg}\right) n\delta z$$

gesetzt worden ist.

Die Entwicklung der Functionen  $\bar{G}$ ,  $\bar{U}$ ,  $\bar{\Sigma}$ ,  $\bar{B}$ ,  $\bar{C}$  führt auf ganz ähnliche Ausdrücke, die nicht hingeschrieben zu werden brauchen, da man nur im obigen Ausdruck zu diesem Zweck  $T_0$  bez. in  $G_0$ ,  $U_0$ ,  $\Sigma_0$ ,  $B_0$ ,  $C_0$  umzuändern nöthig hat. Die Entwicklung von  $\bar{G}$ , oder statt dessen die von  $\bar{U}$ , nach diesem Ausdruck ist unnöthig, da man sie auf einfachere Weise erhalten kann. Die Bedingungsgleichung (16) giebt nemlich entweder

$$\bar{G} = \bar{T} - \bar{U} - \bar{\Sigma} \quad \text{oder} \quad \bar{U} = \bar{T} - \bar{G} - \bar{\Sigma}$$

und hieraus folgen die Coefficienten von  $\bar{G}$ , oder bez.  $\bar{U}$ , auf die einfachste Weise, nachdem man die Coefficienten der anderen drei Functionen durch den Ausdruck (20) berechnet hat. Dieser braucht also ausser  $\bar{T}$  nur noch entweder auf die Functionen

$$\bar{U}, \bar{\Sigma}, \bar{B}, \bar{C} \quad \text{oder auf} \quad \bar{G}, \bar{\Sigma}, \bar{B}, \bar{C}$$

angewandt zu werden. Auch braucht man der Strenge nach in der Anwendung desselben auf diese zuletzt genannten Functionen nicht alle hingeschriebenen Glieder zu berücksichtigen, sondern darf dort mehrere Glieder der höchsten Ordnung übergehen.

47.

Es sind noch die Ausdrücke für die Differentialquotienten nach  $P$ ,  $Q$ ,  $K$  zu entwickeln, und diese Berechnung kann auf ähnliche Art ausgeführt werden, wie die oben für  $B$  und  $C$ , man kann nemlich die

constanten Factoren angeben, durch deren Anwendung auf bez.  $T, U, \Sigma$  und  $\Omega$ , oder statt der letzteren  $\frac{\Omega}{\sqrt{1-e^2}}$ , die genannten Differentialquotienten hervorgehen.

Wenden wir uns zuerst zu  $T, U, \Sigma$ , so ist zu bedenken, dass die Functionen von  $J$ , die in den zehn einzelnen Theilen von  $\Omega$  enthalten sind, unverändert in  $T, U, \Sigma$  übergehen, und nur die Cosinusse, die  $\Omega$  enthält, sich in Sinusse verwandeln. Differentiiren wir daher die Ausdrücke von  $a\Omega_1, a\Omega_2, \text{etc.}$  des Art. 39 nach  $P, Q, K$ , nachdem darin die Cosinusse in Sinusse mit gleichem Vorzeichen, und die Sinusse in Cosinusse mit entgegengesetztem Vorzeichen verwandelt worden sind, setzen nach den Differentiationen

$$P = 0, \quad Q = 2 \sin \frac{1}{2} J$$

und dividiren mit den bez. Factoren von  $a\Omega_1, a\Omega_2, \text{etc.}$ , so ergeben sich die

Factoren, womit die Ausdrücke von  
 $T$  und  $U$  und  $\Sigma$

multiplicirt werden müssen, um die bez. Ausdrücke von

$R$  und  $Y$   
zu geben, wie folgt:

1)	0	— $\frac{6 \cos J \sin \frac{1}{2} J}{1 - 6 \sin^2 \frac{1}{2} J \cos^2 \frac{1}{2} J}$
2)	— $\frac{2 \sin \frac{1}{2} J}{\cos^2 \frac{1}{2} J}$	— $\frac{2 \sin \frac{1}{2} J}{\cos^2 \frac{1}{2} J}$
3)	$\frac{\cos J}{\sin \frac{1}{2} J \cos^2 \frac{1}{2} J}$	$\frac{\cos J}{\sin \frac{1}{2} J \cos^2 \frac{1}{2} J}$
4)	$\frac{4}{\sin \frac{1}{2} J \cos^2 \frac{1}{2} J}$	$\frac{\cos J}{\sin \frac{1}{2} J \cos^2 \frac{1}{2} J}$
5)	$\frac{2}{\sin \frac{1}{2} J}$	$\frac{2}{\sin \frac{1}{2} J}$
6)	— $\frac{\sin \frac{1}{2} J}{\cos^2 \frac{1}{2} J}$	— $\frac{(11 - 50 \sin^2 \frac{1}{2} J) \sin \frac{1}{2} J}{1 - 11 \sin^2 \frac{1}{2} J + 25 \sin^4 \frac{1}{2} J}$
7)	— $\frac{8 \sin \frac{1}{2} J}{\cos^2 \frac{1}{2} J}$	— $\frac{8 \cos J \sin \frac{1}{2} J}{1 - 8 \sin^2 \frac{1}{2} J \cos^2 \frac{1}{2} J}$
8)	$\frac{4}{\sin \frac{1}{2} J}$	$\frac{8 - 20 \sin^2 \frac{1}{2} J}{(8 - 10 \sin^2 \frac{1}{2} J) \sin \frac{1}{2} J}$
9)	$\frac{4 - 8 \sin^2 \frac{1}{2} J}{\sin \frac{1}{2} J \cos^2 \frac{1}{2} J}$	$\frac{4 - 4 \sin^2 \frac{1}{2} J}{\cos J \sin \frac{1}{2} J}$
10)	— $\frac{4 + \sin^2 \frac{1}{2} J}{\sin \frac{1}{2} J \cos^2 \frac{1}{2} J}$	$\frac{4 - 4 \sin^2 \frac{1}{2} J}{\cos J \sin \frac{1}{2} J}$

Ausserdem müssen in  $R$  die in  $T, U, \Sigma$  enthaltenen Sinusse alle in Cosinusse umgewandelt werden, während in  $Y$  die Sinusse bleiben.

Vergleicht man die vorstehenden Factoren mit denen des Art. 44, so sieht man, dass sie sich zu diesen verhalten wie 1:  $-\cos^2 \frac{1}{2}J$

48.

Differentiirt man die Ausdrücke von  $a\Omega_1, a\Omega_2, Aa_1$  des Art. 39 nochmals unter denselben Bedingungen wie oben, so bekommt man die

Factoren, womit die Ausdrücke von

$T$  und  $U$  und  $\Sigma$

multiplicirt werden müssen, um die bez. Ausdrücke von

$S; \qquad V; \qquad Z$

zu geben, wie folgt:

$$\begin{array}{l}
 1) \dots - \frac{3 \cos J}{4 - 6 \sin^2 \frac{1}{2}J \cos^2 \frac{1}{2}J} \dots \dots \dots 0 \dots \dots \dots - \frac{3 - 18 \sin^2 \frac{1}{2}J}{4 - 6 \sin^2 \frac{1}{2}J \cos^2 \frac{1}{2}J} \\
 2) \dots \dots - \frac{4 + 3 \sin^2 \frac{1}{2}J}{\cos^2 \frac{1}{2}J} \dots \dots \dots \frac{4 \sin^2 \frac{1}{2}J}{\cos^2 \frac{1}{2}J} \dots \dots \dots - \frac{4 - 3 \sin^2 \frac{1}{2}J}{\cos^2 \frac{1}{2}J} \\
 3) \dots - \frac{4 - 5 \sin^2 \frac{1}{2}J + 3 \sin^4 \frac{1}{2}J}{2 \sin^2 \frac{1}{2}J \cos^2 \frac{1}{2}J} \dots \dots \frac{4 - 6 \sin^2 \frac{1}{2}J + 7 \sin^4 \frac{1}{2}J}{2 \sin^2 \frac{1}{2}J \cos^2 \frac{1}{2}J} \dots \dots \dots \frac{4 - 6 \sin^2 \frac{1}{2}J}{2 \sin^2 \frac{1}{2}J \cos^2 \frac{1}{2}J} \\
 4) \dots - \frac{4 + 3 \sin^2 \frac{1}{2}J - \sin^4 \frac{1}{2}J}{2 \sin^2 \frac{1}{2}J \cos^2 \frac{1}{2}J} \dots \dots \dots \frac{4}{2 \sin^2 \frac{1}{2}J} \dots \dots \dots \frac{4 - 6 \sin^2 \frac{1}{2}J}{2 \sin^2 \frac{1}{2}J \cos^2 \frac{1}{2}J} \\
 5) \dots \dots - \frac{3}{\sin^2 \frac{1}{2}J} \dots \dots \dots \frac{3}{\sin^2 \frac{1}{2}J} \dots \dots \dots \frac{3}{\sin^2 \frac{1}{2}J}
 \end{array}$$

wo in den Ausdrücken von  $V$  ausserdem die in  $T, U, \Sigma$  enthaltenen Sinusse in Cosinusse zu verwandeln sind, während in denen von  $S$  und  $Z$  die Sinusse bleiben.

Die zu  $a\Omega_3$ , etc. gehörigen Factoren habe ich nicht angesetzt, weil die daraus entstehenden Glieder nichts Merkliches geben können.

49.

Differentiirt man ferner den allgemeinen Ausdruck für  $n_0B$  des Art. 40, und behandelt das Differentiale eben so wie im Vorhergehenden geschehen ist, so bekommt man die

Factoren, womit  $\frac{a\Omega}{\sqrt{1-e^2}}$  multiplicirt werden muss, um die Ausdrücke von

$R \qquad \qquad \qquad \text{und} \qquad \qquad \qquad Y$

in Bezug auf  $B$  zu erhalten, wie folgt:

$$\begin{array}{l}
 1) \dots \dots \dots 0 \dots \dots \dots \frac{3 - 27 \sin^2 \frac{1}{2}J + 30 \sin^4 \frac{1}{2}J}{4 - 6 \sin^2 \frac{1}{2}J \cos^2 \frac{1}{2}J} \\
 2) \dots \dots \dots \frac{4 + 3 \sin^2 \frac{1}{2}J}{\cos^2 \frac{1}{2}J} \dots \dots \dots \frac{4 - 5 \sin^2 \frac{1}{2}J}{\cos^2 \frac{1}{2}J}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 3) \dots\dots\dots \frac{4-5 \sin^2 \frac{1}{2}J + 6 \sin^4 \frac{1}{2}J}{2 \sin^2 \frac{1}{2}J \cos^2 \frac{1}{2}J} \dots\dots\dots - \frac{4-9 \sin^2 \frac{1}{2}J + 10 \sin^4 \frac{1}{2}J}{2 \sin^2 \frac{1}{2}J \cos^2 \frac{1}{2}J} \\
 4) \dots\dots\dots \frac{4-8 \sin^2 \frac{1}{2}J}{2 \sin^2 \frac{1}{2}J \cos^2 \frac{1}{2}J} \dots\dots\dots - \frac{4-9 \sin^2 \frac{1}{2}J + 10 \sin^4 \frac{1}{2}J}{2 \sin^2 \frac{1}{2}J \cos^2 \frac{1}{2}J} \\
 5) \dots\dots\dots \frac{3 \cos^2 \frac{1}{2}J}{\sin^2 \frac{1}{2}J} \dots\dots\dots - \frac{3-5 \sin^2 \frac{1}{2}J}{\sin^2 \frac{1}{2}J} \\
 6) \dots\dots\dots \frac{4+11 \sin^2 \frac{1}{2}J - 75 \sin^4 \frac{1}{2}J}{2(4-11 \sin^2 \frac{1}{2}J + 25 \sin^4 \frac{1}{2}J)} \dots\dots\dots \frac{4-188 \sin^2 \frac{1}{2}J + 250 \sin^4 \frac{1}{2}J}{2(4-11 \sin^2 \frac{1}{2}J + 25 \sin^4 \frac{1}{2}J)} \\
 7) \dots\dots\dots \frac{3+9 \sin^2 \frac{1}{2}J - 27 \sin^4 \frac{1}{2}J}{2(4-8 \sin^2 \frac{1}{2}J \cos^2 \frac{1}{2}J)} \dots\dots\dots \frac{3-27 \sin^2 \frac{1}{2}J + 80 \sin^4 \frac{1}{2}J}{2(4-8 \sin^2 \frac{1}{2}J \cos^2 \frac{1}{2}J)} \\
 8) \dots\dots\dots \frac{(3-30 \sin^2 \frac{1}{2}J) \cos^2 \frac{1}{2}J}{2(3-10 \sin^2 \frac{1}{2}J) \sin^2 \frac{1}{2}J} \dots\dots\dots - \frac{3-69 \sin^2 \frac{1}{2}J + 100 \sin^4 \frac{1}{2}J}{2(3-10 \sin^2 \frac{1}{2}J) \sin^2 \frac{1}{2}J} \\
 9) \dots\dots\dots \frac{4-9 \sin^2 \frac{1}{2}J + 18 \sin^4 \frac{1}{2}J}{2 \cos J \sin^2 \frac{1}{2}J} \dots\dots\dots - \frac{4-15 \sin^2 \frac{1}{2}J + 20 \sin^4 \frac{1}{2}J}{2 \cos J \sin^2 \frac{1}{2}J} \\
 10) \dots\dots\dots - \frac{4-5 \sin^2 \frac{1}{2}J - 6 \sin^4 \frac{1}{2}J}{2 \cos J \sin^2 \frac{1}{2}J} \dots\dots\dots - \frac{4-15 \sin^2 \frac{1}{2}J + 20 \sin^4 \frac{1}{2}J}{2 \cos J \sin^2 \frac{1}{2}J}
 \end{array}$$

Hier müssen ausserdem in *R* die Cosinuse, welche  $\Omega$  enthält, in Sinusse verwandelt werden.

Durch nochmalige Differentiation des Ausdrucks von  $n_0B$  und übrigen gleiche Behandlung ergeben sich die

Factoren, womit  $\frac{\sigma\Omega}{\sqrt{1-\sigma^2}}$  multiplicirt werden muss, um die Ausdrücke von

$$S; \qquad V; \qquad Z$$

in Bezug auf *B* zu erhalten, wie folgt:

$$\begin{array}{l}
 1) \dots - \frac{(9-12 \sin^2 \frac{1}{2}J) \sin \frac{1}{2}J}{4-6 \sin^2 \frac{1}{2}J \cos^2 \frac{1}{2}J} \dots\dots\dots 0 \dots\dots\dots - \frac{(27-60 \sin^2 \frac{1}{2}J) \sin \frac{1}{2}J}{4-6 \sin^2 \frac{1}{2}J \cos^2 \frac{1}{2}J} \\
 2) \dots - \frac{(6+2 \sin^2 \frac{1}{2}J) \sin \frac{1}{2}J}{\cos^4 \frac{1}{2}J} \dots\dots\dots - \frac{8 \sin^2 \frac{1}{2}J}{\cos^4 \frac{1}{2}J} \dots\dots\dots - \frac{(6-10 \sin^2 \frac{1}{2}J) \sin \frac{1}{2}J}{\cos^4 \frac{1}{2}J} \\
 3) \dots\dots \frac{4+\sin^2 \frac{1}{2}J - 4 \sin^4 \frac{1}{2}J}{2 \sin^2 \frac{1}{2}J \cos^2 \frac{1}{2}J} \dots\dots\dots \frac{2-8 \sin^2 \frac{1}{2}J + 7 \sin^4 \frac{1}{2}J}{\sin^2 \frac{1}{2}J \cos^2 \frac{1}{2}J} \dots\dots\dots \frac{9-20 \sin^2 \frac{1}{2}J}{2 \sin^2 \frac{1}{2}J \cos^2 \frac{1}{2}J} \\
 4) \dots\dots \frac{4-7 \sin^2 \frac{1}{2}J + 4 \sin^4 \frac{1}{2}J}{2 \sin^2 \frac{1}{2}J \cos^2 \frac{1}{2}J} \dots\dots\dots \frac{2-2 \sin^2 \frac{1}{2}J - \sin^4 \frac{1}{2}J}{\sin^2 \frac{1}{2}J \cos^2 \frac{1}{2}J} \dots\dots\dots \frac{9-20 \sin^2 \frac{1}{2}J}{2 \sin^2 \frac{1}{2}J \cos^2 \frac{1}{2}J} \\
 5) \dots\dots\dots \frac{3-2 \sin^2 \frac{1}{2}J}{\sin^2 \frac{1}{2}J} \dots\dots\dots \frac{3 \cos J}{\sin^2 \frac{1}{2}J} \dots\dots\dots - \frac{3-10 \sin^2 \frac{1}{2}J}{\sin^2 \frac{1}{2}J}
 \end{array}$$

Ausserdem müssen hier in *V* die Cosinuse, die  $\Omega$  enthält, in Sinusse verwandelt werden.

Behandelt man endlich den Ausdruck für  $n_0C$  des Art. 40 auf dieselbe Weise, so bekommt man die



Factoren, womit  $\frac{a\Omega}{\sqrt{1-e^2}}$  multiplicirt werden muss, um die Ausdrücke von

$$R \qquad \text{und} \qquad Y$$

in Bezug auf  $C$  zu erhalten.

1)	$\dots\dots\dots - \frac{(3-6 \sin^2 \frac{1}{2}J) \cos^2 \frac{1}{2}J}{4-6 \sin^2 \frac{1}{2}J \cos^2 \frac{1}{2}J}$	$\dots\dots\dots 0$
2)	$\dots\dots\dots - \frac{4+8 \sin^2 \frac{1}{2}J}{\cos^2 \frac{1}{2}J}$	$\dots\dots\dots \frac{4-5 \sin^2 \frac{1}{2}J}{\cos^2 \frac{1}{2}J}$
3)	$\dots\dots\dots - \frac{4-5 \sin^2 \frac{1}{2}J + 6 \sin^4 \frac{1}{2}J}{2 \sin^2 \frac{1}{2}J \cos^2 \frac{1}{2}J}$	$\dots\dots\dots - \frac{4-9 \sin^2 \frac{1}{2}J + 10 \sin^4 \frac{1}{2}J}{2 \sin^2 \frac{1}{2}J \cos^2 \frac{1}{2}J}$
4)	$\dots\dots\dots - \frac{4+8 \sin^2 \frac{1}{2}J - 2 \sin^4 \frac{1}{2}J}{2 \sin^2 \frac{1}{2}J \cos^2 \frac{1}{2}J}$	$\dots\dots\dots - \frac{4-3 \sin^2 \frac{1}{2}J}{2 \sin^2 \frac{1}{2}J \cos^2 \frac{1}{2}J}$
5)	$\dots\dots\dots - \frac{8 \cos^2 \frac{1}{2}J}{\sin^2 \frac{1}{2}J}$	$\dots\dots\dots - \frac{8-5 \sin^2 \frac{1}{2}J}{\sin^2 \frac{1}{2}J}$
6)	$\dots\dots\dots - \frac{44-70 \sin^2 \frac{1}{2}J + 39 \sin^4 \frac{1}{2}J}{2(4-14 \sin^2 \frac{1}{2}J + 25 \sin^4 \frac{1}{2}J) \cos^2 \frac{1}{2}J}$	$\dots\dots\dots \frac{4-33 \sin^2 \frac{1}{2}J + 425 \sin^4 \frac{1}{2}J}{2(4-14 \sin^2 \frac{1}{2}J + 25 \sin^4 \frac{1}{2}J)}$
7)	$\dots\dots\dots - \frac{8+6 \sin^2 \frac{1}{2}J - 39 \sin^4 \frac{1}{2}J + 48 \sin^6 \frac{1}{2}J}{2(4-8 \sin^2 \frac{1}{2}J \cos^2 \frac{1}{2}J) \cos^2 \frac{1}{2}J}$	$\dots\dots\dots \frac{8-27 \sin^2 \frac{1}{2}J + 45 \sin^4 \frac{1}{2}J}{2(4-8 \sin^2 \frac{1}{2}J \cos^2 \frac{1}{2}J)}$
8)	$\dots\dots\dots - \frac{3 \cos^2 \frac{1}{2}J}{2(8-10 \sin^2 \frac{1}{2}J) \sin^2 \frac{1}{2}J}$	$\dots\dots\dots - \frac{8-39 \sin^2 \frac{1}{2}J + 50 \sin^4 \frac{1}{2}J}{2(8-10 \sin^2 \frac{1}{2}J) \sin^2 \frac{1}{2}J}$
9)	$\dots\dots\dots - \frac{4-10 \sin^2 \frac{1}{2}J + 33 \sin^4 \frac{1}{2}J - 32 \sin^6 \frac{1}{2}J}{2 \cos J \cos^2 \frac{1}{2}J \sin^2 \frac{1}{2}J}$	$\dots\dots\dots - \frac{4-15 \sin^2 \frac{1}{2}J + 30 \sin^4 \frac{1}{2}J}{2 \cos J \sin^2 \frac{1}{2}J}$
10)	$\dots\dots\dots - \frac{4+6 \sin^2 \frac{1}{2}J - 15 \sin^4 \frac{1}{2}J}{2 \cos J \cos^2 \frac{1}{2}J \sin^2 \frac{1}{2}J}$	$\dots\dots\dots \frac{4-3 \sin^2 \frac{1}{2}J - 10 \sin^4 \frac{1}{2}J}{2 \cos J \sin^2 \frac{1}{2}J}$

Ausserdem müssen hier in  $Y$  die Cosinusse, welche  $\Omega$  enthält, in Sinusse verwandelt werden. Schliesslich erhält man die

Factoren, womit  $\frac{a\Omega}{\sqrt{1-e^2}}$  multiplicirt werden muss, um die Ausdrücke von

$$S; \qquad \qquad \qquad V; \qquad \qquad \qquad Z$$

in Bezug auf  $C$  zu erhalten.

1)	$\dots\dots\dots 0$	$\dots\dots\dots \frac{(9-12 \sin^2 \frac{1}{2}J) \sin \frac{1}{2}J}{4-6 \sin^2 \frac{1}{2}J \cos^2 \frac{1}{2}J}$	$\dots\dots\dots 0$
2)	$\dots\dots\dots - \frac{(6+2 \sin^2 \frac{1}{2}J) \sin \frac{1}{2}J}{\cos^2 \frac{1}{2}J}$	$\dots\dots\dots \frac{8 \sin^2 \frac{1}{2}J}{\cos^2 \frac{1}{2}J}$	$\dots\dots\dots - \frac{(6-10 \sin^2 \frac{1}{2}J) \sin \frac{1}{2}J}{\cos^2 \frac{1}{2}J}$
3)	$\dots\dots\dots \frac{4 + \sin^2 \frac{1}{2}J - 4 \sin^4 \frac{1}{2}J}{2 \sin^2 \frac{1}{2}J \cos^2 \frac{1}{2}J}$	$\dots\dots\dots \frac{2-8 \sin^2 \frac{1}{2}J + 75 \sin^4 \frac{1}{2}J}{\sin^2 \frac{1}{2}J \cos^2 \frac{1}{2}J}$	$\dots\dots\dots \frac{9-20 \sin^2 \frac{1}{2}J}{2 \sin^2 \frac{1}{2}J \cos^2 \frac{1}{2}J}$
4)	$\dots\dots\dots \frac{7-5 \sin^2 \frac{1}{2}J}{2 \sin^2 \frac{1}{2}J \cos^2 \frac{1}{2}J}$	$\dots\dots\dots - \frac{4-4 \sin^2 \frac{1}{2}J + 2 \sin^4 \frac{1}{2}J}{\sin^2 \frac{1}{2}J \cos^2 \frac{1}{2}J}$	$\dots\dots\dots \frac{8}{2 \sin^2 \frac{1}{2}J \cos^2 \frac{1}{2}J}$
5)	$\dots\dots\dots \frac{8-2 \sin^2 \frac{1}{2}J}{\sin^2 \frac{1}{2}J}$	$\dots\dots\dots - \frac{8-6 \sin^2 \frac{1}{2}J}{\sin^2 \frac{1}{2}J}$	$\dots\dots\dots - \frac{8-10 \sin^2 \frac{1}{2}J}{\sin^2 \frac{1}{2}J}$

Ausserdem müssen hier in  $S$  und  $Z$  die Cosinusse, welche  $\Omega$  enthält, in Sinusse verwandelt werden.

$$\begin{array}{l}
 3) \dots\dots\dots \frac{4-5 \sin^2 \frac{1}{2}J + 6 \sin^4 \frac{1}{2}J}{2 \sin^2 \frac{1}{2}J \cos^2 \frac{1}{2}J} \dots\dots\dots - \frac{4-9 \sin^2 \frac{1}{2}J + 10 \sin^4 \frac{1}{2}J}{2 \sin^2 \frac{1}{2}J \cos^2 \frac{1}{2}J} \\
 4) \dots\dots\dots \frac{4-3 \sin^2 \frac{1}{2}J}{2 \sin^2 \frac{1}{2}J \cos^2 \frac{1}{2}J} \dots\dots\dots - \frac{4-9 \sin^2 \frac{1}{2}J + 10 \sin^4 \frac{1}{2}J}{2 \sin^2 \frac{1}{2}J \cos^2 \frac{1}{2}J} \\
 5) \dots\dots\dots \frac{3 \cos^2 \frac{1}{2}J}{\sin^2 \frac{1}{2}J} \dots\dots\dots - \frac{3-5 \sin^2 \frac{1}{2}J}{\sin^2 \frac{1}{2}J} \\
 6) \dots\dots\dots \frac{4+11 \sin^2 \frac{1}{2}J - 75 \sin^4 \frac{1}{2}J}{2(4-11 \sin^2 \frac{1}{2}J + 25 \sin^4 \frac{1}{2}J)} \dots\dots\dots \frac{44-122 \sin^2 \frac{1}{2}J + 250 \sin^4 \frac{1}{2}J}{2(4-11 \sin^2 \frac{1}{2}J + 25 \sin^4 \frac{1}{2}J)} \\
 7) \dots\dots\dots \frac{3+9 \sin^2 \frac{1}{2}J - 27 \sin^4 \frac{1}{2}J}{2(4-3 \sin^2 \frac{1}{2}J \cos^2 \frac{1}{2}J)} \dots\dots\dots \frac{3-27 \sin^2 \frac{1}{2}J + 30 \sin^4 \frac{1}{2}J}{2(4-3 \sin^2 \frac{1}{2}J \cos^2 \frac{1}{2}J)} \\
 8) \dots\dots\dots \frac{(3-30 \sin^2 \frac{1}{2}J) \cos^2 \frac{1}{2}J}{2(3-10 \sin^2 \frac{1}{2}J) \sin^2 \frac{1}{2}J} \dots\dots\dots - \frac{3-69 \sin^2 \frac{1}{2}J + 100 \sin^4 \frac{1}{2}J}{2(3-10 \sin^2 \frac{1}{2}J) \sin^2 \frac{1}{2}J} \\
 9) \dots\dots\dots \frac{4-9 \sin^2 \frac{1}{2}J + 18 \sin^4 \frac{1}{2}J}{2 \cos J \sin^2 \frac{1}{2}J} \dots\dots\dots - \frac{4-15 \sin^2 \frac{1}{2}J + 20 \sin^4 \frac{1}{2}J}{2 \cos J \sin^2 \frac{1}{2}J} \\
 10) \dots\dots\dots - \frac{4-5 \sin^2 \frac{1}{2}J - 6 \sin^4 \frac{1}{2}J}{2 \cos J \sin^2 \frac{1}{2}J} \dots\dots\dots - \frac{4-15 \sin^2 \frac{1}{2}J + 20 \sin^4 \frac{1}{2}J}{2 \cos J \sin^2 \frac{1}{2}J}
 \end{array}$$

Hier müssen ausserdem in *R* die Cosinuse, welche  $\Omega$  enthält, in Sinusse verwandelt werden.

Durch nochmalige Differentiation des Ausdrucks von  $n_0 B$  und übrigen gleiche Behandlung ergeben sich die

Factoren, womit  $\frac{\sigma \Omega}{\sqrt{1-\sigma^2}}$  multiplicirt werden muss, um die Ausdrücke von

$$S; \qquad V; \qquad Z$$

in Bezug auf *B* zu erhalten, wie folgt:

$$\begin{array}{l}
 1) \dots - \frac{(9-12 \sin^2 \frac{1}{2}J) \sin \frac{1}{2}J}{4-6 \sin^2 \frac{1}{2}J \cos^2 \frac{1}{2}J} \dots\dots\dots 0 \dots\dots\dots - \frac{(27-60 \sin^2 \frac{1}{2}J) \sin \frac{1}{2}J}{4-6 \sin^2 \frac{1}{2}J \cos^2 \frac{1}{2}J} \\
 2) \dots - \frac{(6+2 \sin^2 \frac{1}{2}J) \sin \frac{1}{2}J}{\cos^4 \frac{1}{2}J} \dots\dots\dots - \frac{8 \sin^2 \frac{1}{2}J}{\cos^4 \frac{1}{2}J} \dots\dots\dots - \frac{(6-10 \sin^2 \frac{1}{2}J) \sin \frac{1}{2}J}{\cos^4 \frac{1}{2}J} \\
 3) \dots\dots \frac{4+\sin^2 \frac{1}{2}J - 4 \sin^4 \frac{1}{2}J}{2 \sin^2 \frac{1}{2}J \cos^2 \frac{1}{2}J} \dots\dots\dots \frac{2-8 \sin^2 \frac{1}{2}J + 7 \sin^4 \frac{1}{2}J}{\sin^2 \frac{1}{2}J \cos^2 \frac{1}{2}J} \dots\dots\dots \frac{9-20 \sin^2 \frac{1}{2}J}{2 \sin^2 \frac{1}{2}J \cos^2 \frac{1}{2}J} \\
 4) \dots\dots \frac{4-7 \sin^2 \frac{1}{2}J + 4 \sin^4 \frac{1}{2}J}{2 \sin^2 \frac{1}{2}J \cos^2 \frac{1}{2}J} \dots\dots\dots \frac{2-2 \sin^2 \frac{1}{2}J - \sin^4 \frac{1}{2}J}{\sin^2 \frac{1}{2}J \cos^2 \frac{1}{2}J} \dots\dots\dots \frac{9-20 \sin^2 \frac{1}{2}J}{2 \sin^2 \frac{1}{2}J \cos^2 \frac{1}{2}J} \\
 5) \dots\dots\dots \frac{3-2 \sin^2 \frac{1}{2}J}{\sin^2 \frac{1}{2}J} \dots\dots\dots \frac{3 \cos J}{\sin^2 \frac{1}{2}J} \dots\dots\dots - \frac{3-10 \sin^2 \frac{1}{2}J}{\sin^2 \frac{1}{2}J}
 \end{array}$$

Ausserdem müssen hier in *V* die Cosinuse, die  $\Omega$  enthält, in Sinusse verwandelt werden.

Behandelt man endlich den Ausdruck für  $n_0 C$  des Art. 40 auf dieselbe Weise, so bekommt man die

Factoren, womit  $\frac{a\Omega}{\sqrt{1-e^2}}$  multiplicirt werden muss, um die Ausdrücke von

$$R \qquad \text{und} \qquad Y$$

in Bezug auf  $C$  zu erhalten.

1)	$-\frac{(3-6 \sin^2 \frac{1}{2} J) \cos^2 \frac{1}{2} J}{4-6 \sin^2 \frac{1}{2} J \cos^2 \frac{1}{2} J}$	0
2)	$-\frac{4+8 \sin^2 \frac{1}{2} J}{\cos^2 \frac{1}{2} J}$	$\frac{4-5 \sin^2 \frac{1}{2} J}{\cos^2 \frac{1}{2} J}$
3)	$-\frac{4-5 \sin^2 \frac{1}{2} J + 6 \sin^4 \frac{1}{2} J}{2 \sin^2 \frac{1}{2} J \cos^2 \frac{1}{2} J}$	$-\frac{4-9 \sin^2 \frac{1}{2} J + 10 \sin^4 \frac{1}{2} J}{2 \sin^2 \frac{1}{2} J \cos^2 \frac{1}{2} J}$
4)	$-\frac{4+8 \sin^2 \frac{1}{2} J - 2 \sin^4 \frac{1}{2} J}{2 \sin^2 \frac{1}{2} J \cos^2 \frac{1}{2} J}$	$-\frac{4-3 \sin^2 \frac{1}{2} J}{2 \sin^2 \frac{1}{2} J \cos^2 \frac{1}{2} J}$
5)	$-\frac{8 \cos^2 \frac{1}{2} J}{\sin^2 \frac{1}{2} J}$	$-\frac{8-5 \sin^2 \frac{1}{2} J}{\sin^2 \frac{1}{2} J}$
6)	$-\frac{44-70 \sin^2 \frac{1}{2} J + 89 \sin^4 \frac{1}{2} J}{2(4-44 \sin^2 \frac{1}{2} J + 25 \sin^4 \frac{1}{2} J) \cos^2 \frac{1}{2} J}$	$\frac{4-23 \sin^2 \frac{1}{2} J + 125 \sin^4 \frac{1}{2} J}{2(4-44 \sin^2 \frac{1}{2} J + 25 \sin^4 \frac{1}{2} J)}$
7)	$-\frac{8+6 \sin^2 \frac{1}{2} J - 89 \sin^4 \frac{1}{2} J + 48 \sin^6 \frac{1}{2} J}{2(4-8 \sin^2 \frac{1}{2} J \cos^2 \frac{1}{2} J) \cos^2 \frac{1}{2} J}$	$\frac{8-27 \sin^2 \frac{1}{2} J + 45 \sin^4 \frac{1}{2} J}{2(4-8 \sin^2 \frac{1}{2} J \cos^2 \frac{1}{2} J)}$
8)	$-\frac{8 \cos^2 \frac{1}{2} J}{2(8-40 \sin^2 \frac{1}{2} J) \sin^2 \frac{1}{2} J}$	$-\frac{8-89 \sin^2 \frac{1}{2} J + 50 \sin^4 \frac{1}{2} J}{2(8-40 \sin^2 \frac{1}{2} J) \sin^2 \frac{1}{2} J}$
9)	$-\frac{4-40 \sin^2 \frac{1}{2} J + 33 \sin^4 \frac{1}{2} J - 82 \sin^6 \frac{1}{2} J}{2 \cos J \cos^2 \frac{1}{2} J \sin^2 \frac{1}{2} J}$	$-\frac{4-15 \sin^2 \frac{1}{2} J + 30 \sin^4 \frac{1}{2} J}{2 \cos J \sin^2 \frac{1}{2} J}$
10)	$-\frac{4+6 \sin^2 \frac{1}{2} J - 15 \sin^4 \frac{1}{2} J}{2 \cos J \cos^2 \frac{1}{2} J \sin^2 \frac{1}{2} J}$	$\frac{4-8 \sin^2 \frac{1}{2} J - 10 \sin^4 \frac{1}{2} J}{2 \cos J \sin^2 \frac{1}{2} J}$

Ausserdem müssen hier in  $Y$  die Cosinusse, welche  $\Omega$  enthält, in Sinusse verwandelt werden. Schliesslich erhält man die

Factoren, womit  $\frac{a\Omega}{\sqrt{1-e^2}}$  multiplicirt werden muss, um die Ausdrücke von

$$S; \qquad V; \qquad Z$$

in Bezug auf  $C$  zu erhalten.

1)	$0$	$\frac{(9-42 \sin^2 \frac{1}{2} J) \sin^2 \frac{1}{2} J}{4-6 \sin^2 \frac{1}{2} J \cos^2 \frac{1}{2} J}$	0
2)	$-\frac{(6+2 \sin^2 \frac{1}{2} J) \sin^2 \frac{1}{2} J}{\cos^2 \frac{1}{2} J}$	$\frac{8 \sin^2 \frac{1}{2} J}{\cos^2 \frac{1}{2} J}$	$-\frac{(6-40 \sin^2 \frac{1}{2} J) \sin^2 \frac{1}{2} J}{\cos^2 \frac{1}{2} J}$
3)	$\frac{4+\sin^2 \frac{1}{2} J - 4 \sin^4 \frac{1}{2} J}{2 \sin^2 \frac{1}{2} J \cos^2 \frac{1}{2} J}$	$\frac{2-8 \sin^2 \frac{1}{2} J + 75 \sin^4 \frac{1}{2} J}{\sin^2 \frac{1}{2} J \cos^2 \frac{1}{2} J}$	$\frac{9-20 \sin^2 \frac{1}{2} J}{2 \sin^2 \frac{1}{2} J \cos^2 \frac{1}{2} J}$
4)	$\frac{7-5 \sin^2 \frac{1}{2} J}{2 \sin^2 \frac{1}{2} J \cos^2 \frac{1}{2} J}$	$-\frac{4-4 \sin^2 \frac{1}{2} J + 2 \sin^4 \frac{1}{2} J}{\sin^2 \frac{1}{2} J \cos^2 \frac{1}{2} J}$	$\frac{8}{2 \sin^2 \frac{1}{2} J \cos^2 \frac{1}{2} J}$
5)	$\frac{8-2 \sin^2 \frac{1}{2} J}{\sin^2 \frac{1}{2} J}$	$-\frac{8-6 \sin^2 \frac{1}{2} J}{\sin^2 \frac{1}{2} J}$	$-\frac{8-40 \sin^2 \frac{1}{2} J}{\sin^2 \frac{1}{2} J}$

Ausserdem müssen hier in  $S$  und  $Z$  die Cosinusse, welche  $\Omega$  enthält, in Sinusse verwandelt werden.

Es ist oben bemerkt worden, dass die Relation  $\delta K = -F\delta P$  strenge genommen nur für die erste Potenz der störenden Kraft gilt, es ist daher noch zu untersuchen, welche Abweichung davon sich herausstellt, wenn man auf das Quadrat und die höheren Potenzen derselben Rücksicht nimmt. Zu dem Ende bemerke ich, dass mit Uebergang der von  $dp'$  und  $dq'$  abhängigen Glieder, die hier nicht in Betracht kommen, die Gleichungen des Art. 13 für  $dP, dQ, dK$ , nachdem die erste mit  $Q$ , und die zweite mit  $P$  multiplicirt worden ist,

$$-\left(\frac{dP}{dt} + n\alpha Q\right)Q + \left(\frac{dQ}{dt} - n\alpha P\right)P = \frac{1}{4}\left(\frac{dK}{dt} - n\eta\right)\cos^2\frac{1}{2}J$$

geben. Zufolge des Art. 36 ist aber, auch mit Uebergang der von  $dp'$  und  $dq'$  abhängigen Glieder,

$$\frac{dP}{ndt} + \alpha Q = B$$

$$\frac{dQ}{ndt} - \alpha P = C$$

und damit erhalten wir

$$(24) \dots\dots\dots \frac{dK}{ndt} = \eta + \frac{C}{4\cos^2\frac{1}{2}J}P - \frac{B}{4\cos^2\frac{1}{2}J}Q$$

wodurch die Entwicklung von  $dK$  auf die Entwicklungen von  $B$  und  $C$  strenge hingeführt worden ist, die ohnehin für die Berechnung von  $\delta P$  und  $\delta Q$  ausgeführt werden müssen. Um die Abweichung des Werthes von  $\delta K$  von dem Werthe von  $-F\delta P$  zu ermitteln, brauchen wir nur für die Functionen  $\frac{P}{4\cos^2\frac{1}{2}J}$  und  $\frac{Q}{4\cos^2\frac{1}{2}J}$  ihre Ausdrücke durch  $\delta P$  und  $\delta Q$  zu substituiren. Um diese zu bekommen, bemerke ich, dass

$$Q = 2\sin\frac{1}{2}J_0 + \delta Q, \quad P = \delta P$$

$$\sin^2\frac{1}{2}J = \frac{1}{4}P^2 + \frac{1}{4}Q^2$$

ist, woraus sogleich

$$\cos^2\frac{1}{2}J = \cos^2\frac{1}{2}J_0 - \sin\frac{1}{2}J_0\delta Q - \frac{1}{4}\delta P^2 - \frac{1}{4}\delta Q^2$$

folgt. Bleiben wir jetzt in den folgenden Ausdrücken bei dem Quadrat der störenden Kraft stehen, so bekommen wir leicht

$$\frac{1}{\cos^2\frac{1}{2}J} = \frac{1}{\cos^2\frac{1}{2}J_0} + \frac{\sin\frac{1}{2}J_0}{\cos^3\frac{1}{2}J_0}\delta Q + \frac{1}{4\cos^4\frac{1}{2}J_0}\delta P^2 + \frac{1+3\sin^2\frac{1}{2}J_0}{4\cos^4\frac{1}{2}J_0}\delta Q^2$$

und hiemit

$$\frac{P}{\cos^2\frac{1}{2}J} = \frac{\delta P}{\cos^2\frac{1}{2}J_0} + \frac{\sin\frac{1}{2}J_0}{\cos^3\frac{1}{2}J_0}\delta P\delta Q$$

$$\frac{Q}{\cos^2\frac{1}{2}J} = 2\frac{\sin\frac{1}{2}J_0}{\cos^2\frac{1}{2}J_0} + \frac{1+\sin^2\frac{1}{2}J_0}{\cos^4\frac{1}{2}J_0}\delta Q + \frac{\sin\frac{1}{2}J_0}{2\cos^4\frac{1}{2}J_0}\delta P^2 + \frac{3\sin\frac{1}{2}J_0 + \sin^3\frac{1}{2}J_0}{2\cos^4\frac{1}{2}J_0}\delta Q^2$$

Substituirt man diese in (21), und nimmt auf die Gleichung

$$B = \frac{dP}{ndt} + 2\alpha \sin \frac{1}{2} J_0 + \alpha \delta Q$$

Rücksicht, so wird

$$\begin{aligned} \frac{dK}{ndt} = & \eta - F \frac{dP}{ndt} - \alpha \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} J_0 + \frac{C}{4 \cos^2 \frac{1}{2} J_0} \delta P - \left\{ \frac{1 + \sin^2 \frac{1}{2} J_0}{4 \cos^4 \frac{1}{2} J_0} B + \alpha F \right\} \delta Q \\ & - \frac{\sin \frac{1}{2} J_0}{8 \cos^4 \frac{1}{2} J_0} B \delta P^2 + \frac{\sin \frac{1}{2} J_0}{4 \cos^4 \frac{1}{2} J_0} C \delta P \delta Q - \frac{3 \sin \frac{1}{2} J_0 + \sin^3 \frac{1}{2} J_0}{8 \cos^4 \frac{1}{2} J_0} B \delta Q^2 \end{aligned}$$

wo wie oben

$$F = \frac{\sin \frac{1}{2} J_0}{2 \cos^2 \frac{1}{2} J_0}$$

ist. Setzt man nun

$$\delta K = -F \delta P + \delta \delta K$$

und

$$\begin{aligned} X = & \frac{C}{4 \cos^2 \frac{1}{2} J_0} \delta P - \left\{ \left[ \frac{1}{4 \cos^2 \frac{1}{2} J_0} + 2F^2 \right] B + \alpha F \right\} \delta Q \dots \dots \dots (22) \\ & - \frac{\sin \frac{1}{2} J_0}{8 \cos^4 \frac{1}{2} J_0} B \delta P^2 + \frac{\sin \frac{1}{2} J_0}{4 \cos^4 \frac{1}{2} J_0} C \delta P \delta Q - \frac{3 \sin \frac{1}{2} J_0 + \sin^3 \frac{1}{2} J_0}{8 \cos^4 \frac{1}{2} J_0} B \delta Q^2 \end{aligned}$$

so wird

$$\frac{d\delta \delta K}{ndt} = \eta - \alpha \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} J_0 + X \dots \dots \dots (23)$$

wo die Function X die Abweichung der Relation  $\delta K = -F \delta P$  von der Strenge ausdrückt. Der numerische Werth von X hat, wie man weiter unten sehen wird, grösstentheils nur auf die Bewegungen des Perigäums und der Knoten Einfluss.

§ 4. Substitution der numerischen Werthe in diejenigen im Vorhergehenden entwickelten Ausdrücke, die ganz bekannt sind.

52.

Die in meiner Berechnung der Mondstörungen stets angewandten Elemente der Mondbahn sind die folgenden,

$$\begin{aligned} n &= 17179157,4 \dots \text{ in } 365\frac{1}{4} \text{ Tagen} \\ e &= 0,05490079 \\ J &= 5^\circ 8' 48'' \end{aligned}$$

die ich hier wieder zu Grunde legen werde. Die Vergleichung der daraus berechneten Störungen mit den Beobachtungen hat gezeigt, dass dieser Werth von n so nahe richtig ist, dass daraus nicht die geringste merkliche Verbesserung der Störungen erwächst. Denn nach Ausweis der Mondtafeln ist

$$n = 17179158,3715$$

gefunden worden, und der Unterschied 1,0 zwischen diesen beiden Werthen ist auf die Berechnung der Störungen bis auf Tausendtheile von Secunden herab durchaus ohne Wirkung. Um zu untersuchen, in wie weit dieses auch mit den obigen Werthen von  $e$  und  $J$  der Fall ist, müssen wir die Betrachtung aufnehmen, dass der Mittelpunkt der Figur des Mondes mit dem Schwerpunkt desselben nicht zusammenfällt. Nennen wir die grade Aufsteigung und Abweichung des Mondes  $\alpha$  und  $\delta$ , und den Winkel zwischen dem durch den Mond gezogenen Declinationskreis und dem auf die Mondbahn am Orte des Mondes senkrecht gefällten Bogen grössten Kreises  $K$ , ferner die auf den Radius Vector projectirte und in Theilen der Entfernung des Mondes von der Erde ausgedrückte Entfernung des Mittelpunkts der Figur des Mondes vom Schwerpunkt desselben  $N$ , die mittlere Mondlänge  $b$ , die Neigung des Mondaquators gegen die Ecliptik  $J$ , und setzen

$$u = (f + \omega) - (l + \Theta)$$

$$A_3 = \cos K \frac{2+e \cos f}{1-e^2} \sin f, \quad A_5 = -\sin K \sin (f + \omega)$$

$$B_3 = \sin K \frac{2+e \cos f}{1-e^2} \sin f, \quad B_5 = \cos K \sin (f + \omega)$$

so ist,\*) abgesehen von den Verbesserungen der übrigen Elemente.

$$\cos \delta \cdot \Delta \alpha = A_3 (\Delta e + Ne) + A_5 (\Delta J + N \sin (J + J)) \\ + \{n \delta z \cos K + u \sin (J + J) \cos (f + \omega) \sin K\} N$$

$$\Delta \delta = B_3 (\Delta e + Ne) + B_5 (\Delta J + N \sin (J + J)) \\ + \{n \delta z \sin K - u \sin (J + J) \cos (f + \omega) \cos K\} N$$

Wenn also  $N$  nicht gleich Null ist, so bekommt man durch die Vergleichung der theoretisch berechneten Mondörter mit den beobachteten nicht unmittelbar  $\Delta e$  und  $\Delta J$ , sondern statt dessen  $\Delta e + Ne$  und  $\Delta J + N \sin (J + J)$ . Bei der nachherigen Berechnung der Mondörter müssen nun zwar die beiden letztgenannten Grössen angewandt werden, aber zur Berechnung der Störungen bloss  $e + \Delta e$  und  $J + \Delta J$ , und es müssen daher diese aus jenen ermittelt werden. Bei der Vergleichung mit den Beobachtungen ist nach Ausweis der Mondtafeln (p. 16) gefunden worden

---

\*) S. Mem. of the Royal Astronomical Society, Vol. XXIV. Sur la figure de la Lune. Art. 16.

$$1 + N = 1,0001544^*)$$

und hiemit ergibt sich

$$Ne = + 0,000008476$$

$$N \sin (J + J') = + 3,70$$

wenn man  $J = 1^\circ 32'$  setzt.

Das zweite dieser Glieder ist (p. 15) in dem Gliede  $+ 3,70 \sin (g + \omega)$  — welches etwas genauer ist, als wenn  $+ 3,70 \sin (f + \omega)$  gesetzt worden wäre — den Breitenstörungen hinzugefügt, aber das erste dem dort angeführten Werthe von  $e$  einverleibt gelassen worden, weil es mit zur Berechnung der Mittelpunktsgleichung gezogen werden muss. Wir haben daher (p. 15)

$$e + \Delta e + Ne = 0,05490807$$

woraus

$$e + \Delta e = 0,05489959$$

und durch Hilfe des oben angeführten, in den Störungsrechnungen angewandten Werthes von  $e$

$$\Delta e = - 0,00000120 = - 0,25$$

Dieser Werth ist zu klein, um Berücksichtigung zu verdienen, da sein Einfluss auf den grössten der Störungscoefficienten, der Evection in Länge, kein volles Zehnthheil einer Secunde beträgt; höchstens wird unten untersucht werden, ob er zur Knotenbewegung etwas Merkliches beitragen kann.

Für den Werth von  $J$  ist in den Mondtafeln  $5^\circ 8' 39,96$  angegeben, aber in den Breitenstörungen kommt ausserdem das Glied  $+ 2,705 \sin (g + \omega)$  vor, und um den mittleren Werth der Neigung zu erhalten, muss der Coefficient dieses Gliedes zu dem eben angeführten Werth von  $J$  addirt werden. Es ergibt sich daher

$$J + \Delta J = 5^\circ 8' 42,67$$

da, wie oben erklärt wurde, das Glied  $N \sin (J + J')$  schon abgetrennt ist. Mit dem oben angegebenen, bei den Störungsrechnungen zu Grunde gelegten Werthe von  $J$  bekommt man hieraus

---

\*) Nimmt man die Entfernung des Mondes von der Erde in runder Zahl zu 50000 geogr. Meilen an, und multiplicirt diese Zahl mit dem obigen Werthe von  $N$ , so bekommt man 8 geogr. Meilen für die Entfernung des Mittelpunkts der Figur des Mondes von dem Schwerpunkt desselben, wie ich früher angegeben habe.

$$\Delta J = - 5,33$$

Die grösste Wirkung dieses Werthes erstreckt sich, wie sich weiter unten zu erkennen geben wird, auf die Bewegung des Perigäums; auf den Coefficienten der Evection in Breite wirkt er mit  $- 0,150$  ein, wie leicht zu finden ist, und auf alle übrigen Störungscoefficienten bedeutend weniger.\*)

Die bei der Berechnung der Mondstörungen angewandten Elemente der Sonnenbahn sind die folgenden:

$$\begin{aligned} n' &= 1295966,1 \dots \text{ in } 365\frac{1}{4} \text{ Tagen} \\ e' &= 0,01679226 \dots \text{ für den Anf. d. J. 1800} \\ ny' &= 11,25 \end{aligned}$$

Ich gebe diese Grössen auch so, wie ich sie angewandt habe. Sie sind vor der Beendigung meiner Sonnentafeln ermittelt und auf die Berechnung der Mondstörungen angewandt worden. Die kleinen Unterschiede hievon, die sich durch meine Bestimmung der Elemente der Sonnenbahn, die in meinen Sonnentafeln angegeben sind, herausgestellt haben, sind auf die Mondstörungen von keinem merklichen Einfluss. Wenn übrigens sich irgend ein merklicher Einfluss herausgestellt hätte, so wäre er leicht zu berücksichtigen gewesen.

Die Logarithmen derjenigen Functionen dieser Elemente, die hier vorzugsweise gebraucht werden, sind die folgenden:

$$\begin{aligned} \log n &= 7,2350019 \\ \log e &= 8,7395786 \\ \log \sqrt{1-e^2} &= 9,9993445 \\ \log \sin \frac{1}{4}J &= 8,6522274 \\ \log \cos \frac{1}{4}J &= 9,9995618 \\ \log \cos J &= 9,9982456 \\ \log n' &= 6,1125936 \\ \log e' &= 8,2251091 \\ \log \sqrt{1-e'^2} &= 9,9999388 \end{aligned}$$

Ferner habe ich angenommen

$$m = \frac{1}{8}; \quad m' = 354936$$

und hieraus folgt

---

\*) z. B. auf die Evection in Länge beträgt der Einfluss nur  $+ 0,012$ .



$$\log u = \log \frac{n'}{n} = 8,8775917$$

$$u = 0,07543826$$

$$\log u_1^2 = \log \frac{m'}{4-m} u^2 = 3,0696074 \dots \text{ in Sekunden;}$$

Da  $a^3 n^2 = k^2 (1+m)$ ;  $a'^3 n'^2 = k^2 (1+m')$ , so wird

$$\frac{a}{a'} = \sqrt[3]{u^2 \frac{1+m}{1+m'}}$$

und hiemit

$$\log \mu = \log \frac{a}{a'} = 7,4034757$$

$$\lambda = \frac{1-m}{1+m} = \frac{7}{8}$$

$$\left. \begin{aligned} \log \lambda \mu u_1^2 &= 0,4622252 \\ \log \mu^2 u_1^2 &= 7,87656 \end{aligned} \right\} \text{ in Sekunden.}$$

53.

Die Zahlenwerthe der Functionen von  $J$ , womit die zehn einzelnen Theile von  $a\Omega$  multiplicirt sind (s. Artt. 21 u. 22), und die auch zur Berechnung von  $T$ , etc. dienen, ergeben sich hieraus wie folgt.

$$\log \beta_1 = \log \frac{1}{2} (1 - 6 \sin^2 \frac{1}{2} J \cos^2 \frac{1}{2} J) = 9,3926659$$

$$\log \beta_2 = \log \frac{7}{8} \cos^4 \frac{1}{2} J = 9,8733085$$

$$\log \beta_3 = \log \frac{7}{8} \sin^2 \frac{1}{2} J \cos^2 \frac{1}{2} J = 7,4796697$$

$$\log \beta_4 = \log \beta_3$$

$$\log \beta_5 = \log \frac{7}{8} \sin^4 \frac{1}{2} J = 4,48397$$

$$\log \beta_6 = \log \frac{3}{8} (1 - 14 \sin^2 \frac{1}{2} J + 25 \sin^4 \frac{1}{2} J) = 9,5643379$$

$$\log \beta_7 = \log \frac{3}{8} (1 - 3 \sin^2 \frac{1}{2} J \cos^2 \frac{1}{2} J) = 9,79325$$

$$\log \beta_8 = \log \frac{7}{8} (3 - 10 \sin^2 \frac{1}{2} J) \sin^2 \frac{1}{2} J = 7,65370$$

$$\log \beta_9 = \log \frac{15}{8} \cos J \sin^2 \frac{1}{2} J = 7,57570$$

$$\log \beta_{10} = \log \beta_9$$

ausserdem erhält man durch die Ausdrücke der Artt. 21 und 22 die folgenden Functionen, die nicht minder wie die vorhergehenden in der Berechnung aller bisher erklärten Functionen gebraucht werden,

$$\log K^{(0)} = 0,0001836$$

$$\bullet K^{(1)} = 8,4013381$$

$$\bullet K^{(2)} = 6,802496$$

$$\bullet K^{(3)} = 5,19549$$

$$\bullet K^{(4)} = 3,583$$

$$K^{(-i)} = K^{(i)}$$

$$\begin{aligned} \log G^{(2)} &= 1,520 \\ \text{» } G^{(4)} &= 2,9944 \\ \text{» } G^{(0)} &= -\infty \\ \text{» } G^{(-1)} &= 7,9240638n \\ \text{» } G^{(-2)} &= 9,9996937 \\ \text{» } G^{(-3)} &= 8,7689080 \\ \text{» } G^{(-4)} &= 7,37937 \\ \text{» } G^{(-5)} &= 5,9210 \\ \text{» } G^{(-6)} &= 4,423 \end{aligned}$$

---


$$\begin{aligned} \log C^{(2)} &= 4,958 \\ \text{» } C^{(4)} &= 6,5885 \\ \text{» } C^{(0)} &= 8,22542 \\ \text{» } C^{(-1)} &= 0,0002449 \\ \text{» } C^{(-2)} &= 8,70235 \\ \text{» } C^{(-3)} &= 7,2714 \\ \text{» } C^{(-4)} &= 5,784 \end{aligned}$$

---


$$\begin{aligned} \log D^{(0)} &= -\infty \\ \text{» } D^{(-1)} &= 5,5471 \\ \text{» } D^{(-2)} &= 8,22496n \\ \text{» } D^{(-3)} &= 9,99926 \\ \text{» } D^{(-4)} &= 8,92354 \\ \text{» } D^{(-5)} &= 7,6509 \\ \text{» } D^{(-6)} &= 6,285 \end{aligned}$$


---

54.

Wir erhalten ferner durch die Ausdrücke der Artt. 21 u. 22 die folgenden Werthe, die zur Berechnung der Coefficienten von  $a\Omega$  dienen.

$$\begin{aligned} \log P^{(0)} &= 0,0019594 \\ \text{» } P^{(1)} &= 8,7394151n \\ \text{» } P^{(2)} &= 6,876661n \\ \text{» } P^{(3)} &= 5,31491n \\ \text{» } P^{(4)} &= 3,8781n \\ \text{» } P^{(5)} &= 2,512n \\ P^{(-6)} &= P^{(0)} \end{aligned}$$


---

$$\begin{aligned}
 \log Q^{(-3)} &= 2,122n \\
 \text{» } Q^{(-2)} &= 3,775n \\
 \text{» } Q^{(-1)} &= 5,68418n \\
 \text{» } Q^{(0)} &= 7,8770972 \\
 \text{» } Q^{(1)} &= 9,2159903n \\
 \text{» } Q^{(2)} &= 9,9967208 \\
 \text{» } Q^{(3)} &= 8,7364651 \\
 \text{» } Q^{(4)} &= 7,475881 \\
 \text{» } Q^{(5)} &= 6,23293 \\
 \text{» } Q^{(6)} &= 5,0057 \\
 \text{» } Q^{(7)} &= 3,795
 \end{aligned}$$

---


$$\begin{aligned}
 \log A^{(-3)} &= 3,696 \\
 \text{» } A^{(-2)} &= 5,4405 \\
 \text{» } A^{(-1)} &= 7,61760 \\
 \text{» } A^{(0)} &= 9,1384993n \\
 \text{» } A^{(1)} &= 0,0026076 \\
 \text{» } A^{(2)} &= 8,4359227n \\
 \text{» } A^{(3)} &= 7,05078n \\
 \text{» } A^{(4)} &= 5,6836n \\
 \text{» } A^{(5)} &= 4,352n
 \end{aligned}$$

---


$$\begin{aligned}
 \log B^{(-1)} &= 4,726 \\
 \text{» } B^{(0)} &= 6,8597n \\
 \text{» } B^{(1)} &= 8,33119 \\
 \text{» } B^{(2)} &= 9,39038n \\
 \text{» } B^{(3)} &= 9,99210 \\
 \text{» } B^{(4)} &= 8,90941 \\
 \text{» } B^{(5)} &= 7,74623 \\
 \text{» } B^{(6)} &= 6,5708 \\
 \text{» } B^{(7)} &= 5,386
 \end{aligned}$$


---

55.

Durch Hilfe der vorhergehenden Zahlenwerthe bekommt man nun leicht die folgenden Zahlenwerthe der Coefficienten von  $a\Omega$ , wo die Logarithmen statt der Zahlen selbst, die in Einheiten der Secunde ausgedrückt verstanden sind, stehen.

$g, g'$	$a\Omega$ cos	$g, g'$	$a\Omega$ cos	$g, g'$	$a\Omega$ cos
1.	$=0\omega+0\omega'$	2.		3.	
0,0	2,4644160	4,-1	8,3429n	-1,1	4,635n
1,0	1,5029020n	5,-1	7,100n	0,1	6,8277
2,0	9,64015n	-2,-2	6,698n	1,1	8,16661n
3,0	8,0784n	-1,-2	8,62679n	2,1	8,94734
4,0	6,642n	0,-2	0,8197068	3,1	7,6871
-4,-1	5,043n	1,-2	2,1585999n	4,1	6,427
-3,-1	6,480n	2,-2	2,9393304	-2,0	4,304n
-2,-1	8,04130n	3,-2	1,6790747	-1,0	6,2336n
-1,-1	9,9040565n	4,-2	0,41849	0,0	8,4265579
0,-1	1,1666005	5,-2	9,1755	1,0	9,7654510n
1,-1	9,9040565n	6,-2	7,948	2,0	0,5461815
2,-1	8,04130n	7,-2	6,737	3,0	9,28593
3,-1	6,480n	-2,-3	5,467n	4,0	8,02534
4,-1	5,043n	-1,-3	7,3960n	5,0	6,7824
-3,-2	4,881n	0,-3	9,5889213	-1,-1	4,635n
-2,-2	6,443n	1,-3	0,9278142n	0,-1	6,8277
-1,-2	8,30523n	2,-3	1,7085447	1,-1	8,16661n
0,-2	9,56777	3,-3	0,44829	2,-1	8,94734
1,-2	8,30523n	4,-3	9,1877	3,-1	7,6871
2,-2	6,443n	5,-3	7,945	4,-1	6,427
3,-2	4,881n	6,-3	6,717	1,-2	6,568n
-2,-3	4,863n	-1,-4	6,006n	2,-2	7,3485
-1,-3	6,698n	0,-4	8,1994	3,-2	6,088
0,-3	7,9608	1,-4	9,53828n	4.	$=2\omega'$
1,-3	6,698n	2,-4	0,31901	-1,4	6,668n
2,-3	4,836n	3,-4	9,0587	0,4	7,9307
-1,-4	5,087n	4,-4	7,798	1,4	6,668n
0,-4	6,348	5,-4	6,555	-2,3	6,195n
1,-4	5,087n	0,-5	6,744	-1,3	8,0576n
2.	$=2\omega-2\omega'$	1,-5	8,0799n	0,3	9,32015
1,1	5,153n	2,-5	8,8606	1,3	8,0576n
2,1	5,934	3,-5	7,600	2,3	6,195n
3,1	4,674	4,-5	6,340	-3,2	5,863n
0	$=0$	1,-6	6,582n	-2,2	7,4256n
-1,-1	6,551	2,-6	7,363	-1,2	9,28839n
0,-1	8,74408n	3,-6	6,102	0,2	0,5509299
1,-1	0,08297	3.	$=2\omega$	1,2	9,28839n
2,-1	0,86370n	1,2	6,568n	2,2	7,4256n
3,-1	9,60344n	2,2	7,3485	3,2	5,863n
		3,2	6,088	-2,1	5,350

4.		6.		7.	
-1,1	7,2128	-1,-2	6,346	1,-5	6,237
0,1	8,47530n	0,-2	7,8674n	2,-5	7,296n
1,1	7,2128	1,-2	8,73152	3,-5	7,898
2,1	5,350	2,-2	7,1648n	4,-5	6,815
0	= 0	3,-2	5,780n		
5.	= 2 $\omega$ + 2 $\omega'$	0,-3	6,432n	8.	= $\omega$ + $\omega'$
0,2	5,430	1,-3	7,301	0,2	5,957n
1,2	6,7692n	2,-3	5,734n	1,2	6,824
2,2	7,54999			2,2	5,254n
3,2	6,2897	7.	= 3 $\omega$ - 3 $\omega'$	-1,1	5,734
6.	= $\omega$ - $\omega'$	1,-2	6,812n	0,1	7,2546n
0,1	5,753n	2,-2	7,8709	1,1	8,1187
1,1	6,618	3,-2	8,4726n	2,1	6,552n
2,1	5,051n	4,-2	7,390n	0,0	5,479n
		5,-2	6,226n	1,0	6,344
-1,0	5,870	-1,-3	4,981	9.	= 3 $\omega$ - $\omega'$
0,0	7,39048n	0,-3	7,1144n	2,-1	7,428n
1,0	8,25459	1,-3	8,58593	3,-1	8,0302
2,0	6,6879n	2,-3	9,64512n	4,-1	6,948
3,0	5,303n	3,-3	0,24684		
-2,-1	5,467	4,-3	9,16445	10.	= $\omega$ - 3 $\omega'$
-1,-1	7,6444	5,-3	8,0010	0	= 0
0,-1	9,1653073n	6,-3	6,825	0,-3	7,176n
1,-1	0,0294156	0,-4	6,039n	1,-3	8,0398
2,-1	8,46273n	1,-4	7,510	2,-3	6,473n
3,-1	7,0776n	2,-4	8,5694n		
4,-1	5,711n	3,-4	9,1711		
		4,-4	8,0884		
		5,-4	6,925		

Die Reihenfolge der Argumente in der vorstehenden Tafel ist geordnet:

1) nach den 10 Theilen, in welche  $a\Omega^{(1)} + a\Omega^{(2)}$  oben zerlegt worden ist und die sich durch die verschiedenen Functionen von  $\omega$  und  $\omega'$  unterscheiden, die im Argument den Vielfachen von  $g$  und  $g'$  hinzugefügt werden müssen. Diese sind neben dem bez. Index von  $a\Omega$  über einer jeden dieser 10 Hauptabtheilungen angegeben, während die erste Columne der Tafel die Vielfachen von  $g$  und  $g'$  angiebt. Z. B. in der Abtheilung 2) neben den Zahlen 1 und -2 der ersten Columne steht der Logarithmus des Coefficienten von

$$\cos (g - 2g' + 2\omega - 2\omega')$$

u. s. w. Jede dieser 10 Abtheilungen ist überdies von der folgenden durch einen Doppelstrich abgesondert;

2) innerhalb jeder der eben genannten 10 Abtheilungen, nach der Ordnung der Zahlen, mit welchen  $g'$  in den Argumenten multiplicirt ist. Die hieraus hervorgehenden Abtheilungen sind durch einfache Striche von einander abgesondert;

3) in jeder dieser Abtheilungen nach der Ordnung der Zahlen, mit welchen  $g$  multiplicirt ist.

Diese Anordnung, die ich im Folgenden stets beibehalten werde, gewährt einen sicheren Ueberblick über das Ganze und über die Glieder, die merklich werden können. Jede der unter 3) genannten Abtheilungen besteht aus einer unendlichen Reihe, die von einem grössten Gliede an vorwärts und rückwärts in Bezug auf den Index von  $g$ , oder in Bezug auf die Excentricität der Mondbahn convergirt. Stellt man hingegen innerhalb jeder der unter 1) genannten Abtheilungen die Glieder der verschiedenen unter 2) genannten Abtheilungen zusammen, in welchen der Index von  $g$  derselbe ist, so bekommt man lauter Reihen, die von einem grössten Gliede an vorwärts und rückwärts in Bezug auf den Index von  $g'$ , oder in Bezug auf die Excentricität der Erd- (oder Sonnen-) Bahn convergiren. Die unter 1) genannten Abtheilungen selbst bilden endlich gruppenweis die Glieder einer unendlichen, convergirenden Reihe, die nach den Potenzen des Verhältnisses der mittleren Entfernung des Mondes von der Erde zu der der Sonne von der Erde fortschreitet.

## 56.

Zur Erlangung der numerischen Werthe der Coefficienten von  $T_0$  wurden zuerst die Ausdrücke des Art. 27 in Zahlen verwandelt und wie folgt gefunden:

$$\begin{aligned} \log P^{-1,0} &= 9,2165362n \\ \text{» } P^{-1,1} &= 0,3003753 \\ \text{» } P^{-1,2} &= 8,7385964 \\ \text{» } P^{-1,3} &= 7,35291 \\ \text{» } P^{-1,4} &= 6,04410 \\ \text{» } P^{-1,5} &= 4,772 \end{aligned}$$

$\log P^{-1,-1} = -\infty$
» $P^{-1,-2} = 4,8382n$
» $P^{-1,-3} = 3,629n$
<hr style="width: 50%; margin: 0 auto;"/>
$P^{1,i} = -P^{-1,-i}$
<hr style="width: 50%; margin: 0 auto;"/>
$\log Q^{-1,-1} = 4,193$
» $Q^{1,-2} = 4,382n$
» $Q^{-1,0} = 6,31674$
» $Q^{1,-3} = 5,9177n$
» $Q^{-1,1} = 8,2194407n$
» $Q^{1,-1} = 7,7228180n$
» $Q^{-1,2} = 9,5158734$
» $Q^{1,0} = 9,7395791$
» $Q^{-1,3} = 0,2937980n$
» $Q^{1,1} = 0,7770595n$
» $Q^{-1,4} = 9,3360615n$
» $Q^{1,2} = 9,3402468n$
» $Q^{-1,5} = 8,26978n$
» $Q^{1,3} = 8,02148n$
» $Q^{-1,6} = 7,1676n$
» $Q^{1,4} = 6,7607n$
» $Q^{-1,7} = 6,055n$
» $Q^{1,5} = 5,535n$
<hr style="width: 50%; margin: 0 auto;"/>
$\log A^{-1,0} = 7,9740$
» $A^{1,-2} = 7,479$
» $A^{-1,1} = 9,28206n$
» $A^{1,-1} = 9,47998$
» $A^{-1,2} = 9,99407$
» $A^{1,0} = 0,7009291n$
» $A^{-1,3} = 8,91156$
» $A^{1,1} = 9,39224$
» $A^{-1,4} = 7,722$
» $A^{1,2} = 7,690$

$\log B^{-1,1} = 7,403$
» $B^{1,-1} = 6,890$
» $B^{-1,2} = 8,8241n$
» $B^{1,0} = 8,8983n$
» $B^{-1,3} = 9,86534$
» $B^{1,1} = 0,19346$
» $B^{-1,4} = 0,46315n$
» $B^{1,2} = 0,95007n$
» $B^{-1,5} = 9,6049n$
» $B^{1,3} = 9,7570n$
» $B^{-1,6} = 8,609n$
» $B^{1,4} = 8,545n$

Ferner nach den Ausdrücken der Artt. 47 u. 48 die

Logg. der Factoren, womit die Coefficienten von  $T_0$  multiplicirt werden müssen, um die von

	$R$	und	$Y$
zu erhalten,			
1) . . . . .	$-\infty$		9,4338983n
2) . . . . .	8,9541338n		8,9541338n
3) . . . . .	1,3468945		1,3468945
4) . . . . .	1,3486490		1,3468945
5) . . . . .	1,64880		1,64880
6) . . . . .	8,65310n		9,69932n
7) . . . . .	9,13022n		9,13022n
8) . . . . .	1,34777		1,34484
9) . . . . .	1,34602		1,34604
10) . . . . .	1,34953n		1,34064

Logg. der Factoren, womit die Coefficienten von  $T_0$  multiplicirt werden müssen, um die von

	$S,$	$V,$	$Z$
zu erhalten.			
1) . . . . .	0,48063n	$-\infty$	0,47710n
2) . . . . .	0,00437n	7,90827	9,99942n
3) . . . . .	2,39188n	2,39099	2,39010
4) . . . . .	2,39889n	2,39454	2,39010
5) . . . . .	3,1726n	3,1726	2,1726



57.

Wir können nun durch Anwendung der Ausdrücke des Art. 26 die folgende Zusammenstellung machen, welche die Coefficienten von  $T_0$ , so wie die der hier erforderlichen Differentialquotienten von  $T_0$  enthält.

$\gamma, g, g'$	$T_0$ sin	$R$ cos	$Y$ sin	$S$ sin	$V$ cos	$Z$ sin
1.						
-1,1,0	+1158'410		-314'60	-3503'		-3475'
0,1,0	-95.504		+25.94	+289		+286
-1,2,0	+31.775		-8.63	-96		-95
1,0,0	+95.50433		-25.94	-289		-286
0,2,0	-2.620		+0.71	+8		+8
-1,3,0	+1.308		-0.36	-4		-4
1,1,0	0		0	0		0
0,3,0	-0.108		+0.03			
-1,4,0	+0.064		-0.02			
1,2,0	+0.004		0.00			
0,4,0	-0.005					
-1,5,0	+0.003					
1,3,0	• 0.000					
0,-3,-1	+0.003					
-1,-2,-1	0.000					
1,-1,-1	-0.002					
0,-2,-1	+0.066		-0.02			
-1,-1,-1	0		0.00			
1,-3,-1	-0.033		+0.01			
0,-1,-1	+2.406		-0.65	-7		-7
-1,0,-1	-2.40535		+0.65	+7		+7
1,-2,-1	-0.800		+0.22	+2		+2
0,0,-1	0		0	0		0
-1,1,-1	+29.17538		-7.92	-88		-88
1,-1,-1	-29.17538		+7.92	+88		+88
0,1,-1	-2.406		+0.65	+7		+7
-1,2,-1	+0.800		-0.22	-2		-2
1,0,-1	+2.40535		-0.65	-7		-7
0,2,-1	-0.066		+0.02			
-1,3,-1	+0.033		-0.01			
1,1,-1	0		0.00			
0,3,-1	-0.003					
-1,4,-1	+0.002					
1,2,-1	0.000					
0,-2,-2	+0.002					
-1,-1,-2	0					
1,-3,-2	-0.004					
0,-1,-2	+0.064		+0.02			
-1,0,-2	-0.0606		+0.02			
1,-2,-2	-0.020		+0.01			

1.						
0,0,-2	0		0	0		0
-1,1,-2	+0.7348		-0.20	-2		-2
1,-1,-2	-0.7348		+0.20	+2		+2
0,1,-2	-0.064		+0.02			
-1,2,-2	+0.020		-0.04			
1,0,-2	+0.0606		-0.02			
0,2,-2	-0.002					
-1,3,-2	+0.004					
1,1,-2	0					
0,-1,-3	+0.002					
-1,0,-3	-0.002					
1,-2,-3	0.000					
0,0,-3	0					
-1,1,-3	+0.048					
1,-1,-3	-0.048					
0,1,-3	-0.002					
-1,2,-3	0.000					
1,0,-3	+0.002					
2.						
0 = 0						
0,-1,-1	-0.004					
-1,0,-1	-0.00153					
1,-2,-1	+0.004					
0,0,-1	0	0	0			
-1,1,-1	+0.12204	-0.04	-0.04			
1,-1,-1	+0.03889	0.00	0.00			
0,1,-1	+3.632	-0.33	-0.33	-4		-4
-1,2,-1	-2.415	+0.22	+0.22	+2		+2
1,0,-1	-4.04165	+0.36	+0.36	+4		+4
0,2,-1	-43.838	+3.94	+3.94	+44		+44
-1,3,-1	+44.480	-1.30	-1.30	-15		-14
1,1,-1	+44.060	-3.96	-3.96	-45		-44
0,3,-1	-3.612	+0.32	+0.32	+4		+4
-1,4,-1	+1.596	-0.14	-0.14	-2		-2
1,2,-1	+1.611	-0.15	-0.15	-2		-2
0,4,-1	-0.264	+0.02	+0.02			
-1,5,-1	+0.137	-0.04	-0.04			
1,3,-1	+0.077	-0.04	-0.04			
0,5,-1	-0.049					
-1,6,-1	+0.044					
1,4,-1	+0.004					
0,-2,-2	+0.003					
-1,-1,-2	+0.004					
1,-3,-2	-0.004					
0,-1,-2	+0.127	-0.04	-0.04			
-1,0,-2	+0.1847	-0.02	-0.02			
1,-2,-2	-0.073	+0.04	+0.04			
0,0,-2	0	0	0	0		0
-1,1,-2	-14.5228	+1.34	+1.34	+15		+15
1,-1,-2	-4.6284	+0.42	+0.42	+5		+5

BERECHNUNG DER IN DEN MONDTAFELN ANGEWANDTEN STÖRUNGEN. 187

2.						
0,1,-2	-432.236	+38.90	+38.90	+437	-4	+431
-1,2,-2	+287.397	-25.86	-25.86	-290	+2	-287
1,0,-2	+481.0483	-43.28	-43.28	-486	+4	-480
0,2,-2	+5217.731	-469.47	-469.47	-5270	+42	-5208
-1,3,-2	-1723.485	+155.08	+155.08	+1741	-14	+1720
1,1,-2	-5244.077	+471.85	+471.85	+5296	-43	+5234
0,3,-2	+429.831	-38.67	-38.67	-434	+3	-429
-1,4,-2	-189.964	+17.09	+17.09	+192	-2	+190
1,2,-2	-191.803	+17.26	+17.26	+194	-2	+191
0,4,-2	+31.454	-2.83	-2.83	-32		-31
-1,5,-2	-16.308	+1.47	+1.47	+17		+16
1,3,-2	-9.207	+0.83	+0.83	+9		+9
0,5,-2	+2.247	-0.20	-0.20	-2		-2
-1,6,-2	-1.289	+0.12	+0.12	+1		+1
1,4,-2	-0.505	+0.05	+0.05	+1		+1
0,6,-2	+0.160					
-1,7,-2	-0.100					
1,5,-2	-0.030					
0,-1,-3	+0.007					
-1,0,-3	+0.011					
1,-2,-3	-0.004					
0,0,-3	0	0	0			
-1,1,-3	-0.854	+0.08	+0.08			
1,-1,-3	-0.272	+0.02	+0.02			
0,1,-3	-25.406	+2.29	+2.29	+26		+25
-1,2,-3	+16.892	-1.52	-1.52	-17		-17
1,0,-3	+28.275	-2.54	-2.54	-29		-28
0,2,-3	+306.687	-27.59	-27.59	-310	+2	-306
-1,3,-3	-101.303	+9.12	+9.12	+102	-1	+101
1,1,-3	-308.236	+27.72	+27.72	+311	-2	+308
0,3,-3	+25.266	-2.27	-2.27	-26		-25
-1,4,-3	-11.166	+1.00	+1.00	+11		+11
1,2,-3	-11.274	+1.01	+1.01	+11		+11
0,4,-3	+1.849	-0.17	-0.17	-2		-2
-1,5,-3	-0.959	+0.09	+0.09	+1		+1
1,3,-3	-0.541	+0.05	+0.05	+1		+1
0,5,-3	+0.132					
-1,6,-3	-0.076					
1,4,-3	-0.030					
0,0,-4	0					
-1,1,-4	-0.035					
1,-1,-4	-0.044					
0,1,-4	-1.036	+0.09	+0.09			
-1,2,-4	+0.689	-0.06	-0.06			
1,0,-4	+1.153	-0.10	-0.10			
0,2,-4	+12.507	-1.13	-1.13	-13		-12
-1,3,-4	-4.134	+0.37	+0.37	+4		+4
1,1,-4	-12.570	+1.13	+1.13	+13		+13

2.						
0,3,-4	+1.030	-0.09	-0.09			
-1,4,-4	-0.455	+0.04	+0.04			
1,2,-4	-0.460	+0.04	+0.04			
0,4,-4	+0.075					
-1,5,-4	-0.039					
1,3,-4	-0.022					
0,4,-5	-0.036					
-1,2,-5	+0.024					
1,0,-5	+0.040					
0,2,-5	+0.435					
-1,3,-5	-0.144					
1,1,-5	-0.437					
0,3,-5	+0.036					
-1,4,-5	-0.016					
1,2,-5	-0.016					
0,2,-6	+0.014					
-1,3,-6	-0.005					
1,1,-6	-0.014					
3.						
0,2,2	+0.013					
-1,3,2	-0.004					
1,1,2	-0.013					
0,0,1	0					
-1,1,1	-0.00148					
1,-1,1	-0.00047					
0,1,1	-0.044	-0.98	-0.98	+11	-11	-11
-1,2,1	+0.029	+0.64	+0.64	-7	+7	+7
1,0,1	+0.04900	+1.09	+1.09	-12	+12	+12
0,2,1	+0.532	+11.82	+11.82	-131	+131	+131
-1,3,1	-0.176	-3.93	-3.93	+44	-44	-44
1,1,1	-0.534	-11.85	-11.85	+131	-131	-131
0,3,1	+0.044	+0.98	+0.98	-11	+11	+11
-1,4,1	-0.019	-0.42	-0.42	+5	-5	-5
1,2,1	-0.020	-0.45	-0.45	+5	-5	-5
0,-1,0	+0.001					
-1,0,0	+0.00073					
1,-2,0	0.000					
0,0,0	0	0	0	0	0	0
-1,1,0	-0.05874	-1.31	-1.31	+15	-14	-14
1,-1,0	-0.01872	-0.42	-0.42	+5	-5	-5
0,1,0	-1.748	-38.85	-38.85	+431	-430	-429
-1,2,0	+1.162	+25.83	+25.83	-286	+286	+285
1,0,0	+1.94554	+43.25	+43.25	-480	+479	+478
0,2,0	+21.102	+469.04	+469.04	-5202	+5191	+5181
-1,3,0	-6.970	-154.92	-154.92	+1718	-1715	-1711
1,1,0	-21.209	-471.43	-471.43	+5229	-5218	-5208
0,3,0	+1.739	+38.65	+38.65	-429	+428	+427
-1,4,0	-0.768	-17.07	-17.07	+190	-189	-189
1,2,0	-0.776	-17.23	-17.23	+191	-191	-190

BERECHNUNG DER IN DEN MONDTAFELN ANGEWANDTEN STÖRUNGEN. 189

3.						
0,4,0	+0.427	+2.82	+2.82	-31	+31	+31
-1,5,0	-0.066	-1.47	-1.47	+16	-16	-16
1,3,0	-0.037	-0.82	-0.82	+9	-9	-9
0,0,-1	0					
-1,1,-1	-0.0048					
1,-1,-1	-0.0047					
0,1,-1	-0.044	-0.98	-0.98	+11	-11	-11
-1,2,-1	+0.029	+0.64	+0.64	-7	+7	+7
1,0,-1	+0.04900	+1.09	+1.09	-12	+12	+12
0,2,-1	+0.532	+11.82	+11.82	-131	+131	+131
-1,3,-1	-0.176	-3.93	-3.93	+44	-44	-44
1,1,-1	-0.534	-11.85	-11.85	+131	-131	-131
0,3,-1	+0.044	+0.98	+0.98	-11	+11	+11
-1,4,-1	-0.019	-0.42	-0.42	+5	-5	-5
1,2,-1	-0.020	-0.45	-0.45	+5	-5	-5
0,2,-2	+0.013					
-1,3,-2	-0.004					
1,1,-2	-0.013					
4.						
0,0,4	0					
-1,1,4	+0.017					
1,-1,4	-0.017					
0,-1,3	+0.034	+0.76	+0.76	-9	+8	+8
-1,0,3	-0.034	-0.76	-0.76	+9	-8	-8
1,-2,3	-0.011	-0.25	-0.24	+3	-3	-3
0,0,3	0	0	0	0	0	0
-1,1,3	+0.4455	+9.27	+9.23	-104	+103	+102
1,-1,3	-0.4455	-9.27	-9.23	+104	-103	-102
0,1,3	-0.034	-0.76	-0.76	+9	-8	-8
-1,2,3	+0.011	+0.25	+0.24	-3	+3	+3
1,0,3	+0.034	+0.76	+0.76	-9	+8	+8
0,-2,2	+0.016	+0.36	+0.36	-4	+4	+4
-1,-1,2	0	0	0	0	0	0
1,-3,2	-0.008	-0.18	-0.18	+2	-2	-2
0,-1,2	+0.583	+13.01	+12.96	-146	+145	+143
-1,0,2	-0.5828	-13.01	-12.96	+146	-145	-143
1,-2,2	-0.494	-4.33	-4.31	+49	-48	-48
0,0,2	0	0	0	0	0	0
-1,1,2	+7.0688	+157.76	+157.12	-1771	+1754	+1736
1,-1,2	-7.0688	-157.76	-157.12	+1771	-1754	-1736
0,1,2	-0.583	-13.01	-12.96	+146	-145	-143
-1,2,2	+0.494	+4.33	+4.31	-49	+48	+48
1,0,2	+0.5828	+13.01	+12.96	-146	+145	+143
0,2,2	-0.016	-0.36	-0.36	+4	-4	-4
-1,3,2	+0.008	+0.18	+0.18	-2	+2	+2
1,1,2	0	0	0	0	0	0
0,-1,1	-0.005	-0.11	-0.11			
-1,0,1	+0.00490	+0.11	+0.11			
1,-2,1	+0.002	+0.05	+0.05			

4.						
0,0,1	0	0	0	0	0	0
-1,1,1	-0.05940	-1.33	-1.32	+15	-15	-15
1,-1,1	+0.05940	+1.33	+1.32	-15	+15	+15
0,1,1	+0.005	+0.11	+0.11			
-1,2,1	-0.002	-0.05	-0.05			
1,0,1	-0.00490	-0.11	-0.11			
0	= 0					
5.						
0,1,2	-0.002	-0.09	-0.09			
-1,2,2	+0.001	+0.05	+0.05			
1,0,2	+0.0020	+0.09	+0.09			
0,2,2	+0.021	+0.93	+0.93	-31	+31	+31
-1,3,2	-0.007	-0.32	-0.32	+10	-10	-10
1,1,2	-0.021	-0.93	-0.93	+31	-31	-31
0,3,2	+0.002	+0.09	+0.09			
-1,4,2	-0.001	-0.03	-0.03			
1,2,2	-0.001	-0.03	-0.03			
6.						
0,1,1	+0.001					
-1,2,1	0.000					
1,0,1	-0.00207					
0,-1,0	0.000					
-1,0,0	+0.00017					
1,-2,0	0.000					
0,0,0	0					
-1,1,0	-0.00342					
1,-1,0	+0.00539					
0,1,0	+0.054		-0.03			
-1,2,0	+0.018		-0.04			
1,0,0	-0.08972		+0.05			
0,2,0	-0.003					
-1,3,0	+0.001					
1,1,0	+0.004					
0,-1,-1	-0.013					
-1,0,-1	+0.01002					
1,-2,-1	+0.003					
0,0,-1	0	0	0			
-1,1,-1	-0.20364	+0.04	+0.10			
1,-1,-1	+0.32121	-0.04	-0.16			
0,1,-1	+3.210	-0.14	-1.61			
-1,2,-1	+1.049	-0.05	-0.53			
1,0,-1	-5.34253	+0.24	+2.67			
0,2,-1	-0.174		+0.09			
-1,3,-1	+0.087		-0.04			
1,1,-1	+0.262		-0.13			
0,3,-1	-0.011					
-1,4,-1	+0.006					
1,2,-1	+0.005					

BERECHNUNG DER IN DEN MONDTAFELN ANGEWANDTEN STÖRUNGEN. 491

6.						
0,0,-2	0					
-1,1,-2	-0.0103					
1,-1,-2	+0.0162					
0,1,-2	+0.162		-0.08			
-1,2,-2	+0.053		-0.03			
1,0,-2	-0.2694		+0.13			
0,2,-2	-0.009					
-1,3,-2	+0.004					
1,1,-2	+0.013					
0,0,-3						
-1,1,-3	0.000					
1,-1,-3	+0.004					
0,1,-3	+0.006					
-1,2,-3	+0.002					
1,0,-3	-0.010					
7.						
0,1,-2	-0.002					
-1,2,-2	+0.002					
1,0,-2	+0.0024					
0,2,-2	+0.045					
-1,3,-2	-0.022					
1,1,-2	-0.047					
0,3,-2	-0.267					
-1,4,-2	+0.088					
1,2,-2	+0.269					
0,4,-2	-0.029					
-1,5,-2	+0.012					
1,3,-2	+0.017					
0,0,-3						
-1,1,-3	+0.005					
1,-1,-3	+0.004					
0,1,-3	+0.116					
-1,2,-3	-0.120					
1,0,-3	-0.142					
0,2,-3	-2.651	+0.36	+0.36			
-1,3,-3	+1.318	-0.18	-0.18			
1,1,-3	+2.807	-0.38	-0.38			
0,3,-3	+15.889	-2.14	-2.14			
-1,4,-3	-5.223	+0.70	+0.70			
1,2,-3	-16.025	+2.16	+2.16			
0,4,-3	+1.751	-0.24	-0.24			
-1,5,-3	-0.724	+0.10	+0.10			
1,3,-3	-1.027	+0.14	+0.14			
0,5,-3	+0.150					
-1,6,-3	-0.073					
1,4,-3	-0.063					
0,1,-4	+0.010					
-1,2,-4	-0.010					
1,0,-4	-0.042					

<u>7.</u>						
0,2,-4	-0.223					
-1,3,-4	+0.111					
1,1,-4	+0.236					
0,3,-4	+1.334	-0.17	-0.17			
-1,4,-4	-0.439	+0.06	+0.06			
1,2,-4	-1.346	+0.17	+0.17			
0,4,-4	+0.147					
-1,5,-4	-0.061					
1,3,-4	-0.086					
0,2,-5	-0.012					
-1,3,-5	+0.006					
1,1,-5	+0.013					
0,3,-5	+0.071					
-1,4,-5	-0.023					
1,2,-5	-0.072					
<u>8.</u>						
0,0,1	0	0	0			
-1,1,1	-0.00250	-0.06	-0.06			
1,-1,1	+0.00395	+0.09	+0.09			
0,1,1	+0.039	+0.87	+0.86			
-1,2,1	+0.013	+0.34	+0.34			
1,0,1	-0.06563	-1.47	-1.46			
0,0,0	0					
-1,1,0	-0.00004					
1,-1,0	+0.00007					
0,1,0	+0.001					
-1,2,0	0.000					
1,0,0	-0.00110					
<u>9.</u>						
0,3,-1	+0.096	+2.13	+2.13			
-1,4,-1	-0.032	-0.71	-0.71			
1,2,-1	-0.097	-2.15	-2.15			
<u>10.</u>						
	0 = 0					
0,1,-3	+0.033	-0.74	+0.73			
-1,2,-3	+0.011	-0.25	+0.24			
1,0,-3	-0.055	+1.23	-1.22			



58.

Ausserdem erhalten wir durch den Ausdruck des Art. 28

$$\begin{aligned}
 T_0^{(3)} = & - 0,001 \sin g \\
 & + 0,008 \sin(-\gamma+g) + 0,000 \sin(-\gamma+2g) + 0,00142 \sin(-\gamma+g-g')^1 \\
 & \quad + 0,00116 \sin \gamma \quad - 0,00142 \sin(\gamma-g-g') \\
 & - 0,002 \sin(g-2g'+2\omega-2\omega') + 0,014 \sin(2g-2g'+2\omega-2\omega') \\
 & \quad 0,000 \sin(-\gamma+2g-2g'+2\omega-2\omega') \\
 & + 0,0027 \sin(\gamma-2g'+2\omega-2\omega') - 0,019 \sin(\gamma+g-2g'+2\omega-2\omega') \\
 & \quad - 0,012 \sin(3g-4g'+4\omega-4\omega') \\
 & + 0,000 \sin(-\gamma+4g-2g'+2\omega-2\omega') + 0,005 \sin(-\gamma+4g-4g'+4\omega-4\omega') \\
 & + 0,000 \sin(\gamma+2g-2g'+2\omega-2\omega') + 0,013 \sin(\gamma+2g-4g'+4\omega-4\omega') \\
 & + 0,049 \sin(4g-4g'+4\omega-4\omega') + 0,007 \sin(5g-4g'+4\omega-4\omega') \\
 & - 0,046 \sin(-\gamma+5g-4g'+4\omega-4\omega') - 0,003 \sin(-\gamma+6g-4g'+4\omega-4\omega') \\
 & - 0,049 \sin(\gamma+3g-4g'+4\omega-4\omega') - 0,005 \sin(\gamma+4g-4g'+4\omega-4\omega')
 \end{aligned}$$

die weiter unten berücksichtigt werden sollen.

59.

Zur Berechnung der Coefficienten von  $G_0$  wurden von den Functionen des Art. 33 die folgenden numerischen Werthe gefunden :

$$\begin{aligned}
 \log U^{(-1)} &= 6,0948 \\
 \text{» } U^{-1,0} &= 6,0948 \\
 \text{» } U^{1,-2} &= 5,4408n \\
 \hline
 \text{» } U^{(0)} &= 8,43406n \\
 \text{» } U^{-1,1} &= 7,17856n \\
 \text{» } U^{1,-1} &= 7,17856n \\
 \hline
 \text{» } U^{(1)} &= 9,5177302 \\
 \text{» } U^{-1,2} &= 5,61678n \\
 \text{» } U^{1,0} &= 9,5177302 \\
 \hline
 \text{» } U^{(2)} &= 7,95595 \\
 \text{» } U^{-1,3} &= 4,2313n \\
 \text{» } U^{1,1} &= 0,6014054n \\
 \hline
 \text{» } U^{(3)} &= 6,5704 \\
 \text{» } U^{-1,4} &= 2,920n \\
 \text{» } U^{1,2} &= 9,0396267n \\
 \hline
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log U^{(4)} &= 8,259 \\ \text{» } U^{-1,5} &= \text{---} \\ \text{» } U^{1,3} &= 7,65394n \\ \hline \text{» } U^{(5)} &= 3,989 \\ \text{» } U^{-1,6} &= \text{---} \\ \text{» } U^{1,4} &= 6,3421n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log V^{(-1)} &= 8,2574n \\ \text{» } V^{-1,0} &= 8,1324 \\ \text{» } V^{1,-2} &= 7,4792 \\ \hline \text{» } V^{(0)} &= 9,54871 \\ \text{» } V^{-1,1} &= 9,54691n \\ \text{» } V^{1,-1} &= 9,34448 \\ \hline \text{» } V^{(1)} &= 7,9563 \\ \text{» } V^{-1,2} &= 0,29775 \\ \text{» } V^{1,0} &= 0,60402n \\ \hline \text{» } V^{(2)} &= 9,24473n \\ \text{» } V^{-1,3} &= 9,03749 \\ \text{» } V^{1,1} &= 9,34423 \\ \hline \text{» } V^{(3)} &= 7,9563n \\ \text{» } V^{-1,4} &= 7,7802 \\ \text{» } V^{1,2} &= 7,5764 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log W^{(0)} &= 7,571 \\ \text{» } W^{-1,1} &= 6,571 \\ \text{» } W^{1,-1} &= 6,462 \\ \hline \text{» } W^{(1)} &= 8,9106n \\ \text{» } W^{-1,2} &= 7,3542n \\ \text{» } W^{1,0} &= 8,6553n \\ \hline \text{» } W^{(2)} &= 9,6912 \\ \text{» } W^{-1,3} &= 6,094n \\ \text{» } W^{1,1} &= 9,9942 \\ \hline \text{» } W^{(3)} &= 8,4334 \\ \text{» } W^{-1,4} &= \text{---} \\ \text{» } W^{1,2} &= 0,77487n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log W^{(4)} &= 7,173 \\ & \text{» } W^{-1,5} = \text{---} \\ & \text{» } W^{1,8} = 9,5158n \\ \hline & \text{» } W^{(5)} = \text{---} \\ & \text{» } W^{-1,6} = \text{---} \\ & \text{» } W^{1,4} = 8,257n \end{aligned}$$

60.

Hiemit und mit den Factors, deren numerische Werthe im Art. 56 angegeben wurden, ergeben sich die folgenden numerischen Werthe der Coefficienten von  $G_0$  nebst den hier erforderlichen Differentialquotienten von  $G_0$ , nach den Ausdrücken des Art. 34.

$\gamma, g, g'$	$G_0$ sin	$R$ cos	$Y$ sin	$S$ sin	$V$ cos	$Z$ sin
1.						
-1,1,0	+1158,410		-344,60	-3503 <sup>a</sup>		-3475 <sup>a</sup>
0,1,0	-95.504		+25.94	+289		+286
-1,2,0	+31.775		-8.63	+96		-95
1,0,0	+95.504		-25.94	-289		-286
0,2,0	-2.620		+0.71	+8		+8
-1,3,0	+1.308		-0.36	-4		-4
1,1,0	0		0	0		0
0,3,0	-0.108		+0.03			
-1,4,0	+0.064		-0.02			
1,2,0	+0.004		0.00			
0,4,0	-0.005					
-1,5,0	+0.003					
1,3,0	0.000					
0,-3,-1	+0.003					
-1,-2,-1	0.000					
1,-4,-1	-0.002					
0,-2,-1	+0.066		-0.02			
-1,-1,-1	0		0.00			
1,-3,-1	-0.033		+0.01			
0,-1,-1	+2.406		-0.65	-7		-7
-1,0,-1	-2.405		+0.65	+7		+7
1,-2,-1	-0.800		+0.22	+2		+2
0,0,-1	0		0.	0		0
-1,1,-1	+29.175		-7.92	-88		-88
1,-1,-1	-29.175		+7.92	+88		+88
0,1,-1	-2.406		+0.65	+7		+7
-1,2,-1	+0.800		-0.22	-2		-2
1,0,-1	+2.405		-0.65	-7		-7

<u>1.</u>						
0,2,-1	-0.066		+0.02			
-1,3,-1	+0.033		-0.04			
1,4,-1	0		0.00			
0,3,-1	-0.003					
-1,4,-1	+0.002					
1,2,-1	0.000					
0,-2,-2	+0.002					
-1,-1,-2	0					
1,-3,-2	-0.001					
0,-1,-2	+0.064		-0.02			
-1,0,-2	-0.064		+0.02			
1,-2,-2	-0.020		+0.04			
0,0,-2	0		0	0"		0"
-1,1,-2	+0.735		-0.20	-2		-2
1,-1,-2	-0.735		+0.20	+2		+2
0,1,-2	-0.064		+0.02			
-1,2,-2	+0.020		-0.04			
1,0,-2	+0.064		-0.02			
0,2,-2	-0.002					
-1,3,-2	+0.004					
1,1,-2	0					
0,-1,-3	+0.002					
-1,0,-3	-0.002					
1,-2,-3	0.000					
0,0,-3	0					
-1,1,-3	+0.048					
1,-1,-3	-0.048					
0,1,-3	-0.002					
-1,2,-3	0.000					
1,0,-3	+0.002					
<u>2.</u>						
0,0,-1	+0.200					
-1,1,-1	+0.044					
1,-1,-1	+0.044					
0,1,-1	-2.425	+0.22	+0.22	+2		+2
-1,2,-1	0	0	0	0		0
1,0,-1	-2.425	+0.22	+0.22	+2		+2
0,2,-1	-0.067	+0.04	+0.04	0		0
-1,3,-1	0	0	0	0		0
1,1,-1	+29.403	-2.64	-2.64	-30		-30
0,3,-1	-0.003	0	0	0		0
-1,4,-1	0	0	0	0		0
1,2,-1	+0.807	-0.08	-0.08	-1		-1
0,4,-1	0					
-1,5,-1	0					
1,3,-1	+0.033					
0,-1,-2	+0.109					
-1,0,-2	+0.109					
1,-2,-2	-0.024					

BERECHNUNG DER IN DEN MONDTAFELN ANGEWANDTEN STÖRUNGEN. 197

2.						
0,0,-2	-23'806	+2'14	+2'14	+24"		+24"
-1,1,-2	-1.322	+0.12	+0.12	+2		+2
1,-1,-2	-1.322	+0.12	+0.12	+2		+2
0,1,-2	+288.629	-25.96	-25.96	-294	+2"	-288
-1,2,-2	-0.036	0	0	0	0	0
1,0,-2	+288.629	-25.96	-25.96	-294	+2	-288
0,2,-2	+7.917	-0.07	-0.07	-7	0	-7
-1,3,-2	-0.001	0	0	0	0	0
1,1,-2	-3499.572	+314.88	+314.88	+3535	-28	+3493
0,3,-2	+0.326	-0.03	-0.03	0	0	0
-1,4,-2	0	0	0	0	0	0
1,2,-2	-95.992	+8.64	+8.64	+97	-4	+95
0,4,-2	+0.016	0	0	0		0
-1,5,-2	0	0	0	0		0
1,3,-2	-3.950	+0.36	+0.36	+4		+4
0,5,-2	+0.001					
-1,6,-2	0					
1,4,-2	-0.493					
0,0,-3	-1.399	+0.13	+0.13			
-1,1,-3	-0.078	0	0			
1,-1,-3	-0.078	0	0			
0,1,-3	+16.965	-1.53	-1.53	-17		-17
-1,2,-3	-0.002	0	0	0		0
1,0,-3	+16.965	-1.53	-1.53	-17		-17
0,2,-3	+0.465	-0.04	-0.04	0		0
-1,3,-3	0	0	0	0		0
1,1,-3	-205.698	+18.49	+18.49	+207		+206
0,3,-3	+0.019	0	0	0		0
-1,4,-3	0	0	0	0		0
1,2,-3	-5.642	+0.50	+0.50	+5		+5
0,4,-3	+0.001					
-1,5,-3	0					
1,3,-3	-0.232					
0,5,-3	0					
-1,6,-3	0					
1,4,-3	-0.011					
0,0,-4	-0.057					
-1,1,-4	-0.003					
1,-1,-4	-0.003					
0,1,-4	+0.692					
-1,2,-4	0					
1,0,-4	+0.692					
0,2,-4	+0.019	0	0	0		0
-1,3,-4	0	0	0	0		0
1,1,-4	-8.389	+0.77	+0.77	+9		+9
0,3,-4	+0.001					
-1,4,-4	0					
1,2,-4	-0.230					

<u>2.</u>						
0,4,-4	0					
-1,5,-4	0					
1,3,-4	-0.009					
<u>0,4,-5</u>						
0,4,-5	+0.024					
-1,2,-5	0					
1,0,-5	+0.024					
<u>0,2,-5</u>						
0,2,-5	+0.001					
-1,3,-5	0					
1,1,-5	-0.292					
<u>0,3,-5</u>						
0,3,-5	0					
-1,4,-5	0					
1,2,-5	-0.008					
<u>3.</u>						
0,1,1	+0.029	+0.65	+0.65	-7"	+7"	+7"
-1,2,1	0	0	0	0	0	0
1,0,1	+0.029	+0.65	+0.65	-7	+7	+7
<u>0,2,1</u>						
0,2,1	+0.001	+0.02	+0.02	0	0	0
-1,3,1	0	0	0	0	0	0
1,1,1	-0.356	-7.91	-7.91	+87	-87	-87
<u>0,3,1</u>						
0,3,1	0	0	0	0	0	0
-1,4,1	0	0	0	0	0	0
1,2,1	-0.010	-0.23	-0.23	+3	-3	-3
<u>0,0,0</u>						
0,0,0	-0.096	-2.15	-2.15	+24	-24	-24
-1,1,0	-0.005	-0.13	-0.13	+2	-2	-2
1,-1,0	-0.005	-0.13	-0.13	+2	-2	-2
<u>0,1,0</u>						
0,1,0	+1.167	+25.94	+25.94	-288	+287	+287
-1,2,0	0	0	0	0	0	0
1,0,0	+1.167	+25.94	+25.94	-288	+287	+287
<u>0,2,0</u>						
0,2,0	+0.032	+0.69	+0.69	-7	+7	+7
-1,3,0	0	0	0	0	0	0
1,1,0	-14.154	-314.64	-314.64	+3489	-3482	-3476
<u>0,3,0</u>						
0,3,0	+0.001	0	0	0	0	0
-1,4,0	0	0	0	0	0	0
1,2,0	-0.388	-8.69	-8.69	+96	-96	-95
<u>0,4,0</u>						
0,4,0	0	0	0	0	0	0
-1,4,0	0	0	0	0	0	0
1,3,0	-0.016	-0.35	-0.35	+4	-4	-4
<u>0,1,-1</u>						
0,1,-1	+0.029	+0.65	+0.65	-7	+7	+7
-1,2,-1	0	0	0	0	0	0
1,0,-1	+0.029	+0.65	+0.65	-7	+7	+7
<u>0,2,-1</u>						
0,2,-1	+0.001	+0.02	+0.02	0	0	0
-1,3,-1	0	0	0	0	0	0
1,1,-1	-0.356	-7.91	-7.91	+87	-87	-87
<u>0,3,-1</u>						
0,3,-1	0	0	0	0	0	0
-1,4,-1	0	0	0	0	0	0
1,2,-1	-0.010	-0.23	-0.23	+3	-3	-3

<u>4.</u>						
0,-1,3	+0,034	+0,76	+0,76	-9"	+8"	+8"
-1,0,3	-0.034	-0.76	-0.76	+9	-8	-8
1,-2,3	-0.011	-0.25	-0.24	+3	-3	-3
0,0,3	0	0	0	0	0	0
-1,1,3	+0.415	+9.27	+9.23	-104	+103	+102
1,-1,3	-0.415	-9.27	+9.23	+104	-103	-102
0,1,3	-0.034	-0.76	-0.76	+9	-8	-8
-1,2,3	+0.011	+0.25	+0.24	-3	+3	+3
1,0,3	+0.034	+0.76	+0.76	-9	+8	+8
0,-2,2	+0.016	+0.36	+0.36	-4	+4	+4
-1,-1,2	0	0.00	0.00	0	0	0
1,-3,2	-0.008	-0.18	-0.18	+2	-2	-2
0,-1,2	+0.583	+13.01	+12.96	-146	+145	+143
-1,0,2	-0.583	-13.01	-12.96	+146	-145	-143
1,-2,2	-0.194	-4.33	-4.31	+49	-48	-48
0,0,2	0	0	0	0	0	0
-1,1,2	+7.069	+157.76	+157.42	-1771	+1754	+1736
1,-1,2	-7.069	-157.76	-157.42	+1771	-1754	-1736
0,1,2	-0.583	-13.01	-12.96	+146	-145	-143
-1,2,2	+0.194	+4.33	+4.31	-49	+48	+48
1,0,2	+0.583	+13.01	+12.96	-146	+145	+143
0,2,2	-0.016	-0.36	-0.36	+4	-4	-4
-1,3,2	+0.008	+0.18	+0.18	-2	+2	+2
1,1,2	0	0.00	0.00	0	0	0
0,-1,1	-0.005	-0.41	-0.41			
-1,0,1	+0.005	+0.41	+0.41			
1,-2,1	+0.002	+0.05	+0.05			
0,0,1	0	0	0	0	0	0
-1,1,1	-0.059	-1.33	-1.32	+15	-15	-15
1,-1,1	+0.059	+1.33	+1.32	-15	+15	+15
0,0,1	+0.005	+0.41	+0.41			
-1,2,1	-0.002	-0.05	-0.05			
1,0,1	-0.005	-0.41	-0.41			
<u>5.</u>						
0,0,2	0	0	0			
-1,3,2	0	0	0			
1,2,2	-0.014	-0.62	-0.62			
<u>6.</u>						
0,0,0	+0.006					
-1,1,0	-0.006					
1,-1,0	+0.004					
0,1,0	0					
-1,2,0	+0.036					
1,0,0	-0.072					
0,2,0	-0.003					
-1,3,0	+0.002					
1,1,0	+0.004					

6.						
0,-1,-1	-0.049					
-1,0,-1	+0.044					
1,-2,-1	+0.003					
0,0,-1	+0.354					
-1,1,-1	-0.350					
1,-1,-1	+0.233					
0,1,-1	+0.010	0.00	0.00			
-1,2,-1	+2.144	-0.10	-1.06			
1,0,-1	-4.274	+0.19	+2.14			
0,2,-1	-0.174					
-1,3,-1	+0.116					
1,1,-1	+0.233					
0,3,-1	-0.010					
-1,4,-1	+0.006					
1,2,-1	+0.004					
0,0,-2	+0.018					
-1,1,-2	-0.018					
1,-1,-2	+0.012					
0,1,-2	0.000					
-1,2,-2	+0.106					
1,0,-2	-0.215					
0,2,-2	-0.009					
-1,3,-2	+0.006					
1,1,-2	+0.012					
0,1,-3	0.000					
-1,2,-3	+0.004					
1,0,-3	-0.008					
7.						
0,1,-2	+0.002					
-1,2,-2	0					
1,0,-2	+0.001					
0,2,-2	-0.015					
-1,3,-2	0					
1,1,-2	-0.030					
0,3,-2	-0.001					
-1,4,-2	0					
1,2,-2	+0.180					
0,4,-2	0					
-1,5,-2	0					
1,3,-2	+0.010					
0,0,-3	+0.007					
-1,1,-3	+0.001					
1,-1,-3	+0.001					
0,1,-3	-0.147					
-1,2,-3	-0.004					
1,0,-3	-0.081					
0,2,-3	+0.883	+0.12	-0.12			
-1,3,-3	0	0	0			
1,1,-3	+1.774	-0.24	-0.24			



BERECHNUNG DER IN DEN MONDTAFELN ANGEWANDTEN STÖRUNGEN. 201

7.						
0,3,-3	+0,049	0	0			
-1,4,-3	0	0	0			
1,2,-3	-10.706	+1,44	+1,44			
0,4,-3	+0,003	0	0			
-1,5,-3	0	0	0			
1,3,-3	-0.589	+0.08	+0.08			
0,5,-3	0					
-1,6,-3	0					
1,4,-3	-0.033					
0,4,-4	-0.042					
-1,2,-4	0					
1,0,-4	-0.007					
0,2,-4	+0.074					
-1,3,-4	0					
1,1,-4	+0.149					
0,3,-4	+0.004					
-1,4,-4	0					
1,2,-4	-0.899					
0,4,-4	0					
-1,5,-4	0					
1,3,-4	-0.050					
0,2,-5	+0.004					
-1,3,-5	0					
1,1,-5	+0.008					
0,3,-5	0					
-1,4,-5	0					
1,2,-5	-0.048					
8.						
0,0,1	+0.004					
-1,1,1	-0.004					
1,-1,1	+0.003					
0,1,1	0.000	0				
-1,2,1	+0.026	+0.60	+0.60			
1,0,1	-0.053	-1.18	-1.18			
9.						
0,3,-4	0	0	0			
-1,4,-4	0	0	0			
1,2,-4	-0.065	-1.42	-1.42			
10.						
0,1,-3	0	0				
-1,2,-3	+0.022	-0.50	+0.50			
1,0,-3	-0.044	+0.98	-0.98			

## 61.

Ausserdem giebt der Ausdruck des Art. 34

$$G_0^{(3)} = + 0,008 \sin(-\gamma+g) + 0,005 \sin(-\gamma+3g-2g'+2\omega-2\omega')$$

$$- 0,044 \sin(\gamma+g-2g'+2\omega-2\omega')$$

$$- 0,033 \sin(\gamma+3g-4g'+4\omega-4\omega')$$

## 62.

Da  $\Sigma_0$  auf die einfachste Weise aus  $a\Omega$  folgt und die Factoren, welche die Differentialquotienten von  $\Sigma_0$  geben, dieselben sind wie die für  $T_0$  und  $G_0$ , so bekommen wir ohne Weiteres die folgenden numerischen Werthe:

$g, g'$	$\Sigma_0$ sin	$R$ cos	$Y$ sin	$S$ sin	$V$ cos	$Z$ sin
1.	= 0					
2.						
-1,-1	+0,004					
0,-1	-0,1111					
1,-1	+2,425	-0,22	-0,22	-2		-2
2,-1	-14,635	+1,32	+1,32	+15		+15
3,-1	-0,804	+0,07	+0,07	+1		+1
4,-1	-0,044					
5,-1	-0,003					
-2,-2	-0,004					
-1,-2	-0,085					
0,-2	+13,2249	-1,19	-1,19	-13		-13
1,-2	-288,592	+25,96	+25,96	+294	-2	+288
2,-2	+1741,871	-156,73	-156,73	-1760	+14	-1738
3,-2	+95,667	-8,64	-8,64	-97	+1	-95
4,-2	+5,250	-0,47	-0,47	-5		-5
5,-2	+0,300					
6,-2	+0,018					
-1,-3	-0,005					
0,-3	+0,7773					
1,-3	-16,963	+1,53	+1,53	+17		+17
2,-3	+102,384	-9,21	-9,21	-103		-102
3,-3	+5,623	-0,51	-0,51	-6		-6
4,-3	+0,309					
5,-3	+0,018					
0,-4	+0,032					
1,-4	-0,692					
2,-4	+4,175	-0,38	-0,38	-4		-4
3,-4	+0,229					
4,-4	+0,013					

BERECHNUNG DER IN DEN MONDTAFELN ANGEWANDTEN STÖRUNGEN. 203

<b>2.</b>						
1,-5	-0.024					
2,-5	+0.145					
3,-5	+0.008					
<b>3.</b>						
2,2	+0.004					
0,4	+0.0043					
1,4	-0.029	-0.65	-0.65	+7"	-7"	-7"
2,4	+0.177	+3.94	+3.94	-44	+44	+44
3,4	+0.040	+0.22	+0.22	-2	+2	+2
0,0	+0.05348	+1.19	+1.19	-13	+13	+13
1,0	-1.167	-25.94	-25.94	+288	-287	-287
2,0	+7.045	+156.59	+156.59	-1737	+1734	+1730.
3,0	+0.387	+8.60	+8.60	-95	+95	+95
4,0	+0.021	+0.47	+0.47	-5	+5	+5
0,-1	+0.0043					
1,-1	-0.029	-0.65	-0.65	+7	-7	-7
2,-1	+0.177	+3.94	+3.94	-44	+44	+44
3,-1	+0.040	+0.22	+0.22	-2	+2	+2
2,-2	+0.004					
<b>4.</b>						
	= 0					
<b>5.</b>						
2,2	+0.007	+0.32	+0.32			
<b>6.</b>						
0,0	-0.00246					
1,0	+0.018					
-1,-1	+0.004					
0,-1	-0.1466					
1,-1	+1.072	-0.05	-0.54			
2,-1	-0.029					
3,-1	-0.004					
0,-2	-0.0074					
1,-2	+0.054					
2,-2	-0.004					
1,-3	+0.002					
<b>7.</b>						
1,-2	-0.002					
2,-2	+0.022					
3,-2	-0.089					
4,-2	-0.007					
0,-3	-0.0042					
1,-3	+0.116					
2,-3	-1.327	+0.18	+0.18			
3,-3	+5.304	-0.72	-0.72			
4,-3	+0.439	-0.06	-0.06			
5,-3	+0.030					

<u>7.</u>						
1,-4	+0,010					
2,-4	-0.111					
3,-4	+0.445					
4,-4	+0.037					
<hr/>						
2,-5	-0.006					
3,-5	+0.024					
<hr/>						
<u>8.</u>						
0,1	-0.0018					
1,1	+0.013	+0,29	+0,29			
0,0	-0.00003					
<hr/>						
<u>9.</u>						
3,-1	+0.032	+0.71	+0.71			
<hr/>						
<u>10.</u>						
1,-3	+0.011	-0.25	+0.24			

## 63.

Verwandelt man nun die sich auf  $B_0$  beziehenden Factoren der Art. 41 u. 49 in Zahlen, und fügt ihnen den Divisor  $\sqrt{1-e^2}$  hinzu, so bekommt man die folgenden Logarithmen, welche zu denen der Coefficienten von  $a\Omega$  addirt werden müssen, um die in den Ueberschriften genannten Functionen zu erhalten.

$a\Omega$	$B_0$	$R$	$Y$	$S$	$V$	$Z$
1	9.4336774	$-\infty$	0.47512	9.61123n	$-\infty$	0.08757n
2	8.9539129	0.00415	9.99714	9.43308n	6.8622n	9.43133n
3	1.3466736n	2.39166	2.38812n	1.05002	1.64770n	2.00057
4	1.3466736n	2.39342	2.38812n	1.04298	1.65033n	2.00057
5	1.64858n	3.1725	3.1719n	4.5205	4.5194	4.5182n
6	9.69910	9.7187	0.7360			
7	9.13000	0.1820	0.1721			
8	1.34462n	2.3884	2.3776n			
9	1.34579n	2.3890	2.3837n			
10	1.34579n	2.3926n	2.3837n			

Hiemit ergaben sich die folgenden Coefficienten.

BERECHNUNG DER IN DEN MONDTAFELN ANGEWANDTEN STÖRUNGEN. 205

$g, g'$	$B_0$ cos	$R$ sin	$Y$ cos	$S$ cos	$V$ sin	$Z$ cos
<b>1.</b>						
0,0	+79°08488		+870°02	-449"		-356"
1,0	-8.644		-95.07	+13		+39
2,0	-0.119		-1.30			
3,0	-0.003		-0.04			
-2,-1	-0.003		-0.03			
-1,-1	-0.218		-2.39			
0,-1	+3.9836		+43.82	-6		-18
1,-1	-0.218		-2.39			
2,-1	-0.003		-0.03			
-1,-2	-0.005		-0.06			
0,-2	+0.1004		+1.10			
1,-2	-0.005		-0.06			
0,-3	+0.0025		+0.03			
<b>2.</b>						
0,-1	-0.0050	-0°06	-0.06			
1,-1	+0.109	+1.22	+1.20			
2,-1	-0.657	-7.38	-7.26	+2		+2
3,-1	-0.036	-0.40	-0.40			
4,-1	-0.002	-0.02	-0.02			
-1,-2	-0.004	-0.04	-0.04			
0,-2	+0.5937	+6.67	+6.56	-2		-2
1,-2	-12.957	-145.46	-143.13	+39		+39
2,-2	+78.207	+877.98	+863.92	-236		-236
3,-2	+4.295	+48.22	+47.44	-13		-13
4,-2	+0.235	+2.65	+2.60			
5,-2	+0.013	+0.15	+0.15			
0,-3	+0.0349	+0.39	+0.39			
1,-3	-0.762	-8.55	-8.44	+2		+2
2,-3	+4.597	+51.61	+50.78	-14		-14
3,-3	+0.252	+2.83	+2.79			
4,-3	+0.014	+0.16	+0.15			
1,-4	-0.031	-0.35	-0.34			
2,-4	+0.188	+2.10	+2.07			
3,-4	+0.010	+0.12	+0.11			
2,-5	+0.007	+0.07	+0.07			
<b>3.</b>						
1,2	+0.008					
2,2	-0.050	+0.55	-0.55			
3,2	-0.003					
0,4	-0.0149	+0.17	-0.16			
1,4	+0.326	-3.62	+3.59			
2,4	-1.968	+21.83	-21.65		-4"	+9
3,4	-0.108	+1.20	-1.19			
4,4	-0.006					

3.						
-1,0	+0.004					
0,0	-0.59324	+6.58	-6.53			
1,0	+12.946	-143.59	+142.42	-7"	+26"	-58"
2,0	-78.137	+866.64	-859.60	+39	-156	+352
3,0	-4.291	+47.60	-47.21	+2	-9	+19
4,0	-0.236	+2.61	-2.59			
5,0	-0.013					
0,-1	-0.0149	+0.17	-0.16			
1,-1	+0.326	-3.62	+3.59			
2,-1	-1.968	+21.83	-21.65		-4	+9
3,-1	-0.108	+1.20	-1.19			
4,-1	-0.006					
1,-2	+0.008					
2,-2	-0.050	+0.55	-0.55			
3,-2	-0.003					
4.						
-1,4	+0.010					
0,4	-0.189	+2.11	-2.08			
1,4	+0.010					
-2,3	+0.003					
-1,3	+0.254	-2.83	+2.79			
0,3	-4.6433	+51.71	-51.09	+2	-9	+21
1,3	+0.254	-2.83	+2.79			
2,3	+0.003					
-3,2	+0.002					
-2,2	+0.059	-0.66	+0.65			
-1,2	+4.316	-48.07	+47.48	-2	+9	-19
0,2	-78.9957	+879.74	-869.06	+39	-159	+356
1,2	+4.316	-48.07	+47.48	-2	+9	-19
2,2	+0.059	-0.66	+0.65			
3,2	+0.002					
-1,1	-0.036	+0.40	-0.40			
0,1	+0.6637	-7.39	+7.30		+1	-3
1,1	-0.036	+0.40	-0.40			
5.						
0,2	-0.0042					
1,2	+0.026	-0.87	+0.87	-19	-19	+19
2,2	-0.158	+5.28	-5.27	+118	+117	-117
3,2	-0.009	+0.29	-0.29	+6	+6	-6
6.						
0,0	-0.00123					
1,0	+0.009					
0,-1	-0.0732	-0.07	-0.80			
1,-1	+0.535	+0.56	+5.83			
2,-1	-0.015	-0.02	-0.16			
0,-2	-0.0037					
1,-2	+0.027	+0.03	+0.29			

7.						
2,-2	+0,004					
3,-2	-0,004	-0,04	-0,04			
4,-3	+0,005					
2,-3	-0,060	-0,67	-0,66			
3,-3	+0,238	+2,68	+2,62			
4,-3	+0,020	+0,22	+0,22			
2,-4	-0,005					
3,-4	+0,020					
8.						
0,2	+0,0020					
1,2	-0,015					
0,1	+0,0398	-0,44	+0,43			
1,1	-0,291	+3,21	-3,14			
2,1	+0,008	-0,09	+0,09			
0,0	+0,00067					
1,0	-0,005					
9.						
2,-1	+0,059	-0,66	+0,65			
3,-1	-0,238	+2,62	-2,59			
4,-1	-0,020	+0,22	-0,22			
10.						
0,-3	+0,0333	+0,37	+0,36			
1,-3	-0,243	-2,70	-2,65			
2,-3	+0,007	+0,07	+0,07			

Der Ausdruck des Art. 44 für  $B^{(3)}$  giebt

$$B_0^{(3)} = + 0,00095 - 0,0010 \cos (2g' + 2\omega')$$

und multiplicirt man den Ausdruck für  $a\Omega^{(3)}$  des Art. 23 mit den Factoren in Bezug auf  $B$  des Art. 49, so wird

$$R = \frac{1}{2} \mu^2 u^2 \sin (2g' + 2\omega')$$

$$Y = -\frac{1}{2} \mu^2 u^2 \cos (2g' + 2\omega')$$

und in Zahlen

$$R = + 0,010 \sin (2g' + 2\omega')$$

$$Y = - 0,010 \cos (2g' + 2\omega')$$

welche Werthe weiter unten berücksichtigt werden sollen.

## 64.

Die Factoren der Art. 41 und 50 zur Berechnung von  $C_0$  und dessen Differentialquotienten haben in Zahlen verwandelt die folgenden Logarithmen, von welchen auch der Logarithmus von  $\sqrt{1-e^2}$  schon abgezogen worden ist. Diese Zahlen sind daher die Logarithmen der Factoren von  $a\Omega$ , wie oben.

$a\Omega$	$C_0$	$R$	$Y$	$S$	$V$	$Z$
1	$-\infty$	0.48042n	$-\infty$	$-\infty$	9.61123	$-\infty$
2	8.9539129	0.00415n	9.99744	9.43308n	6.8622	9.43133n
3	1.3466736n	2.39166n	2.38842n	1.05002	1.64770	2.00057
4	1.3484281n	2.39867n	2.39342n	1.89362	1.34666n	1.52540
5	1.64858n	3.1725n	3.1719n	4.5205	4.5194n	4.5182n
6	8.65288	0.7460n	9.6797			
7	9.13000	0.1820n	0.1724			
8	1.34755n	2.3973n	2.3867n			
9	1.34580n	2.3893n	2.3837n			
10	1.34931	2.4030n	2.3943			

Hiemit ergaben sich die folgenden Zahlenwerthe.

$g, g'$	$C_0$ sin	$R$ cos	$Y$ sin	$S$ sin	$V$ cos	$Z$ sin
1.						
0,0		-880,70			+119"	
1,0		+96.23			-13	
2,0		+1.32				
3,0		+0.04				
-2,-1		+0.03				
-1,-1		+2.42				
0,-1		-44.36			+6	
1,-1		+2.42				
2,-1		+0.03				
-1,-2		+0.06				
0,-2		-1.12				
1,-2		+0.06				
0,-3		-0.03				
2.						
0,-1	-0,0050	+0.06	-0,06			
1,-1	+0.109	-1.22	+1.20			
2,-1	-0.657	+7.38	-7.26	+2"		+2"
3,-1	-0.036	+0.40	-0.40			
4,-1	-0.002	+0.02	-0.02			



BERECHNUNG DER IN DEN MONDTAFELN ANGEWANDTEN STÖRUNGEN. 209

<u>2.</u>						
-1,-2	-0,004	+0,04	-0,04			
0,-2	+0.5937	-6.67	+6.56	-2"		-2"
1,-2	-12.957	+145.46	-143.13	+39		+39
2,-2	+78.207	-877.98	+863.92	-236		-235
3,-2	+4.295	-48.22	+47.44	-13		-13
4,-2	+0.235	-2.65	+2.60			
5,-2	+0.013	-0.15	+0.15			
<hr/>						
0,-3	+0.0349	-0.39	+0.39			
1,-3	-0.762	+8.55	-8.41	+2		+2
2,-3	+4.597	-51.61	+50.78	-14		-14
3,-3	+0.252	-2.83	+2.79			
4,-3	+0.014	-0.16	+0.15			
<hr/>						
1,-4	-0.031	+0.35	-0.34			
2,-4	+0.188	-2.10	+2.07			
3,-4	+0.010	-0.12	+0.11			
2,-5	+0.007	-0.07	+0.07			
<hr/>						
<u>3.</u>						
1,2	+0.008					
2,2	-0.050	-0.55	-0.55			
3,2	-0.003					
<hr/>						
0,1	-0.0149	-0.17	-0.16			
1,1	+0.326	+3.62	+3.59			
2,1	-1.968	-21.83	-21.65	+1"		+9
3,1	-0.108	-1.20	-1.19			
4,1	-0.006					
<hr/>						
-1,0	+0.004					
0,0	-0.59324	-6.58	-6.53			
1,0	+12.946	+143.59	+142.42	-7	-26	-58
2,0	-78.137	-866.64	-859.60	+39	+156	+352
3,0	-4.291	-47.60	-47.21	+2	+9	+19
4,0	-0.236	-2.61	-2.59			
5,0	-0.013					
<hr/>						
0,-1	-0.0149	-0.17	-0.16			
1,-1	+0.326	+3.62	+3.59			
2,-1	-1.968	-21.83	-21.65	+4		+9
3,-1	-0.108	-1.20	-1.19			
4,-1	-0.006					
<hr/>						
1,-2	+0.008					
2,-2	-0.050	-0.55	-0.55			
3,-2	-0.003					
<hr/>						
<u>4.</u>						
-1,4	+0.010					
0,4	-0.190	-2.13	-2.11			
1,4	+0.010					
<hr/>						
-2,3	+0.004					
-1,3	+0.255	+2.86	+2.83			
0,3	-4.6621	-52.34	-51.71	+16	-5	+7
1,3	+0.255	+2.86	+2.83			
2,3	+0.004					

4.						
-3,2	+0,002					
-2,2	+0.059	+0,67	+0,66			
-1,2	+4.333	+48.66	+48.07	-15"	+4"	-7"
0,2	-79.3155	-890.42	-879.74	+278	-79	+119
1,2	+4.333	+48.66	+48,07	-15	+4	-7
2,2	+0.059	+0.67	+0.66			
3,2	+0.002					
-1,1	-0.037	-0.41	-0.40			
0,1	+0.6664	+7.48	+7.39	-2		-1
1,1	-0.037	-0.41	-0.40			
5.						
0,2	-0.0042					
1,2	+0.026	+0.87	+0.87	-19	+19	+19
2,2	-0.158	-5.28	-5.27	+118	-117	-117
3,2	-0.009	-0.29	-0.29	+6	+6	+6
6.						
0,0	-0.00041					
1,0	+0.001					
0,-1	-0.0066	+0.81	-0.07			
1,-1	+0.048	-5.96	+0.51			
2,-1	-0.004	+0.16	-0.01			
0,-2	-0.0003					
1,-2	+0.002	-0.30	+0.02			
7.						
2,-2	+0.004					
3,-2	-0.004	+0.04	-0.04			
1,-3	+0.005					
2,-3	-0.060	+0.67	-0.66			
3,-3	+0.238	-2.68	+2.62			
4,-3	+0.020	-0.22	+0.22			
2,-4	-0.005					
3,-4	+0.020					
8.						
0,2	+0.0020					
1,2	-0.015					
0,1	+0.0400	+0.45	+0.44			
1,1	-0.293	-3.28	-3.20			
2,1	+0.008	+0.09	+0.09			
0,0	+0.00067					
1,0	-0.005					
9.						
2,-1	+0.059	+0.66	+0.65			
3,-1	-0.238	-2.62	-2.59			
4,-1	-0.020	-0.22	-0.22			
10.						
0,-3	-0.0336	+0.38	-0.37			
1,-3	+0.245	-2.77	+2.72			
2,-3	-0.007	+0.08	-0.07			

Der Ausdruck des Art. 41 giebt

$$C_0^{(3)} = -0,0040 \sin(2g' + 2\omega')$$

welcher weiter unten berücksichtigt werden wird.

Ausser den in den vorhergehenden Tafeln angesetzten Differentialquotienten der Functionen  $T_0$ ,  $G_0$ ,  $\Sigma_0$ ,  $B_0$ ,  $C_0$  werden noch die nach  $g$ , und später auch die nach  $\gamma$  gebraucht. Da aber  $g$  und  $\gamma$  explicite in den Argumenten vorkommen, und diese Differentialquotienten daher auf die einfachste Art aus den Functionen selbst erhalten werden, so habe ich nicht für nöthig gehalten sie mit anzuführen.

Ich mache noch darauf aufmerksam, dass die Coefficienten der vorhergehenden Tafeln, die mit mehr wie drei Decimalen angesetzt sind, diejenigen sind, die bei den Integrationen kleine Divisoren bekommen. Auf diesen Umstand muss auch in allen folgenden Rechnungen Rücksicht genommen werden.

§ 5. Berechnung der Producte, die in den vollständigen Ausdrücken enthalten sind.

65.

Im Vorhergehenden sind alle bekannten Glieder aufgestellt, die man zur genauen Berechnung der von der Sonne in der Bewegung des Mondes verursachten Störungen braucht, die noch erforderlichen Glieder sind Unbekannte; sie sind die Störungen selbst. Die Aufgabe ist transcendent, wie so viele andere. Zur Auflösung derselben sind die Unbekannten selbst erforderlich, und man kann sie entweder sogleich, aber mit unbestimmten Coefficienten versehen, einführen, oder man kann sie nach und nach, indem man von genäherten Werthen derselben ausgeht, durch eine Reihe von Annäherungen bestimmen. Den letzteren Weg habe ich, wie schon im Art. 42 angeführt ist, eingeschlagen.

Die genäherten Werthe erhält man, indem man die Differentialgleichungen mit bloser Rücksicht auf die erste Potenz der störenden Kraft integrirt. Hier wurden daher, mit Weglassung alles Uebrigen, zuerst bloß die in den mit  $T_0$ ,  $B_0$ ,  $C_0$  überschriebenen Columnen der Artt. 57, 63 und 64 enthaltenen Zahlenwerthe in die Differentialgleichungen für  $nz$ ,  $\nu$ ,  $P$ ,  $Q$  substituirt, und die Integrationen ausgeführt. Die so erhaltenen Werthe der eben genannten Unbekannten, wozu noch

der zugleich auf ähnliche Weise aus der  $\Sigma_0$  überschriebenen Columne des Art. 62 durch die Integration erhaltene Werth von  $\delta \frac{h}{k}$  hinzugezogen werden musste, ergaben durch ihre Substitution und die darauf wieder ausgeführten Integrationen mehr genäherte Werthe von  $nz$ ,  $\nu$ ,  $P$ ,  $Q$ , u. s. w. Diese Annäherungen wurden fortgesetzt, bis zuletzt die substituirten Werthe sich bis auf kleine Bruchtheile der Secunde wieder ergaben. Es ist an sich klar, dass hiemit die Auflösung der Aufgabe vollendet ist.

Bei der Ausführung dieser successiven Substitutionen giebt es einige Kunstgriffe, wodurch man sich die nicht unbeträchtliche Arbeit, die sie verursacht, wesentlich erleichtern kann, und diese habe ich angewandt. Die Annäherungen gestalten sich für die verschiedenen Coefficienten ungleich, eine Anzahl derselben nähert sich schneller den wahren Werthen, und eine andere Anzahl langsamer; zu Letzteren gehören namentlich diejenigen, die bei den Integrationen kleine Divisoren bekommen, obgleich unter den Coefficienten, die keine kleinen Divisoren bekommen, es auch eine Anzahl giebt, deren Annäherung langsam vor sich geht. Wenn man ein paar Annäherungen ausgeführt hat, so findet man leicht diejenigen heraus, die zur letztgenannten Classe gehören und eine gewisse Wechselwirkung auf einander ausüben, die von der Art ist, dass ein kleiner Fehler in einigen dieser Coefficienten einen grösseren Fehler in gewissen anderen Coefficienten hervorbringt. Wenn man nun ein paar Annäherungen nur mit Zuziehung dieser Coefficienten und mit Uebergehung aller übrigen ausführt, so verringert man sich die Arbeit und vergrössert schneller die Annäherung im Allgemeinen. Ferner kann man aus dem Gange, den die Unterschiede eines langsam sich dem wahren Werthe nähernden Coefficienten befolgen, durch eine Art von Induction einen Werth ziehen, der dem wahren Werthe dieses Coefficienten voraussichtlich nahe kommen muss, und die Substitution dieses Werthes statt des aus der nächst vorhergehenden Annäherung erhaltenen, fördert gleichfalls die Arbeit und verursacht, dass man schneller zum Ziele gelangt. Endlich giebt es noch einen Kunstgriff, der, wenn man schon an die letzten Stadien gelangt ist, die noch erforderliche Arbeit sehr verkürzt, und dieser besteht darin, dass man in den letzten Annäherungen nicht die vollen Werthe der Unbekannten, sondern ihre Unterschiede von den zunächst vorher erhaltenen Werthen

substituiert. Statt vieler und grosser Glieder hat man bei Anwendung dieses Verfahrens eine geringere Anzahl kleiner Glieder zu substituieren, und es ist selbstverständlich, dass dadurch die letzten Annäherungen sehr abgekürzt werden.

Durch Anwendung dieser und ähnlicher Verfahrensarten habe ich schliesslich die Mondstörungen erhalten, die meinen Mondtafeln zu Grunde liegen und dazu 12 bis 13 Annäherung nöthig gehabt. Die Zeit, die ich darauf verwandt habe, beträgt keine volle drei Jahre, während welcher ich ausserdem noch manche andere Arbeit ausgeführt habe. Es liegt mir jetzt ob zu beweisen, dass die den Mondtafeln zu Grunde gelegten Störungen in der That den Gleichungen der Mondbewegung Gntze leisten, oder vielmehr bis auf kleine Bruchtheile der Secunde in jedem Coefficienten die Integrale derselben sind, und dazu ist durchaus nicht erforderlich, dass ich die verschiedenen Annäherungen, von welchen im Vorhergehenden die Rede ist, wiederhole und das Resultat einer jeden derselben angebe. Der Beweis der Richtigkeit meiner Störungscoefficienten wird dadurch vollständig geführt, dass ich mit Zugrundelegung der Störungen der Mondtafeln eine neue Annäherung ausführe und das Resultat derselben mit den genannten zu Grunde zu legenden Störungen vergleiche. Wenn in diesem Resultat sich nur geringe Abweichungen in jedem Coefficienten zeigen, so ist der vollständigste Beweis der Richtigkeit meiner Störungen geführt. Um meine Leser in den Stand zu setzen, die Richtigkeit der numerischen Rechnungen prüfen zu können, werde ich alle Einzelheiten dieser Annäherung, und namentlich jedes zu berechnende Product, anführen.

## 66.

Aus meinen Mondtafeln habe ich die folgenden Ausdrücke von  $n\delta z$  und  $w$  entnommen. Den Ausdruck von  $s$  hätte ich auch dort entnehmen und daraus die hier erforderlichen Ausdrücke von  $\delta P$  und  $\delta Q$  berechnen können. Kürzer jedoch verfare ich, wenn ich aus meinen Rechnungen diejenigen Ausdrücke von  $\delta P$  und  $\delta Q$  entnehme, aus welchen der in den Mondtafeln enthaltene Ausdruck von  $s$  berechnet worden ist, und schliesslich darauf zurütkkomme.

$g, g'$	$n\delta z$ sin	$w$ cos	$\delta P$ sin	$\delta Q$ cos
<u>1.</u>	<u><math>= 0\omega + 0\omega'</math></u>			
0,0		-1348"840		+34"700
1,0	0	+85.881	-10"556	+2.630
2,0	-4"609	+5.830	-0.198	+0.138
3,0	-0.177	+0.311	-0.005	+0.004
4,0	-0.011	+0.020		
-3,-1	+0.030	+0.046		
-2,-1	+1.088	+1.123	+0.007	+0.004
-1,-1	+73.260	+38.600	+0.217	+0.071
0,-1	+657.520	+24.146	-48.721	+0.463
1,-1	+111.688	-51.632	-0.418	+0.182
2,-1	+1.215	-1.163	-0.007	+0.006
3,-1	+0.025	-0.041		
-2,-2	+0.007	+0.009		
-1,-2	+0.795	+0.450	+0.007	+0.003
0,-2	+7.330	+0.515	-0.597	+0.044
1,-2	+2.134	-0.926	-0.013	+0.007
2,-2	+0.036	-0.030		
-1,-3	+0.007	+0.004		
0,-3	+0.088	+0.007		
1,-3	+0.053	-0.023		
<u>2.</u>	<u><math>= 2\omega - 2\omega'</math></u>			
0,0	-0.130	+0.026	+0.002	-0.003
1,0	-2.476	+1.244		
2,0	-0.050	+0.045		
-1,-1	-0.092	-0.032		
0,-1	+3.699	+0.676	-0.089	-0.012
1,-1	-27.651	+13.951	+0.072	-0.097
2,-1	-23.004	+16.423	-0.529	+0.516
3,-1	-1.335	+1.297	-0.024	+0.024
4,-1	-0.066	+0.089		
-2,-2	-0.025	-0.029		
-1,-2	-1.881	-1.078	-0.003	-0.007
0,-2	-41.630	-51.619	-4.829	+4.887
1,-2	+4467.016	-2084.607	-15.842	+14.534
2,-2	+2145.014	-1521.761	+39.628	-40.580
3,-2	+60.018	-69.083	+1.459	-1.469
4,-2	+2.081	-3.391	+0.062	-0.061
5,-2	+0.084	-0.181		

2.				
-1,-3	-0,403	-0,066		
0,-3	-2.348	-2.218	-0,186	+0,167
1,-3	+198.132	-88.721	-1.019	+0.929
2,-3	+155.061	-107.464	+2.588	-2.680
3,-3	+5.171	-5.506	+0.107	-0.107
4,-3	+0.203	-0.302	+0.005	-0.005
<hr/>				
0,-4	-0.254	-0.102		
1,-4	+7.020	-2.993	-0.046	+0.043
2,-4	+7.737	-5.248	+0.115	-0.119
3,-4	+0.288	-0.292	+0.004	-0.004
4,-4	+0.010	-0.016		
<hr/>				
1,-5	+0.239	-0.096		
2,-5	+0.326	-0.219		
3,-5	+0.007	-0.009		
<hr/>				
11. = $4\omega - 4\omega'$				
2,-2	-0.031	+0.018		
3,-2	-0.016	+0.012		
<hr/>				
1,-3	+0.038	-0.016		
2,-3	-0.353	+0.203		
3,-3	-0.640	+0.442		
4,-3	-0.236	+0.195		
5,-3	-0.024	+0.025		
<hr/>				
0,-4	-0.022	+0.011		
1,-4	+0.884	-0.359		
2,-4	+30.046	-17.123	-0.024	+0.020
3,-4	+35.724	-25.823	+0.389	-0.391
4,-4	+10.681	-8.959		
5,-4	+0.773	-0.901		
6,-4	+0.048	-0.074		
7,-4	+0.002	-0.005		
<hr/>				
1,-5	+0.046	-0.020		
2,-5	+2.661	-1.502		
3,-5	+4.140	-2.960	+0.046	-0.046
4,-5	+1.507	-1.236		
5,-5	+0.117	-0.132		
6,-5	+0.006	-0.010		
<hr/>				
2,-6	+0.153	-0.085		
3,-6	+0.295	-0.207		
4,-6	+0.125	-0.102		
5,-6	+0.010	-0.011		
<hr/>				
3,-7	+0.014	-0.010		
4,-7	+0.008	-0.007		

15.	$= 6\omega - 6\omega'$			
3,-5	-0.003	+0.001		
4,-5	-0.011	+0.009		
5,-5	-0.007	+0.006		
2,-6	+0.012	-0.003		
3,-6	+0.288	-0.182		
4,-6	+0.540	-0.397		
5,-6	+0.334	-0.277		
6,-6	+0.084	-0.079		
7,-6	+0.009	-0.011		
3,-7	+0.037	-0.023		
4,-7	+0.085	-0.063		
5,-7	+0.062	-0.049		
6,-7	+0.015	-0.015		
3.	$= 2\omega$			
2,2			-0.018	+0.018
0,1	+0.048	-0.008	-0.221	+0.243
1,1	-0.353	+0.179	+0.364	-0.364
2,1	+0.130	-0.094	-0.813	+0.813
3,1	+0.002	-0.003	-0.025	+0.025
-1,0	+0.072	+0.030		
0,0	+5.998	+1.122	-26.017	+25.759
1,0	-84.906	+42.572	+12.848	-12.820
2,0	+4.290	-2.824	-36.962	+36.960
3,0	+0.085	-0.106	-1.385	+1.385
4,0			-0.058	+0.058
0,-1	-0.042	-0.006	+0.171	-0.171
1,-1	+0.276	-0.142	+0.307	-0.307
2,-1	+0.123	-0.094	-1.021	+1.021
3,-1	+0.003	-0.003	-0.048	+0.048
1,-2			+0.010	-0.010
2,-2	+0.005	-0.003	-0.025	+0.025
4.	$= 2\omega'$			
-1,4			-0.015	+0.015
0,4			-0.600	+0.600
1,4			+0.008	-0.008
-2,3	+0.010	+0.006		
-1,3	+0.541	+0.220	-0.337	+0.333
0,3	-3.447	+0.382	-19.317	+19.441
1,3	-0.169	+0.102	+0.314	-0.315



4.				
-3,2	+0,004	+0,005		
-2,2	+0,158	+0,129	-0,034	+0,028
-1,2	+10,993	+4,830	-4,755	+4,657
0,2	-84,610	+6,352	-484,180	+485,919
1,2	-4,700	+2,636	+5,636	-5,647
2,2	-0,074	+0,080	+0,095	-0,095
-2,1	-0,005	-0,003		
-1,1	-0,195	-0,090	+0,076	-0,076
0,1	+2,008	-0,085	+9,913	-9,958
1,1	-0,054	+0,028	+0,036	-0,036
0,0	+0,004	+0,004	+0,145	-0,147
5. $= 2\omega + 2\omega'$				
0,2			+0,010	-0,009
1,2	-0,008	+0,005		
2,2	+0,005	-0,004	-0,055	+0,055
12. $= 4\omega - 2\omega'$				
2,-1	+0,002	-0,002		
3,-1	+0,006	-0,005		
1,-2	+0,015	-0,008	-0,015	+0,015
2,-2	-1,085	+0,629	+0,088	-0,088
3,-2	-0,599	+0,442	-0,372	+0,370
4,-2	+0,009	+0,005		
1,-3	+0,002	-0,001		
2,-3	-0,044	+0,026		
3,-3	-0,041	+0,029	-0,030	+0,030
4,-3	+0,002	-0,001		
13. $= 2\omega - 4\omega'$				
1,-3	-0,029	+0,011		
2,-3	-0,014	+0,012		
0,-4	+0,034	-0,016	+0,417	+0,416
1,-4	+0,193	-0,113	+0,775	+0,780
2,-4	+0,236	-0,194	+0,543	+0,520
3,-4	-0,064	+0,036		
4,-4	-0,003	+0,004		
1,-5	-0,027	+0,004		
2,-5	+0,034	-0,024	+0,045	+0,070
3,-5	+0,008	+0,004		
16. $= 6\omega - 4\omega'$				
3,-4	-0,014	+0,010		
4,-4	-0,019	+0,014		
5,-4	-0,006	+0,005		

17.	$= 4\omega - 6\omega'$			
2,-6	+0.004	-0.002		
3,-6	+0.007	-0.005		
4,-6	+0.003	-0.003		
18.	$= 4\omega$			
3,0			+0.013	-0.013
19.	$= 4\omega'$			
0,4			+0.060	-0.060
6.	$= \omega - \omega'$			
0,1	+0.012	-0.001		
1,1	-0.056	+0.030		
-1,0	+0.281	+0.138		
0,0	+0.562	-0.283	-0.163	+0.019
1,0	+17.489	-8.732		
2,0	+0.260	-0.250		
-1,-1	-0.564	-0.318		
0,-1	-11.692	+0.754	+1.359	-0.167
1,-1	-121.368	+56.948	+0.670	-0.099
2,-1	-1.614	+1.533	-3.748	-3.748
3,-1	-0.037	+0.057	-0.007	0.000
-1,-2	-0.008	-0.001		
0,-2	-0.128	+0.031	+0.028	-0.001
1,-2	-0.552	+0.253	+0.024	+0.006
2,-2	-0.079	+0.054		
3,-2	-0.003	+0.003		
0,-3	+0.004	+0.003		
1,-3	+0.042	-0.016		
7.	$= 3\omega - 3\omega'$			
1,-2	-0.043	+0.020		
2,-2	+0.269	-0.160		
3,-2	+0.121	-0.088		
4,-2	+0.007	-0.007		
0,-3	+0.018	+0.021		
1,-3	-1.115	+0.537		
2,-3	-3.122	+1.886	-0.046	+0.046
3,-3	+0.625	-0.578	+0.073	-0.074
4,-3	+0.020	-0.026		
5,-3	+0.002	-0.002		

7.				
1,—4	—0,076	+0,037		
2,—4	—0.230	+0.140		
3,—4	+0.084	—0.072		
4,—4	+0.005	—0.005		
14.				
		= $5\omega - 5\omega'$		
3,—5	—0.052	+0.035		
4,—5	—0.002	+0.003		
5,—5	+0.008	—0.007		
8.				
		= $\omega + \omega'$		
0,1	+0.084	—0.018	+0,549	—0,549
1,1	+0.760	—0.412	{ —0.323	{ +0.324
			{ +3.204	{ —3.204
0,0			—0.016	+0.017
1,0	+0 083	—0.043		
9.				
		= $3\omega - \omega'$		
2,—1	—0.007	+0.004	+0.033	—0.033
3,—1	+0.008	—0.008	—0.069	+0.069
10.				
		= $\omega - 3\omega'$		
0,—3			—0.195	—0.204
1,—3	—0.295	+0.097	—0.325	—0.329

In der vorstehenden Tafel bei den Argumenten 1,—1 in 6, und 1,1 in 8 sind zwei Zahlenwerthe angegeben, von diesen ist der obere der Werth, der den im Vorhergehenden mit *B* und *C* bezeichneten Functionen angehört, der untere ist die aus den Werthen von  $dp'$  und  $dq'$  in  $\delta P$  und  $\delta Q$  wegen der Einwirkung des Mondes auf die Sonnenbreite entspringende Ungleichheit. Diese muss zwar, wie im Art. 38 erklärt wurde, bei der Berechnung der aus  $\delta P$  und  $\delta Q$  entstehenden Störungen höherer Ordnung mit hinzugezogen, aber schliesslich bei der Berechnung der Breitenstörungen des Mondes weggelassen werden.

67.

Ausser den im vor. Art. angegebenen Werthen von  $n\delta z$  und  $w$  selbst werden zur Berechnung der Mondstörungen deren Quadrate und höhere Potenzen gebraucht; diese werde ich daher zunächst anführen. Es sind diese die ersten numerischen Producte, die zu berechnen sind, und die ich, gleichwie alle übrigen, auf die Art berechnet habe, die ich in früheren Abhandlungen ausführlich erklärt habe, und daher darauf verweise.

$g, g'$	$\frac{1}{2}(n\delta z)^2$ cos	$\frac{1}{6}(n\delta z)^3$ sin	$\frac{1}{24}(n\delta z)^4$ cos	$w^2$ cos	$2w^2$ cos	$4w^4$ cos
<b>1.</b>						
0,0	+30,397		+0,0015	+25,065	-0,740	+0,029
1,0	+23.463	-0,002	+0.0018	+15.342	-0.592	+0.032
2,0	+0.448		+0.0004	+1.050	-0.024	+0.004
3,0	+0.007			+0.057		
-2,-1	-0.001	+0.005		+0.032	+0.009	
-1,-1	+0.780	+0.048	+0.0001	+0.041	+0.014	
0,-1	+2.549	+0.106	+0.0002	+1.11285	-0.04427	+0.00305
1,-1	+1.588	+0.053	+0.0002	+1.721	-0.073	+0.004
2,-1	+0.062	+0.007	+0.0001	+0.068	-0.012	
3,-1	+0.002			+0.003		
-2,-2	-0.009			+0.005		
-1,-2	-0.093	+0.002		+0.017		
0,-2	-0.477	+0.006		+0.0267	-0.0005	
1,-2	-0.114	+0.003		+0.045		
2,-2	-0.013	+0.001		+0.010		
0,-3	-0.008			+0.003		
1,-3	-0.002			+0.002		
<b>2.</b>						
0,1				-0.00012	+0.00001	
0,0	+0.022	-0.001		+0.00602	-0.00058	
1,0	+0.042	-0.006		-0.016		
2,0	+0.005	-0.003		-0.004		
3,0	-0.002					
-1,-1	-0.001			+0.025		
0,-1	+1.159	+0.007	+0.0003	+0.53033	-0.03614	+0.00188
1,-1	+7.721	+0.045	+0.0007	-0.033	-0.032	
2,-1	+4.244	+0.008	+0.0005	-0.750	+0.008	
3,-1	+0.491	+0.004	+0.0001	-0.312	+0.006	
4,-1	+0.020			-0.021		
-2,-2	-0.002			-0.004		
-1,-2	-0.042	+0.001		-0.060	-0.023	
0,-2	+0.196	+0.126		-0.0743	-0.2585	+0.0130
1,-2	+0.920	+0.396		+26.995	-1.203	+0.041
2,-2	+0.764	+0.291		+19.305	-0.984	+0.038
3,-2	+0.210	+0.069		+0.290	-0.215	+0.009
4,-2	+0.034	+0.003		-0.021	-0.021	
5,-2	+0.001			-0.003		
-1,-3	-0.004			-0.024		
0,-3	-0.720	+0.010	-0.0002	-0.405	-0.004	
1,-3	-7.435	+0.035	-0.0007	+0.634	-0.064	
2,-3	-4.572	+0.033	-0.0006	+1.734	-0.110	+0.001
3,-3	-0.671	+0.009	-0.0002	+0.421	-0.041	
4,-3	-0.022			+0.026		
0,-4	-0.039			-0.022		
1,-4	-0.425	-0.004		+0.001		
2,-4	-0.360	-0.002		+0.083	-0.003	
3,-4	-0.060			+0.037		
1,-5	-0.016					
2,-5	-0.018			+0.003		
3,-5	-0.003			+0.001		

BERECHNUNG DER IN DEN MONDTAFELN ANGEWANDTEN STÖRUNGEN. 221

14.						
2,-2	+0,025			-0,043		
3,-2	+0.010			-0.008		
1,-3	-0.034	+0,007		-0.006	-0,008	
2,-3	+0.338	+0.045		-0.149	-0.003	
3,-3	+0.459	+0.043		-0.279	+0.017	
4,-3	+0.162	+0.044		-0.148	+0.016	
5,-3	+0.013	+0.004		-0.018	+0.003	
0,-4	+0.020			+0.017		
1,-4	+0.456	+0.002	-0,0005	+0.529	-0.014	+0,004
2,-4	-23.947	+0.010	-0.0016	+11.426	-0.427	+0.023
3,-4	-23.184	+0.012	-0.0018	+15.714	-0.604	+0.031
4,-4	-6.214	+0.005	-0.0007	+6.444	-0.238	+0.014
5,-4	-0.355		-0.0004	+0.551	-0.012	+0.002
6,-4	-0.015			+0.039		
1,-5	+0.040	-0.004		+0.044	+0.006	
2,-5	-2.171	-0.042	-0.0002	+0.952	-0.023	
3,-5	-2.776	-0.042	-0.0002	+1.780	-0.068	+0.001
4,-5	-0.918	-0.016	-0.0001	+0.899	-0.043	+0.001
5,-5	-0.057	-0.002		+0.085	-0.005	
1,-6	+0.004					
2,-6	-0.126	-0.004		+0.051		
3,-6	-0.203	-0.005		+0.124	-0.004	
4,-6	-0.075	-0.002		+0.074		
5,-6	-0.002			+0.007		
2,-7	-0.006					
3,-7	-0.012			+0.006		
4,-7	-0.005			+0.005		
15.						
3,-5	+0.006	+0.002	-0.0002	-0.003	+0.002	
4,-5	+0.013	+0.003	-0.0002	-0.008	+0.005	
5,-5	+0.009	+0.002	-0.0001	-0.007	+0.004	
2,-6	-0.007	+0.002		+0.008	-0.008	
3,-6	-0.326	-0.086		+0.184	-0.124	+0.006
4,-6	-0.542	-0.125		+0.393	-0.253	+0.012
5,-6	-0.306	-0.064		+0.291	-0.192	+0.009
6,-6	-0.069	-0.013		+0.084	-0.059	+0.002
7,-6	-0.006	-0.001		+0.010	-0.006	
3,-7	-0.043	-0.012	+0.0001	+0.022	-0.015	
4,-7	-0.087	-0.020	+0.0002	+0.061	-0.038	
5,-7	-0.056	-0.012	+0.0001	+0.051	-0.033	
6,-7	-0.013	-0.002		+0.016	-0.010	
3.						
0,1	-0.04					
1,1	-0.10					
2,1	+0.01			+0.01		
0,0	-0.13			-0.04		
1,0	+0.87			-0.66		
2,0	+0.48			-0.06		
3,0	+0.04			-0.02		
0,-1	0.00					
1,-1	+0.14					
2,-1	+0.04			-0.01		

<u>4.</u>					
-1,3	-0.03			-0.02	
0,3	-0.17			-0.02	
1,3	-0.02				
-2,2	+0.02			-0.02	
-1,2	-0.38			-0.39	
0,2	-0.90			-0.53	
1,2	+0.06			-0.07	
0,1	+0.13				
1,1	+0.03				
<u>12.</u>					
1,-2	-0.07			-0.02	
2,-2	+0.90			-0.45	
3,-2	+0.40			-0.34	
2,-3	+0.04			-0.02	
<u>13.</u>					
1,-3	+0.03				
2,-3	+0.02				
1,-4	-0.91			-0.08	
2,-4	-0.31			-0.11	
3,-4	+0.04				
<u>6.</u>					
0,0	-0.04			-0.04	
1,0	-0.19			+0.12	
2,0	-0.02			+0.01	
-1,-1	-0.01			-0.03	
0,-1	-1.35			-0.60	
1,-1	-0.82			-1.19	
2,-1	-1.10			-0.02	
0,-2	+0.17			+0.08	
1,-2	+0.24			+0.04	
2,-2	+0.03			-0.01	
<u>7.</u>					
2,-2	-0.20			+0.09	
3,-2	-0.10			+0.06	
1,-3	+0.11			-0.03	
2,-3	+1.36			-0.62	
3,-3	+0.64			-0.43	
4,-3	+0.03			-0.03	
1,-4	+0.01				
2,-4	+0.07			-0.02	
3,-4	+0.05			-0.03	
<u>14.</u>					
3,-5	+0.05			-0.02	
4,-5	+0.03			-0.01	

Der Richtigkeit sowohl dieser wie der vorhergehenden und nachfolgenden Rechnungen habe ich mich durch Controllen, deren Methode viele, und schon früher erklärte, darbietet, versichert. Wer sich durch eigene Anschauung von der Richtigkeit derselben überzeugen will, braucht nur die Zahlenwerthe nachzurechnen. Das grösste der vorstehenden Producte erfordert zu seiner Berechnung eine Zeit von nur höchstens zwei bis drei Stunden. Aber auch einzelne Glieder dieser Producte kann man abgedondert von den übrigen nachrechnen. Schreibt man sich alle Glieder des einen Factors auf den oberen Rand eines Stück Papiers, und alle Glieder des andern Factors auf den unteren Rand eines andern Stück Papiers, und verwandelt zugleich die Glieder eines der beiden Factors in Theile des Kreisradius, so erkennt man auf den ersten Blick die Combinationen, die auf den Coefficienten, den man berechnen will, merklichen Einfluss haben. Ich werde von einigen Coefficienten von  $w^2$  zur Erläuterung die einzelnen Glieder, aus welchen sie bei der Multiplication entstanden sind, anführen.

1.	1.	0, -1 in 1.	11.	11.	
0,0	0, -1	-0,31579	2, -3	2, -4 -	2
1,0	-1, -1	+ 1607	3, -3	3, -4 -	6
1,0	1, -1	- 2150	2, -4	2, -5 +	12
2,0	-2, -1	+ 3	3, -4	3, -5 +	37
2,0	2, -1	- 3	4, -4	4, -5 +	5
-1, -1	-1, -2	+ 8			
0, -1	0, -2	+ 6			
1, -1	1, -2	+ 23			
2.	2.				
1,0	1, -1	+ 8			
0, -1	0, -2	- 17			
1, -1	1, -2	- 14099			
2, -1	2, -2	- 12116			
3, -1	3, -2	- 44			
0, -2	0, -3	+ 56			
1, -2	1, -3	+ 89666			
2, -2	2, -3	+ 79283			
3, -2	3, -3	+ 184			
1, -3	1, -4	+ 129			
2, -3	2, -4	+ 273			
3, -3	3, -4	+ 1			
					+1,11285

wie in der Tafel angeführt ist. Dieser Coefficient gehört zu denen, die aus vielen Gliedern bestehen, und es wären noch ein Paar kleine Glieder hinzugekommen, wenn ich die Combinationen, die die Abtheilungen 3 und 3, 4 und 4, 6 und 6 geben, hinzugezogen hätte. Da aber die Wirkung dieser Combinationen auf das Endresultat fast ganz verschwindet, so habe ich sie weggelassen. Ferner:

1.	2.	1, -2 in 2.	2.	2.	2, -4 in 11.
0, -1	1, -1	+0'002	1, -2	1, -2	+10'534
-1, -1	2, -1	+ 3	0, -2	2, -2	+ 381
1, 0	0, -2	- 22	1, -1	1, -3	- 6
0, 0	1, -2	+27.263	1.	11.	
1, 0	2, -2	- 634	0, 0	2, -4	+ 224
2, 0	3, -2	- 2	1, 0	3, -4	- 12
0, -1	1, -3	- 10	2.	15.	
1, -1	2, -3	+ 27	1, -2	3, -6	+ 2
2.	11.		2, -2	4, -6	+ 3
1, -2	2, -4	+ 173			+11'126
2, -2	3, -4	+ 190			
3, -2	4, -4	+ 3			
2, -3	3, -5	+ 2			
		+26'995			

mit der vorstehenden Tafel gleichlautend. Auf diese Art kann man so viele Glieder nachrechnen, wie man will.

Eine andere Frage von Wichtigkeit knüpft sich an die vorstehende Tafel. Wie man sieht bin ich bis zu  $(ndz)^4$  und  $w^4$  gegangen, und es fragt sich daher, ob diese Grenze zur genauen Berechnung der Mondstörungen ausreichend ist, oder ob nicht die höheren Potenzen von  $ndz$  und  $w$  Merkliches geben können? Um diese Frage zu erörtern, ist erstens zu erwägen, dass der grösste Coefficient in  $ndz$ , der der Evection, in Theilen des Kreisradius nahe  $= \frac{1}{46}$  ist, das grösste Glied der einzelnen Theile, aus welchen  $(ndz)^2$  besteht, ist also nahe  $= \frac{1}{(46)^2}$ , das grösste Glied in  $(ndz)^3$  nahe  $= \frac{1}{(46)^3}$ , das grösste Glied in  $(ndz)^4$  nahe  $= \frac{1}{(46)^4}$ , u. s. w. In  $w$  ist der grösste Coefficient nur ohngefähr halb so gross, und die Abnahme der grössten Glieder in  $w^2$ , etc. also viel grösser. Die Potenzen von  $ndz$  und  $w$ , und nicht minder die von  $\delta P$  und  $\delta Q$ ,



können daher unter einander mit der Summe einer Anzahl von geometrischen Reihen verglichen werden, deren Exponenten sehr klein sind, und die daher eine bedeutende Convergenz besitzen. Wenn man daher eine gewisse Potenz von  $n\delta z$  angeben kann, die nichts Merkliches hervorbringt, so kann man sicher sein, dass alle höheren Potenzen um so mehr nichts Merkliches geben können. Es wird nun in der Folge  $n\delta z$  nur mit Functionen wie  $\left(\frac{dT_0}{dg}\right)$  multiplicirt vorkommen, und da der grösste Coefficient in  $\left(\frac{dT_0}{dg}\right)$  zufolge des Art. 57 = 40435" und der in  $n\delta z = 4467''$  ist, so wird unter den einzelnen Theilen, aus welchen  $\left(\frac{dT_0}{dg}\right) n\delta z$  besteht, das grösste Glied = 226", also sehr merklich. Es wird ferner  $\frac{1}{2}(n\delta z)^2$  in der Folge nur mit Functionen wie  $\left(\frac{d^2T_0}{dg^2}\right)$  multiplicirt vorkommen, aber der grösste Coefficient in  $\left(\frac{d^2T_0}{dg^2}\right)$  ist = 20870", und der in  $\frac{1}{2}(n\delta z)^2 = 30''$ , das grösste Glied in  $\frac{1}{2}\left(\frac{d^2T_0}{dg^2}\right)(n\delta z)^2$  ist daher = 3", viel kleiner wie das vorherige. Ferner, der grösste Coefficient in  $\left(\frac{d^3T_0}{dg^3}\right)$  ist = 46534", und der in  $\frac{1}{6}(n\delta z)^3 = 0,45$ , also das grösste Glied in  $\frac{1}{6}\left(\frac{d^3T_0}{dg^3}\right)(n\delta z)^3 = 0,10$ , schon sehr klein. Das grösste Glied in  $\left(\frac{d^4T_0}{dg^4}\right)$  ist = 439604" und das grösste Glied in  $\frac{1}{24}(n\delta z)^4 = 0,0018$ , es wird daher das grösste Glied in  $\frac{1}{24}\left(\frac{d^4T_0}{dg^4}\right)(n\delta z)^4 = 0,001$ , welches für unmerklich zu erachten ist. Aus mehrerem Grunde kann  $w^4$ , wo diese Function auf ähnliche Art eintritt, wie  $(n\delta z)^4$  nur Unmerkliches geben. Aus diesem Grunde durfte ich in den folgenden Rechnungen bei  $(n\delta z)^3$  stehen bleiben, und  $(n\delta z)^4$  ist in der vorstehenden Tafel nur deshalb angesetzt worden, damit jeder deutlich erkennen könne, dass nichts Merkliches daraus hervorgeht. Mit  $w^4$  verhält es sich etwas anders. Es tritt, wie man weiter unten sehen wird, auch in dem Gliede  $\frac{h_0}{h} \left(\frac{v}{1+v}\right)^2$  des Ausdrucks (5) für  $dz$  auf, ohne mit einer Grösse erster Ordnung multiplicirt zu werden, wie stets mit  $n\delta z$  und dessen Potenzen der Fall ist, es äussert daher *ceteris paribus*  $w^4$  eben so grosse Wirkung auf das Endresultat wie  $(n\delta z)^3$ , mit anderen Worten, jede dieser beiden Functionen giebt im Endresultat Glieder von der vierten Ordnung in Bezug auf die störende Kraft. Es geht aus dieser Darlegung hervor, dass hiemit jede wünschenswerthe Genauigkeit erreicht wird, und die Glieder der fünf-

ten, und mehr noch die der höheren Ordnungen nur Unmerkliches hervorbringen können.

68.

Zufolge der Entwicklungen des § 3 werden in der Folge auch die Functionen  $\nu$ ,  $2\nu + \nu^2$ ,  $3\nu + 3\nu^2 + \nu^3$  gebraucht werden, die nach Art. 45 aus  $w$  und den Potenzen davon durch die folgenden Reihen berechnet werden müssen.

$$\begin{aligned}\nu &= w + \frac{1}{4}w^2 + \frac{1}{4}w^3 + \frac{1}{8}w^4 \\ 2\nu + \nu^2 &= 2w + 2w^2 + \frac{1}{4}w^3 + \frac{3}{8}w^4 \\ 3\nu + 3\nu^2 + \nu^3 &= 3w + \frac{3}{2}w^2 + \frac{3}{2}w^3 + \frac{21}{8}w^4\end{aligned}$$

Diese Functionen sind in der folgenden Tafel zusammengestellt.

$g, g'$	$\nu$ COS	$2\nu + \nu^2$ COS	$3\nu + 3\nu^2 + \nu^3$ COS
<u>1.</u>			
0,0	-1336,369	-2648,040	-3935,743
1,0	+93.503	+202.058	+325.37
2,0	+6.353	+13.742	+22.16
3,0	+0.340	+0.736	+1.19
-3,-1	+0.046	+0.092	+0.14
-2,-1	+1.140	+2.316	+3.53
-1,-1	+38.622	+77.292	+116.04
0,-1	+24.699	+50.490	+77.36
1,-1	-50.777	-99.870	-147.32
2,-1	-1.130	-2.198	-3.13
3,-1	-0.039	-0.076	-0.11
-2,-2	+0.012	+0.028	+0.05
-1,-2	+0.459	+0.934	+1.43
0,-2	+0.528	+1.084	+1.67
1,-2	-0.903	-1.762	-2.58
2,-2	-0.025	-0.040	-0.05
0,-3	+0.009	+0.020	+0.04
1,-3	-0.022	-0.042	-0.06
<u>2.</u>			
0,0	+0.029	+0.064	+0.11
1,0	+1.236	+2.456	+3.66
2,0	+0.043	+0.082	+0.12
-1,-1	-0.019	-0.044	+0.02
0,-1	+0.938	+2.388	+4.33
1,-1	+13.931	+27.814	+41.63
2,-1	+16.049	+31.340	+45.91
3,-1	+1.141	+1.974	+2.50
4,-1	+0.078	+0.136	+0.17

<u>2.</u>			
-2,-2	-0,034	-0,066	-0,11
-1,-2	-1.110	-2.292	-3.56
0,-2	-51.678	-103.556	-155.76
1,-2	-2074.209	-4116.020	-6135.03
2,-2	-1512.190	-3005.562	-4480.59
3,-2	-68.956	-137.728	-206.42
4,-2	-3.404	-6.838	-10.31
5,-2	-0.183	-0.368	-0.56
<hr/>			
-1,-3	-0.078	-0.180	-0.31
0,-3	-2.424	-5.248	-8.49
1,-3	-88.409	-176.216	-263.45
2,-3	-106.606	-211.534	-314.84
3,-3	-5.298	-10.498	-14.72
4,-3	-0.289	-0.552	-0.79
<hr/>			
0,-4	-0.113	-0.248	-0.41
1,-4	-2.992	-5.984	-8.98
2,-4	-5.206	-10.332	-15.37
3,-4	-0.273	-0.540	-0.68
<hr/>			
1,-5	-0.096	-0.192	-0.29
2,-5	-0.217	-0.432	-0.64
<hr/>			
<u>11.</u>			
2,-2	+0.041	+0.040	
3,-2	+0.008	+0.008	
<hr/>			
1,-3	-0.020	-0.050	-0.15
2,-3	+0.128	+0.106	-0.07
3,-3	+0.303	+0.338	+0.11
4,-3	+0.122	+0.104	-0.05
5,-3	+0.046	+0.046	
<hr/>			
0,-4	+0.020	+0.056	+0.11
1,-4	-0.095	+0.332	+1.28
2,-4	-11.596	-12.274	-2.24
3,-4	-18.046	-20.614	-8.09
4,-4	-5.773	-5.252	+1.45
5,-4	-0.626	-0.708	-0.25
6,-4	-0.054	-0.070	
<hr/>			
1,-5	+0.002	+0.046	+0.14
2,-5	-1.028	-1.116	-0.27
3,-5	-2.076	-2.406	-1.02
4,-5	-0.790	-0.702	+0.24
5,-5	-0.089	-0.098	
<hr/>			
2,-6	-0.059	-0.068	
3,-6	-0.145	-0.168	-0.08
4,-6	-0.065	-0.056	
<hr/>			
<u>15.</u>			
3,-6	-0.100	-0.076	
4,-6	-0.221	-0.174	
5,-6	-0.147	-0.098	

3.			
1,1		+0.36	
2,1		-0.16	
0,0	-1.40	+2.16	
1,0	+42.24	+83.82	
2,0	-2.85	-5.77	
3,0		-0.25	
1,-1		-0.28	
2,-1		-0.21	
4.			
-1,3		+0.40	
0,3		+0.72	
1,3		+0.20	
-2,2		+0.22	
-1,2	+4.63	+8.88	
0,2	+6.08	+11.64	
1,2	+2.60	+5.13	
2,2		+0.16	
-1,1		-0.18	
0,1		-0.17	
1,1		+0.06	
12.			
2,-2		+0.36	
3,-2		+0.20	
13.			
1,-4		-0.38	
2,-4		-0.60	
6.			
-1,0		+0.28	
0,0		-0.58	-0.87
1,0		-17.22	-25.65
2,0		-0.48	-0.72
-1,-1		-0.70	
0,-1		+0.30	-0.45
1,-1	+111.52	+165.48	
2,-1	+3.02	+4.50	
3,-1	+0.11		
0,-2		+0.22	
1,-2		+0.58	
2,-2		+0.08	
7.			
2,-2		-0.14	
3,-2		-0.06	
1,-3		+1.02	
2,-3		+2.54	
3,-3		-2.02	
4,-3		-0.11	
2,-4		+0.24	
3,-4		-0.20	
8.			
1,1		-0.82	-1.23

69.

Wir brauchen ausserdem zur Berechnung der Störungen  $\delta \frac{h^2}{h_0^2}$  und  $\delta \frac{h}{h_0}$ , und diese erhalten wir am Einfachsten, wenn wir zuerst  $\delta \frac{h_0}{h}$ , und die Potenzen davon berechnen. Die Coefficienten von  $\delta \frac{h_0}{h}$ , die die folgende Tafel giebt, habe ich auf zwei verschiedene Arten berechnet. Mit Ausnahme des constanten Gliedes, welches auf jeden Fall durch den Ausdruck (19) berechnet werden muss, habe ich die Abtheilungen 1, 2, 11, 15 durch (18) berechnet, aber da die Zahlen, die zu dieser Berechnung nöthig sind, auch anderweitig gebraucht werden, so lasse ich sie erst weiter unten folgen. Die Abtheilungen 3, 4, etc. sind durch den Ausdruck (19) berechnet. Jene habe ich so genau wie möglich berechnet, in dieser habe ich die Genauigkeit nicht so weit getrieben, sie sind indess für den Zweck, zu dem sie dienen sollen, hinreichend genau.

$g, g'$	$\delta \frac{h_0}{h}$ COS	$\left(\delta \frac{h_0}{h}\right)^2$ COS	$2\left(\delta \frac{h_0}{h}\right)^3$ COS
<b>1.</b>			
0,0	-9667852	+67893	-07108
1,0	-59.289	-0.622	+0.022
2,0	-2.130	-0.435	+0.013
3,0	-0.092	-0.017	
4,0	-0.004		
-3,-1	-0.004		
-2,-1	-0.059	-0.011	
-1,-1	-1.856	-0.045	+0.002
0,-1	-4.174	+0.292	-0.008
1,-1	-3.606	-0.036	+0.002
2,-1	-0.149	-0.029	
3,-1	-0.008		
-2,-2	-0.004		
-1,-2	-0.057	-0.004	
0,-2	-0.147	+0.011	
1,-2	-0.124	-0.003	
2,-2	-0.005	-0.001	
0,-3	-0.013		
1,-3	-0.005		
<b>2.</b>			
0,0	+0.0648		
1,0	-0.010		
2,0	-0.002		
3,0	-0.001		

<u>2.</u>			
-1,-1	+0.004	+0.002	
0,-1	+0.143	+0.007	
1,-1	+1.497	-0.048	
2,-1	-10.237	+0.080	+0.001
3,-1	-0.524		
4,-1	-0.028		
<hr/>			
-2,-2	+0.002		
-1,-2	+0.124	+0.029	
0,-2	-93.423	+0.959	-0.017
1,-2	-329.077	+2.880	-0.057
2,-2	+920.705	-8.550	+0.153
3,-2	+33.086	-0.577	+0.003
4,-2	+1.342	-0.034	-0.003
5,-2	+0.064		
6,-2	+0.003		
<hr/>			
-1,-3	+0.007		
0,-3	-3.068	+0.040	
1,-3	-20.671	+0.183	-0.004
2,-3	+59.596	-0.566	+0.011
3,-3	+2.340	-0.055	
4,-3	+0.104	-0.004	
5,-3	+0.005		
<hr/>			
0,-4	-0.094		
1,-4	-0.906	+0.008	
2,-4	+2.640	-0.026	
3,-4	+0.142	-0.002	
4,-4	+0.005		
<hr/>			
1,-5	-0.037		
2,-5	+0.098		
3,-5	+0.005		
<hr/>			
<u>11.</u>			
3,-2	-0.003		
<hr/>			
1,-3	-0.004		
2,-3	+0.048	+0.003	
3,-3	-0.128	+0.024	
4,-3	-0.042	-0.045	
5,-3	-0.005	-0.004	
<hr/>			
0,-4	0.000	+0.024	
1,-4	-0.080	+0.149	-0.003
2,-4	-0.624	-0.150	+0.003
3,-4	+7.463	-1.554	+0.042
4,-4	+1.967	+1.978	-0.056
5,-4	+0.185	+0.144	-0.004
6,-4	+0.015	+0.009	
<hr/>			
1,-5	-0.002	+0.044	
2,-5	-0.068	-0.008	
3,-5	+0.836	-0.196	+0.005
4,-5	+0.264	+0.257	-0.007
5,-5	+0.026	+0.020	
6,-5	+0.002		

<u>11.</u>			
2,-6	-0,005	+0,004	
3,-6	+0.057	-0.014	
4,-6	+0.021	+0.021	
5,-6	+0.001		
3,-7	+0.002		
4,-7	+0.001		
<hr/>			
<u>15.</u>			
4,-5	-0.002		
5,-5	-0.001		
3,-6	-0.001	-0.002	
4,-6	+0.064	-0.016	+0,004
5,-6	+0.040	+0.030	-0.010
6,-6	+0.010	+0.010	+0.009
7,-6	+0.002		
4,-7	+0.011		
5,-7	+0.008	+0.006	
6,-7	+0.002		
<hr/>			
<u>3.</u>			
2,4	+0.13		
0,0	+2.51	-0.02	
1,0	-3.21	+0.03	
2,0	+3.06	+0.03	
3,0	+0.10		
2,-1	+0.05		
<hr/>			
<u>4.</u>			
0,3	-0.09		
-1,2	+0.03		
0,2	-1.27	+0.04	
1,2	-0.38		
<hr/>			
<u>12.</u>			
2,-2	-1.72	+0.04	
3,-2	-1.47	+0.04	
4,-2	-0.08		
2,-3	-0.09		
3,-3	-0.10		
<hr/>			
<u>13.</u>			
1,-4	+0.10		
2,-4	+0.19		
<hr/>			
<u>6.</u>			
0,0	-0.53		
0,-1	+3.24	-0.03	
1,-1	+2.64	-0.02	
2,-1	-0.06		
1,-2	-0.06		
2,-2	-0.03		
<hr/>			
<u>7.</u>			
2,-2	-0.04		
3,-2	-0.03		

7.			
1, -3	+0,18		
2, -3	-0.80		
3, -3	+1.67	-0,01	
4, -3	+0.11		
2, -4	-0.07		
3, -4	+0.17		

Zufolge der folgenden Ausdrücke des Art. 45

$$\delta \frac{h}{h_0} = -\delta \frac{h_0}{h} + \left(\delta \frac{h_0}{h}\right)^2 - \left(\delta \frac{h_0}{h}\right)^3$$

$$(1+\nu)^2 \frac{h}{h_0} - 1 = (2\nu + \nu^2) + \delta \frac{h}{h_0} + (2\nu + \nu^2) \delta \frac{h}{h_0}$$

$$(1+\nu)^3 \frac{h}{h_0} - 1 = (3\nu + 3\nu^2 + \nu^3) + \delta \frac{h}{h_0} + (3\nu + 3\nu^2 + \nu^3) \delta \frac{h}{h_0}$$

$$\delta \frac{h^2}{h_0^2} = -2\delta \frac{h_0}{h} + 3\left(\delta \frac{h_0}{h}\right)^2 - 4\left(\delta \frac{h_0}{h}\right)^3$$

$$(1+\nu)^2 \frac{h^2}{h_0^2} - 1 = (2\nu + \nu^2) + \delta \frac{h^2}{h_0^2} + (2\nu + \nu^2) \delta \frac{h^2}{h_0^2}$$

ergaben sich die folgenden Coefficienten

$g, g'$	$\delta \frac{h}{h_0}$ cos	$(1+\nu)^2 \frac{h}{h_0} - 1$ cos	$(1+\nu)^3 \frac{h}{h_0} - 1$ cos	$\delta \frac{h^2}{h_0^2}$ cos	$(1+\nu)^2 \frac{h^2}{h_0^2} - 1$ cos
<b>1.</b>					
0,0	+973,799	-1683,24	-2975,1	+1954,595	-711,507
1,0	+58.656	+267.33	+394.1	+116.668	+332.013
2,0	+1.688	+15.29	+23.7	+2.929	+16.445
3,0	+0.073	+0.80	+1.3	+0.133	+0.864
-3,-1		+0.09		+0.002	+0.094
-2,-1	+0.048	+2.38	+3.5	+0.085	+2.443
-1,-1	+1.810	+79.66	+118.5	+3.573	+81.909
0,-1	+4.471	+55.71	+82.9	+9.242	+61.045
1,-1	+3.569	-96.44	-144.1	+7.100	-93.045
2,-1	+0.120	-2.12	-3.1	+0.211	-2.082
3,-1	+0.008	-0.07		+0.016	-0.062
-2,-2		+0.03		+0.002	+0.031
-1,-2	+0.053	+0.98	+1.5	+0.102	+1.057
0,-2	+0.158	+1.26	+1.9	+0.327	+1.461
1,-2	+0.121	-1.63	-2.5	+0.239	-1.524
2,-2	+0.004	-0.04		+0.007	-0.036
0,-3	+0.013	+0.03		+0.026	+0.049
1,-3	+0.005	-0.03		+0.010	-0.030
<b>2.</b>					
0,0	-0.065			-0.132	-0.071
1,0	+0.010	+2.48	+3.7	+0.020	+2.499
2,0	+0.002	+0.08		+0.004	+0.083
3,0	+0.001			+0.002	+0.002



2.					
-1,-4	-0'002	-0'03		-0'002	-0'070
0,-4	-0.106	+2.18	+4'0	-0.205	+2.018
1,-4	-1.515	+26.66	+40.6	-3.048	+25.524
2,-1	+10.316	+41.59	+56.1	+20.712	+51.902
3,-1	+0.524	+2.31	+2.7	+1.048	+2.661
4,-1	+0.028	+0.16	+0.2	+0.056	+0.168
-2,-2	-0.002	-0.07		-0.004	-0.064
-1,-2	-0.095	-2.37	-3.6	-0.161	-2.426
0,-2	+94.393	-11.34	-64.5	+189.757	+81.904
1,-2	+331.991	-3808.45	-5839.4	+666.908	-3498.150
2,-2	-929.347	-3937.58	-5413.9	-1867.366	-4878.180
3,-2	-33.665	-172.53	-241.8	-67.909	-207.895
4,-2	-1.376	-8.31	-11.7	-2.786	-9.813
5,-2	-0.061	-0.43	-0.7	-0.122	-0.501
6,-2	-0.003			-0.006	-0.006
-1,-3	-0.007	-0.17	-0.3	-0.014	-0.156
0,-3	+3.108	-2.17	-5.4	+6.256	+0.946
1,-3	+20.856	-156.69	-244.5	+41.899	-137.053
2,-3	-60.168	-272.21	-375.8	-120.912	-333.456
3,-3	-2.395	-12.48	-16.9	-4.845	-14.820
4,-3	-0.105	-0.65	-0.9	-0.211	-0.754
5,-3	-0.005			-0.010	-0.010
0,-4	+0.091	-0.16	-0.3	+0.182	-0.064
1,-4	+0.914	-5.12	-8.1	+1.836	-4.265
2,-4	-2.666	-13.03	-18.1	-5.358	-15.764
3,-4	-0.114	-0.61	-0.8	-0.230	-0.713
4,-4	-0.005			-0.010	-0.009
1,-5	+0.037	-0.15	-0.3	+0.074	-0.121
2,-5	-0.098	-0.53	-0.7	-0.196	-0.629
3,-5	-0.005			-0.010	-0.010
11.					
2,-2					+0.015
3,-2	+0.003			+0.006	+0.004
1,-3	+0.004	-0.04		+0.008	-0.023
2,-3	-0.015	+0.14		-0.027	+0.158
3,-3	+0.152	+0.37		+0.328	+0.403
4,-3	-0.003	-0.06		-0.051	-0.255
5,-3	+0.001	+0.02		-0.002	-0.015
0,-4	+0.021	+0.06		+0.063	+0.069
1,-4	+0.231	-0.46		+0.613	-1.113
2,-4	+0.469	-15.64	-7.2	+0.786	-19.194
3,-4	-9.038	-22.80	-6.9	-19.672	-26.513
4,-4	+0.039	+1.77	+11.9	+2.112	+10.804
5,-4	-0.039	-0.18	+0.6	+0.070	+0.490
6,-4	-0.006	-0.03		-0.018	-0.013
1,-5	+0.016	-0.04		+0.046	-0.071
2,-5	+0.060	-1.45	-0.8	+0.112	-4.813
3,-5	-1.035	-2.77	-1.0	-2.270	-3.320
4,-5	-0.003	+0.34	+1.6	+0.257	+1.434
5,-5	-0.006	-0.03	-0.2	+0.008	+0.069
6,-5	-0.002			-0.004	+0.007

<u>11.</u>					
2,-6	+0.006	-0.09		+0.013	-0.106
3,-6	-0.071	-0.20		-0.156	-0.243
4,-6	0.000			+0.021	+0.117
5,-6	-0.004			-0.002	+0.003
3,-7				-0.004	-0.007
4,-7				-0.002	+0.003
<u>15.</u>					
3,-6		-0.09		-0.004	-0.118
4,-6	-0.08	-0.15		-0.178	-0.140
5,-6	-0.02			+0.030	+0.144
<u>3.</u>					
2,1	-0.13	-0.29			
0,0	-2.53	-0.42			
1,0	+3.24	+87.34			
2,0	-3.03	-8.83			
3,0	-0.10	-0.35			
2,-1	-0.05	-0.26			
<u>4.</u>					
0,3	+0.09	+0.81			
-2,2		+0.22			
-1,2	-0.03	+8.71			
0,2	+1.28	+13.00			
1,2	+0.38	+5.58			
-1,1		-0.18			
0,1		-0.17			
<u>12.</u>					
2,-2	+1.73	+2.13			
3,-2	+1.48	+1.48			
4,-2	+0.08				
2,-3	+0.09				
3,-3	+0.10				
<u>13.</u>					
1,-4	-0.10	-0.48			
2,-4	-0.19	-0.79			
<u>6.</u>					
0,0	+0.53	-0.05	-0.34		
1,0		-17.30	-25.65		
2,0		-0.48	-0.72		
-1,-1		-0.70			
0,-1	-3.27	-2.82	-3.72		
1,-1	-2.66	+109.22	+162.82		
2,-1	+0.06	+3.14	+4.56		
1,-2	+0.06	+0.68			
2,-2	+0.03	+0.11			
<u>7.</u>					
2,-2	+0.01	-0.14			
3,-2	+0.03	+0.01			

7.					
1,-3	-0,18	+0,90			
2,-3	+0.80	+3.48			
3,-3	-1.68	-3.92			
4,-3	-0.11	-0.24			
2,-4	+0.07	+0.34			
3,-4	-0.17	-0.37			
8.					
1,1		-0.82	-1,23		

In den vorhergehenden Functionen und Producten sind stets mehr Glieder angesetzt, wie unumgänglich nöthig. Die Angabe der kleineren Glieder dient um zu erkennen zu geben, dass sie in der That auf die Producte nur unmerklichen Einfluss äussern.

70.

Im Vorhergehenden sind alle Hilfsfunctionen enthalten, die für die Störungen, deren Berechnung in dieser Abhandlung dargelegt werden soll, erforderlich sind, und wir können nun an die Berechnung der für diese erforderlichen Producte gehen. Zuerst werde ich die Berechnung von  $\bar{T}$  nach dem Ausdruck (20) vornehmen, und davon den Anfang mit den von  $\delta P$  und  $\delta Q$  abhängigen Gliedern machen. Aus den oben gegebenen numerischen Werthen der Coefficienten der betreffenden Factoren fand sich:

Für  $T^*$ )

$\gamma, g, g'$	$S$ sin	$S_1$ sin	$L$ sin	$V$ cos	$V_1$ cos	$M$ cos
1.						
-1,1,0	-3503"	+7"	-3496"			
0,1,0	+289	+123	+412			
-1,2,0	-96	-64	-157			
1,0,0	-289	-62	-354			
0,2,0	+8	+14	+22			
	-4	-8	-12			
	0	-4	-4			
0,-1,-1	-7	-3	-12			
	+7	+3	+10			
	+2	+3	+5			

\*) Um Raum zu gewinnen ist hier

$$S_1 = \left(\frac{dS}{dg}\right) n dx, \quad V_1 = \left(\frac{dV}{dg}\right) n dx$$

gesetzt worden.

<u>1.</u>						
0,0,-1	0" -88 +88	-1" -6 -6	-1" -94 +82			
0,1,-1	+7 -2 -7	+7 -3 -3	+14 -5 -10			
<u>2.</u>						
0,2,-1	+44 -45 -45	+20 -40 -10	+64 -25 -55			
0,0,-2	0 +15 +5	+3 0 -2	+3 +15 +3			
0,1,-2	+437 -290 -486	+2 -38 -39	+439 -328 -525			
0,2,-2	-5270 +1744 +5296	+5 -24 -19	-5265 +1720 +5277	+42" -14 -43	+2" -1 -1	+44" -15 -44
0,3,-2	-434 +192 +194	+2 -1 0	-432 +191 +194			
0,4,-2	-32 +17 +9		-32 +17 +9			
0,1,-3	+26 -17 -29	-2 -1 -1	+24 -18 -30			
0,2,-3	-340 +102 +344	-18 +8 +8	-328 +110 +349			
0,3,-3	-26 +11 +11	-5 +2 +2	-31 +13 +13			
<u>11.</u>						
0,3,-4		-112 +54 +57	-112 +54 +57			
0,4,-4		-69 +35 +34	-69 +35 +34			
<u>3.</u>						
0,2,1	-134 +44 +134	+17 -8 -8	-114 +36 +123	+134 -44 -134	-17 +8 +8	+114 -36 -123
0,4,0	+434 -286 -480	0 -19 -19	+434 -305 -499	-430 +286 +479	0 +19 +19	-430 +305 +498

BERECHNUNG DER IN DEN MONDTAFELN ANGEWANDTEN STÖRUNGEN. 237

<u>3.</u>						
0,2,0	-5202"	+4"	-5198"	+5194"	-2"	+5189"
	+1718	-11	+1707	-1715	+10	-1705
	+5229	-10	+5219	-5218	+9	-5209
0,3,0	-429		-429	+428		+428
	+190		+190	-189		-189
	+194		+194	-194		-194
0,4,0	-31		-31	+31		+31
	+16		+16	-16		-16
	+9		+9	-9		-9
0,2,-1	-134	-17	-148	+134	+17	+148
	+44	+8	+52	-44	-8	-52
	+134	+8	+139	-134	-8	-139
<u>4.</u>						
0,0,3	0	+4	+4	0	-4	-4
	-104	-2	-106	+103	+2	+105
	+104	-2	+102	-103	+2	-101
0,-1,2	-146	+2	-144	+145	-2	+143
	+146	-1	+145	-145	+1	-144
	+49	-1	+48	-48	+1	-47
0,0,2	0	+49	+49	0	-49	-49
	-1774	-21	-1792	+1754	+21	+1775
	+1774	-27	+1744	-1754	+27	-1727
0,1,2	+146	+120	+266	-145	-120	-265
	-49	-60	-109	+48	+60	+108
	-146	-58	-204	+145	+58	+203
<u>12.</u>						
0,3,-2		-110	-110		+112	+112
		+52	+52		-53	-53
		+55	+55		-56	-56
0,4,-2		-68	-68		+68	+68
		+35	+35		-35	-35
		+34	+34		-34	-34

Für  $T^*$ )

$\gamma, g, g'$	$Z$ sin	$Z_1$ sin	$O$ sin
<u>1.</u>			
-1,1,0	-3475"	+6"	-3469"
0,1,0	+286	+122	+408
-1,2,0	-95	-60	-155
1,0,0	-286	-64	-347

\*) Hier ist wieder

$$Z_1 = \left( \frac{dZ}{dg} \right) n \delta z$$

<u>1.</u>			
0,2,0	+8" -4 0	+14" -8 -4	+22" -12 -4
0,-1,-1	-7 +7 +2	-5 +2 +2	-12 +9 +4
0,0,-1	0 -88 +88	-4 -6 -6	-4 -94 +82
0,1,-1	+7 -2 -7	+7 -3 -3	+14 -5 -10
<u>2.</u>			
0,2,-1	+44 -15 -45	+17 -8 -8	+64 -23 -53
0,0,-2	0 +15 +5	+3 0 -2	+3 +15 +3
0,1,-2	+434 -287 -480	+2 -38 -39	+433 -325 -519
0,2,-2	-2508 +1720 +5234	+5 -21 -19	-5203 +1699 +5215
0,3,-2	-429 +190 +194	+2 -1 0	-427 +189 +194
0,4,-2	-34 +16 +9		-34 +16 +9
0,1,-3	+25 -17 -28	-2 -1 -1	+23 -18 -29
0,2,-3	-306 +104 +308	-17 +7 +7	-323 +108 +315
0,3,-3	-25 +44 +44	-5 +2 +2	-30 +13 +13
<u>11.</u>			
0,3,-4		-144 +53 +56	-144 +53 +56
0,4,-4		-68 +35 +34	-68 +35 +34

3.			
0,2,1	+134"	-17"	+114"
	-44	+8	-36
	-134	+8	-123
0,1,0	-429	0	-429
	+285	+19	+304
	+478	+19	+497
0,2,0	+5184	0	+5184
	-1711	+9	-1702
	-5208	+8	-5200
0,3,0	+427		+427
	-189		-189
	-190		-190
0,4,0	+31		+31
	-16		-16
	-9		-9
0,2,-1	+134	+17	+148
	-44	-8	-52
	-134	-8	-139
4.			
0,0,3	0	-4	-4
	+102	+2	+104
	-102	+2	-100
0,-1,2	+143	-2	+141
	-143	+1	-142
	-48	+1	-47
0,0,2	0	-49	-49
	+1736	+21	+1757
	-1736	+27	-1709
0,1,2	-143	-119	-262
	+48	+60	+108
	+143	+58	+201
12.			
0,3,-2		+112	+112
		-54	-54
		-57	-57
0,4,-2		+69	+69
		-35	-35
		-31	-31

Hier habe ich, mit Ausnahme der beiden ersten Abtheilungen, in jeder derselben nur das erste Argument angesetzt, da die beiden anderen Argumente daraus nach der unveränderlichen Regel folgen, dass zu

$$ig - i'g' + \dots$$

immer die beiden folgenden

$$- \gamma + (i+1)g - i'g' + \dots$$

$$+ \gamma + (i-1)g - i'g' + \dots$$

gehören. Ich werde fortfahren, diese beiden wegzulassen.

71.

Wir erhalten nun weiter

für  $T^*$ )

$\gamma, g, g'$	$R$ COS	$R_1$ COS	$R_2$ COS	$\frac{1}{2}L\delta P$ COS	$M\delta Q$ COS	$H$ COS
<b>1.</b>						
0,0,0		+4,50		-0,05	+0,44	+4,86
-1,1,0		-4,28		+0,07	-0,56	-4,77
0,1,0		+10,93		-0,07	-0,34	+10,55
-1,2,0		-5,58		+0,08	+0,18	-5,32
1,0,0		-5,20		+0,06	+0,22	-4,92
0,2,0		+1,25		+0,24	+0,32	+1,78
		-0,74		-0,07	-0,11	-0,92
		-0,35		-0,20	-0,32	-0,87
0,3,0		+0,12		+0,02	+0,03	+0,17
		-0,08		-0,04	-0,04	-0,10
		-0,03		-0,04	-0,04	-0,05
0,-1,-1		+0,39	-0,03	-0,03		+0,33
		-0,18	+0,04	+0,02		-0,15
		-0,24	+0,03	+0,04		-0,17
0,0,-1		+0,50	0,00	-0,03		+0,47
		-0,24	-0,04	-0,19		-0,44
		-0,26	+0,02	+0,23		-0,04
0,1,-1		+0,57	+0,04	+0,03		+0,62
		-0,29	-0,03	-0,04		-0,33
		-0,26	-0,04	-0,02		-0,29
0,2,-1		+0,07				+0,07
		-0,04				-0,04
		-0,02				-0,02
0,0,-2		+0,02				+0,02
		-0,04				-0,04
		-0,04				-0,04
<b>2.</b>						
0,1,-1	-0,33	+0,19		-0,03		-0,17
	+0,22	-0,05		+0,02		+0,19
	+0,36	-0,13		+0,03		+0,26
0,2,-1	+3,94	+1,53		+0,32	+0,04	+5,80
	-1,30	-0,76		-0,10	0,00	-2,16
	-3,96	-0,76		-0,32	-0,02	-5,06
0,3,-1	+0,32	+0,35		+0,03		+0,70
	-0,14	-0,19		-0,04		-0,34
	-0,15	-0,14		-0,04		-0,30
0,0,-2	0	+0,07	-0,13	-0,04	0,00	-0,07
	+1,34	-0,03	+0,03	-0,07	-0,14	+1,13
	+0,42	-0,03	+0,10	+0,08	+0,14	+0,68

\*) Hier ist

$$R_1 = \left(\frac{dR}{dg}\right) n\delta z; \quad R_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{d^2R}{dg^2}\right) (n\delta z)^2$$



BERECHNUNG DER IN DEN MONDTAFELN ANGEWANDTEN STÖRUNGEN. 241

2.						
0,4,-2	+38,90 -25.86 -43.28	+0,08 -0.04 -0.04	0,00 -0.05 +0.05	-0,24 +0.13 +0.28	-0,59 +0.45 +0.63	+38,18 -25.34 -42.33
0,2,-2	-469.47 +155.08 +471.85	+0.29 -0.14 -0.14	+0.27 -0.22 -0.05	+3.08 -0.93 -3.17	+6.10 -2.16 -5.96	-459.73 +151.63 +462.53
0,3,-2	-38.67 +17.09 +17.26		+0.16 -0.12 -0.04	+0.20 -0.03 -0.12	+0.36 -0.24 -0.28	-37.73 +16.70 +16.82
0,4,-2	-2.83 +1.47 +0.83		+0.02 -0.02 -0.00	+0.02 -0.01 -0.01	+0.04 -0.02 -0.01	-2.75 +1.42 +0.81
0,4,-3	+2.29 -1.52 -2.54	-0.14 0.00 +0.08		+0.02 -0.02 -0.02	-0.02 +0.04 +0.02	+2.18 -1.53 -2.46
0,2,-3	-27.59 +9.12 +27.72	-1.52 +0.75 +0.76	+0.02 -0.01 0.00	-0.14 +0.04 +0.10	+0.44 -0.14 -0.40	-28.79 +9.76 +28.18
0,3,-3	-2.27 +1.00 +1.01	-0.43 +0.24 +0.19		-0.02 +0.04 +0.01	+0.02 -0.01 -0.01	-2.70 +1.24 +1.20
0,2,-4	-1.13 +0.37 +1.13	-0.11 +0.05 +0.05		-0.02 +0.01 +0.01		-1.26 +0.43 +1.19
44.						
0,3,-3		+0.15 -0.07 -0.07	+0.04 -0.03 -0.01			+0.19 -0.10 -0.08
0,4,-3		+0.09 -0.05 -0.05	+0.02 -0.01 0.00			+0.11 -0.06 -0.05
0,2,-4		+0.51 -0.60 -0.04				+0.51 -0.60 -0.04
0,3,-4		-9.97 +4.77 +5.11		+0.07 -0.03 -0.03	+0.13 -0.06 -0.07	-9.77 +4.68 +5.01
0,4,-4		-6.14 +3.16 +2.83		+0.04 -0.02 -0.02	+0.08 -0.04 -0.04	-6.02 +3.10 +2.77
0,5,-4		-0.86 +0.51 +0.28				-0.86 +0.51 +0.28
0,3,-5		-1.03 +0.48 +0.53	-0.03 +0.03 +0.01			-1.06 +0.51 +0.54
0,4,-5		-0.77 +0.39 +0.36	-0.02 +0.02 0.00			-0.79 +0.41 +0.36

<u>3.</u>						
0,1,1	-0.98 +0.64 +1.09	-0.49 +0.15 +0.23		-0.02 +0.04 +0.02		-1.49 +0.80 +1.34
0,2,1	+11.82 -3.93 -11.85	-1.53 +0.84 +0.84		+0.22 -0.06 -0.24	+0.02 -0.04 -0.02	+10.53 -3.19 -11.27
0,3,1	+0.98 -0.42 -0.45	-0.35 +0.19 +0.44		+0.02 -0.04 -0.04		+0.65 -0.22 -0.32
0,0,0	0 -1.34 -0.42	-0.14 -0.02 +0.07		0.00 -0.12 +0.12	0.00 +0.02 -0.02	-0.14 -1.43 -0.25
0,1,0	-38.85 +25.83 +43.25	-0.09 +1.72 +1.77	-0.44 +0.08 +0.03	+0.28 -0.17 -0.36	-0.05 +0.14 -0.17	-38.82 +27.57 +44.52
0,2,0	+469.04 -154.92 -474.45	+0.05 +0.82 +0.73	-0.30 +0.23 +0.07	-3.08 +0.93 +3.15	+0.99 -0.50 -0.82	+466.70 -153.44 -468.32
0,3,0	+38.65 -17.09 -17.23	-0.05 +0.06 +0.04	-0.16 +0.12 +0.04	-0.28 +0.12 +0.14	+0.14 -0.05 -0.08	+38.30 -16.84 -17.12
0,4,0	+2.82 -1.47 -0.82		-0.02 +0.02 0.00	-0.02 +0.04 +0.04		+2.78 -1.44 -0.81
0,1,-1	-0.98 +0.64 +1.09	+0.14 +0.07 -0.04		+0.04 -0.03 -0.05		-0.83 +0.68 +1.03
0,2,-1	+11.82 -3.93 -11.85	+1.54 -0.68 -0.70		-0.43 +0.15 +0.43	+0.02 -0.04 -0.02	+12.92 -4.47 -12.14
0,3,-1	+0.98 -0.42 -0.45	+0.43 -0.24 -0.19		-0.05 +0.02 +0.02		+1.36 -0.64 -0.62
<u>4.</u>						
0,-1,3	+0.76 -0.76 -0.25	+0.03 -0.06 -0.05				+0.79 -0.82 -0.30
0,0,3	0 +9.27 -9.27	-0.45 -0.03 -0.04	+0.02 -0.02 0.00	0.00 -0.04 +0.04	-0.03 +0.03 +0.04	-0.46 +9.24 -9.23
0,1,3	-0.76 +0.25 +0.76	-0.72 +0.34 +0.33	+0.03 -0.03 -0.04			-1.45 +0.56 +1.08
0,-2,2	+0.36 0.00 -0.18	-0.02 +0.04 +0.04		+0.15 -0.17 -0.05		+0.49 -0.16 -0.22
0,-1,2	+13.04 -13.04 -4.33	-0.43 -0.10 +0.17		-0.32 +0.29 -0.07	+0.04 -0.04 -0.04	+12.60 -12.86 -4.27

<u>4.</u>						
0,0,2	0	-4'48		-0'03	-0'54	-5'05
	+157'76	+1.88		-2.20	+0.50	+157.94
	-157.76	+2.46		+2.23	+0.21	-152.86
0,1,2	-13.01	-10.76		+0.31	+0.09	-23.37
	+4.33	+5.38		-0.09	-0.02	+9.60
	+13.01	+5.29		-0.29	-0.12	+17.89
0,2,2	-0.36	-1.23		+0.06	+0.08	-1.45
	+0.18	+0.73		-0.02	-0.03	+0.86
	0.00	+0.34		-0.04	-0.07	+0.23
0,-1,1	-0.11	-0.02		-0.01		-0.14
	+0.11	+0.03		+0.01		+0.15
	+0.05	+0.04		0.00		+0.09
0,0,1	0	-0.07	-0'02	0.00		-0.09
	-1.33	+0.28	+0.01	-0.12		-1.16
	+1.33	+0.28	0.00	+0.12		+1.73
0,1,1	+0.11	-0.21	-0.04	+0.02		-0.12
	-0.05	+0.15	+0.03	0.00		+0.13
	-0.11	+0.14	+0.04	-0.01		+0.03
<u>5.</u>						
0,0,2				0.00	0.00	0.00
				-0.06	+0.11	+0.05
				+0.06	-0.11	-0.05
0,1,2	-0.09			+0.23	-0.46	-0.32
	+0.05			-0.15	+0.29	+0.19
	+0.09			-0.30	+0.58	+0.37
0,2,2	+0.93			-3.05	+6.10	+3.98
	-0.32			+0.92	-1.85	-1.25
	-0.93			+3.14	-6.27	-4.06
0,3,2	+0.09			-0.21	+0.41	+0.29
	-0.03			+0.10	-0.19	-0.12
	-0.03			+0.07	-0.13	-0.09
<u>12.</u>						
0,3,-1		+0.19	-0.04			+0.15
		-0.10	+0.03			-0.07
		-0.10	+0.01			-0.09
0,4,-1		+0.07	-0.02			+0.05
		-0.03	+0.01			-0.02
		-0.03	0.00			-0.03
0,2,-2		-0.51		-0.19	+0.04	-0.66
		+0.64		+0.06	-0.01	+0.66
		+0.05		+0.19	-0.04	+0.20
0,3,-2		+10.14		-0.10	+0.24	+10.28
		-4.84		+0.05	-0.10	-4.89
		-5.20		+0.06	-0.24	-5.38
0,4,-2		+6.16		-0.04	-0.48	+5.64
		-3.17		+0.03	+0.16	-2.98
		-2.84		+0.01	+0.50	-2.33

<u>12.</u>						
0,5,-2		+0,86 -0.54 -0.28			-0,06 +0.03 +0.04	+0,80 -0.48 -0.24
0,3,-3		+0.69 -0.33 -0.35	+0,03 -0.03 -0.04			+0.72 -0.36 -0.36
0,4,-3		+0.53 -0.27 -0.26	+0.02 -0.02 0.00		-0.03 +0.04 +0.03	+0.52 -0.28 -0.23
<u>13.</u>						
0,0,-4		+0.07 +0.05 -0.04	+0.43 -0.03 -0.10	0,00 -0.04 +0.04	0.00 -0.02 +0.02	+0.20 -0.04 -0.44
0,4,-4		-0.04 -1.67 -1.72	+0.44 -0.03 -0.08	-0.28 +0.16 +0.37	+0.03 -0.07 +0.04	-0.15 -1.64 -1.39
0,2,-4		-0.06 -0.84 -0.72	+0.03 -0.04 -0.02	+3.09 -0.92 -3.18	+0.05 +0.15 -0.22	+3.44 -1.59 -4.14
0,3,-4		+0.07 -0.07 -0.02		+0.28 -0.12 -0.15		+0.35 -0.19 -0.17
0,4,-5		0.00 -0.18 -0.18				0.00 -0.18 -0.18
<u>18.</u>						
0,2,0				-0.17 +0.06 +0.17	+0.33 -0.14 -0.33	+0.16 -0.05 -0.16
0,3,0				+0.02 0.00 -0.07	-0.04 +0.01 +0.12	-0.02 +0.04 +0.05
0,4,0				-0.28 +0.10 +0.26	+0.55 -0.19 -0.54	+0.27 -0.09 -0.25
<u>19.</u>						
0,-1,4				-0.09 +0.08 +0.04	+0.17 -0.15 -0.08	+0.08 -0.07 -0.04
0,0,4				+0.03 -1.05 +1.05	-0.06 +2.09 -2.03	-0.03 +1.04 -0.98
0,4,4				+0.16 -0.06 -0.13	-0.34 +0.14 +0.26	-0.15 +0.05 +0.13

<u>6.</u>						
0,1,-1	-0,14 -0.05 +0.24	-0,25 +0.13 +0.12				-0,39 +0.08 +0.36
<u>7.</u>						
0,2,-3	+0.36 -0.18 -0.38	+0.03 -0.04 -0.04				+0.39 -0.49 -0.39
0,3,-3	-2.14 +0.70 +2.16	+0.28 -0.14 -0.14				-1.86 +0.56 +2.02
<u>8.</u>						
0,1,1	+0.87 +0.34 -1.47	-0.34 +0.10 +0.11				+0.56 +0.41 -1.36
<u>9.</u>						
0,3,-1	+2.13 -0.74 -2.13	+0.28 -0.14 -0.14				+2.41 -0.85 -2.27
<u>10.</u>						
0,1,-3	-0.74 -0.25 +1.23	0.00 +0.05 +0.05				-0.74 -0.20 +1.28

Ferner

für  $T^*$ )

$\gamma, g, g'$	$Y$ sin	$Y_1$ sin	$Y_2$ sin	$\frac{1}{2} \delta \delta Q$ sin	$N$ sin
<u>1.</u>					
-1,1,0	-314,60	+0,58		+2,08	-311,94
0,1,0	+25.94	+11.05		-0.32	+36.67
-1,2,0	-8.63	-5.43		+0.10	-13.96
1,0,0	-25.94	-5.60		+0.32	-31.22
0,2,0	+0.71 -0.36 0.00	+1.25 -0.74 -0.35		+0.12 -0.04 -0.13	+2.08 -1.14 -0.48
0,3,0	+0.03 -0.02 0.00	+0.12 -0.08 -0.03		+0.02 -0.01 -0.01	+0.17 -0.11 -0.04
0,-1,-1	-0.65 +0.65 +0.22	-0.37 +0.15 +0.12	+0,03 -0.04 -0.03		-0.99 +0.79 +0.31

\*) S. die obigen Anmerkungen.

<u>1.</u>					
0,0,-1	0	-0.07	+0.04	0.00	-0.03
	-7.92	-0.42	-0.04	+0.09	-8.26
	+7.92	-0.47	-0.02	-0.09	+7.34
0,1,-1	+0.65	+0.63	+0.04		+1.32
	-0.22	-0.44	-0.03		-0.66
	-0.65	-0.39	-0.04		-1.05
0,2,-1	+0.02	+0.07			+0.09
	-0.04	-0.04			-0.05
	0.00	-0.02			-0.02
0,0,-2	0	-0.02			-0.02
	-0.20	0.00			-0.20
	+0.20	0.00			+0.20
<u>2.</u>					
0,1,-1	-0.33	+0.19			-0.14
	+0.22	-0.12			+0.10
	+0.36	-0.20			+0.16
0,2,-1	+3.94	+1.53			+5.47
	-1.30	-0.78			-2.08
	-3.96	-0.78			-4.74
0,3,-1	+0.32	+0.35			+0.67
	-0.14	-0.19			-0.33
	-0.15	-0.14			-0.29
0,0,-2	0	+0.24	+0.13	-0.04	+0.33
	+1.34	+0.06	-0.03	+0.04	+1.38
	+0.42	-0.13	-0.10	-0.03	+0.16
0,1,-2	+38.90	+0.05	+0.22	-0.23	+38.94
	-25.86	-3.40	-0.14	+0.06	-29.34
	-43.28	-3.49	-0.14	+0.37	-46.51
0,2,-2	-469.47	+0.53	+0.33	+2.58	-466.03
	+155.08	-1.95	-0.24	-0.64	+152.28
	+471.85	-1.76	-0.09	-2.84	+467.16
0,3,-2	-38.67	+0.15	+0.16	+0.24	-38.15
	+17.09	-0.15	-0.12	-0.09	+16.73
	+17.26	-0.05	-0.04	-0.09	+17.08
0,4,-2	-2.83		+0.02	+0.02	-2.79
	+1.47		-0.02	-0.04	+1.44
	+0.83		0.00	-0.04	+0.82
0,1,-3	+2.29	-0.14		-0.04	+2.17
	-1.52	-0.24		0.00	-1.76
	-2.54	-0.16		+0.04	-2.69
0,2,-3	-27.59	-1.52	+0.02	+0.18	-28.94
	+9.12	+0.59	-0.04	-0.05	+9.65
	+27.72	+0.60	0.00	-0.18	+28.14
0,3,-3	-2.27	-0.43		+0.04	-2.69
	+1.00	+0.24		0.00	+1.24
	+1.04	+0.19		0.00	+1.20
0,2,-4	-1.13	-0.14			-1.24
	+0.37	+0.05			+0.42
	+1.13	+0.05			+1.18

<u>11.</u>					
0,3,-3		+0,15 -0.07 -0.07	+0,04 -0.03 -0.04		+0,19 -0.10 -0.08
0,4,-3		+0.09 -0.05 -0.05	+0.02 -0.04 0.00		+0.11 -0.06 -0.05
0,2,-4		+0.51 -0.62 -0.06			+0.51 -0.62 -0.06
0,3,-4		-9.97 +4.73 +5.08		+0,07 -0.03 -0.03	-9.90 +4.70 +5.05
0,4,-4		-6.14 +3.16 +2.83		+0.04 -0.02 -0.02	-6.10 +3.14 +2.81
0,5,-4		-0.86 +0.51 +0.28			-0.86 +0.51 +0.28
0,3,-5		-1.03 +0.48 +0.52	-0.03 +0.03 +0.01		-1.06 +0.51 +0.53
0,4,-5		-0.77 +0.39 +0.36	-0.02 +0.02 0.00		-0.79 +0.41 +0.36
<u>3.</u>					
0,1,1	-0,98 +0.64 +1.09	-0.19 +0.15 +0.23		+0.01 -0.01 -0.01	-1.16 +0.78 +1.31
0,2,1	+11.82 -3.93 -11.85	-1.52 +0.81 +0.81		-0.08 +0.03 +0.08	+10.22 -3.09 -10.96
0,3,1	+0.98 -0.42 -0.45	-0.35 +0.19 +0.14		-0.01 0.00 0.00	+0.62 -0.23 -0.34
0,0,0	0 -1.31 -0.42	-0.14 -0.02 +0.07		0.00 -0.10 +0.10	-0.14 -1.43 -0.25
0,1,0	-38.85 +25.83 +43.25	-0.09 +1.77 +1.81	-0.11 +0.08 +0.03	+0.20 -0.06 -0.33	-38.85 +27.62 +44.76
0,2,0	+469.04 -154.92 -474.45	+0.05 +0.82 +0.73	-0.30 +0.23 +0.07	-2.60 +0.62 +2.83	+466.19 -153.25 -467.82
0,3,0	+38.65 -17.09 -17.23	-0.05 +0.05 +0.01	-0.16 +0.12 +0.04	-0.14 +0.07 +0.03	+38.30 -16.85 -17.15
0,4,0	+2.82 -1.47 -0.82		-0.02 +0.02 0.00	-0.02 +0.01 +0.01	+2.78 -1.44 -0.81

<u>3.</u>					
0,1,-1	-0.98	+0.44		+0.02	-0.85
	+0.64	+0.07		-0.04	+0.70
	+1.09	-0.04		-0.02	+1.06
0,2,-1	+11.82	+1.51		-0.12	+13.21
	-3.93	-0.69		+0.05	-4.57
	-11.85	-0.70		+0.12	-12.43
0,3,-1	+0.98	+0.43		-0.02	+1.39
	-0.42	-0.24		+0.04	-0.65
	-0.45	-0.19		+0.04	-0.63
<u>4.</u>					
0,-1,3	+0.76	+0.03		-0.04	+0.78
	-0.76	-0.06		+0.04	-0.84
	-0.24	-0.05		0.00	-0.29
0,0,3	0	-0.45	+0.02	0.00	-0.43
	+9.23	-0.04	-0.02	-0.14	+9.03
	-9.23	-0.04	0.00	+0.14	-9.10
0,1,3	-0.76	-0.72	+0.03	+0.04	-1.44
	+0.24	+0.34	-0.03	0.00	+0.55
	+0.76	+0.34	-0.04	-0.04	+1.08
0,-2,2	+0.36	+0.02		+0.15	+0.53
	0.00	-0.04		-0.17	-0.48
	-0.48	-0.04		-0.05	-0.24
0,-1,2	+12.96	+0.25		-0.30	+12.91
	-12.96	-0.29		+0.25	-13.00
	-4.31	-0.02		+0.12	-4.24
0,0,2	0	-4.48		-0.03	-4.51
	+157.12	+1.94		-2.03	+157.03
	-157.12	+2.52		+2.08	-152.52
0,1,2	-12.96	-10.76		+0.28	-23.44
	+4.31	+5.39		-0.06	+9.64
	+12.96	+5.29		-0.28	+17.97
0,2,2	-0.36	-1.23		+0.05	-1.54
	+0.48	+0.73		-0.02	+0.89
	0.00	+0.34		-0.04	+0.30
0,-1,1	-0.44	-0.02			-0.43
	+0.44	+0.03			+0.44
	+0.05	+0.04			+0.09
0,0,1	0	-0.07	-0.02	0.00	-0.09
	-1.32	+0.28	+0.04	-0.02	-1.05
	+1.32	+0.28	0.00	+0.02	+1.62
0,1,1	+0.44	-0.22	-0.04		-0.15
	-0.05	+0.15	+0.03		+0.43
	-0.44	+0.44	+0.04		+0.04
<u>5.</u>					
0,0,2				0.00	0.00
				+0.06	+0.06
				-0.06	-0.06



BERECHNUNG DER IN DEN MONDTAFELN ANGEWANDTEN STÖRUNGEN. 249

<u>5.</u>					
0,1,2	-0,09 +0.05 +0.09			-0,23 +0.15 +0.29	-0,32 +0.20 +0.38
0,2,2	+0.93 -0.32 -0.93			+3.05 -0.92 -3.44	+3.98 -1.24 -4.07
0,3,2	+0.09 -0.03 -0.03			+0.24 -0.10 -0.07	+0.30 -0.13 -0.10
<u>12.</u>					
0,3,-1		+0,19 -0.10 -0.10	-0,04 +0.03 +0.04		+0.15 -0.07 -0.09
0,2,-2		-0.54 +0.64 +0.05	-0.02 +0.04 0.00	-0.15 +0.05 +0.15	-0.68 +0.67 +0.20
0,3,-2		+10.14 -4.84 -5.20		+0.13 -0.05 -0.18	+10.27 -4.89 -5.38
0,4,-2		+6.16 -3.17 -2.84		-0.53 +0.18 +0.51	+5.63 -2.99 -2.33
0,5,-2		+0.86 -0.54 -0.28		-0.06 +0.03 +0.04	+0.80 -0.48 -0.24
0,3,-3		+0.70 -0.33 -0.36	+0.03 -0.03 -0.04		+0.73 -0.36 -0.37
0,4,-3		+0.53 -0.26 -0.26	+0.02 -0.02 0.00	-0.03 +0.04 +0.03	+0.52 -0.27 -0.23
<u>13.</u>					
0,0,-4		-0.07 -0.05 +0.04	-0.43 +0.03 +0.10	0.00 +0.04 -0.04	-0.20 -0.04 +0.13
0,1,-4		+0.04 +1.66 +1.70	-0.44 +0.03 +0.08	+0.28 -0.16 -0.37	+0.18 +1.53 +1.44
0,2,-4		-0.34 +0.99 +0.90	-0.03 +0.04 +0.02	-3.06 +0.94 +3.16	-3.40 +1.94 +4.08
0,1,-5		0.00 +0.18 +0.18			0.00 +0.18 +0.18
<u>18.</u>					
0,2,0				+0.17 -0.06 -0.17	+0.17 -0.06 -0.17

<u>18.</u>					
0,3,0				-0.02	-0.02
				0.00	0.00
				+0.07	+0.07
0,4,0				+0.27	+0.27
				-0.10	-0.10
				-0.25	-0.25
<u>19.</u>					
0,-1,4				+0.09	+0.09
				-0.07	-0.07
				-0.04	-0.04
0,0,4				-0.03	-0.03
				+1.04	+1.04
				+1.04	+1.04
0,1,4				-0.16	-0.16
				+0.06	+0.06
				+0.13	+0.13
<u>6.</u>					
0,0,-1	0	-0.02			-0.02
	+0.10	0.00			+0.10
	-0.16	-0.04			-0.17
0,1,-1	-1.64	-0.25			-1.86
	-0.53	+0.22			-0.31
	+2.67	+0.21			+2.88
0,2,-1	+0.09	+0.01			+0.10
	-0.04	0.00			-0.04
	-0.13	-0.03			-0.16
<u>7.</u>					
0,2,-3	+0.36	+0.01			+0.37
	-0.18	-0.02			-0.20
	-0.38	-0.01			-0.39
0,3,-3	-2.14	+0.28			-1.86
	+0.70	-0.14			+0.56
	+2.16	-0.14			+2.02
<u>8.</u>					
0,1,1	+0.86	+0.25			+1.11
	+0.31	-0.18			+0.13
	-1.46	-0.17			-1.63
<u>9.</u>					
0,3,-1	+2.13	-0.28			+1.85
	-0.71	+0.14			-0.57
	-2.13	+0.14			-1.99
<u>10.</u>					
0,1,-3	+0.73	0.00			+0.73
	+0.24	-0.05			+0.19
	-1.22	-0.05			-1.27

## 72.

Mit Zuziehung der vorhergehenden Factoren lassen sich nun alle Producte berechnen, die der Ausdruck (20) zur Erlangung von  $\bar{T}$  verlangt. Hiebei werde ich jedoch eine Abkürzung eintreten lassen, die durch diese Abhandlung ganz durchgehen, und ihre Ergänzung erst in einer zweiten Abhandlung erhalten wird. Im Vorhergehenden, so weit es sich um die Ermittlung der Störungen von  $P$  und  $Q$ , und ihres Einflusses auf die Längenstörungen handelte, wurden alle Abtheilungen berücksichtigt, und dies war namentlich in Bezug auf die Abtheilungen 3 und 4 und die davon zunächst abhängenden nothwendig, weil sie Coefficienten derselben Ordnung wie die Abtheilungen 1 und 2 hervorbringen. In den Längenstörungen und denen des Radius Vectors ist dieses anders. Die Abtheilungen 3, 4, u. s. w. geben nur Glieder die zwei oder mehr Ordnungen höher sind wie die, welche die Abtheilungen 1 und 2 geben. Die Einwirkung der Abtheilungen 3, 4 und aller folgenden überhaupt auf die Abtheilungen 1, 2, 11, 15 der Längenstörungen ist daher wenigstens von der vierten Ordnung und so klein, dass man sie fast allenthalben übergehen kann. Die einzige Ausnahme hievon bildet das Argument 1,0,0 in der Abtheilung 1, von dessen Coefficienten die Bewegung des Perigäums des Mondes abhängt. Man kann daher in den noch zur Erlangung der Störungen der Länge und des Radius Vectors des Mondes nöthigen Rechnungen, die Störungen in verschiedene Classen theilen, die sich abgesondert von einander berechnen lassen, wodurch die ganze Arbeit bedeutend verkürzt wird.

Es werden von den Störungen der Länge und des Radius Vectors in dieser Abhandlung nur diejenigen berechnet werden, die den Abtheilungen 1, 2, 11, 15 angehören, denn um die Publication nicht zu sehr zu verzögern, soll den übrigen Abtheilungen eine zweite Abhandlung gewidmet werden. Die Berechnung dieser habe ich übrigens durch Anwendung eines besonderen Prinzips vereinfacht, welches zu seiner Zeit erklärt werden wird. Wir bekommen nach diesen Erklärungen hier:\*)

\*) Es ist in der folgenden Tafel

$$T_1 = \left(\frac{dT_0}{dg}\right) n\delta x; \quad T_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{d^2T_0}{dg^2}\right) (n\delta x)^2; \quad T_3 = \frac{1}{6} \left(\frac{d^3T_0}{dg^3}\right) (n\delta x)^3$$

$\gamma, g, g'$	$T_0$ sin	$T_1$ sin	$T_2$ sin	$T_3$ sin	$H\delta P$ sin	$N\delta Q$ sin
<u>1.</u>						
-1,1,0	+1158,410	-6,570	-0,170	-0,029	+0,432	+0,369
0,1,0	-95.504	-120.819	-0.004	+0.041	-0.066	-0.060
-1,2,0	+31.775	+59.458	-0.067	-0.053	+0.020	+0.015
1,0,0	+95.50433	+61.02935	+0.06716	+0.00012	+0.06435	+0.05947
0,2,0	-2.620 +1.308 0	-13.616 +8.142 +3.749	-0.004 -0.001 +0.001	+0.025 -0.027 -0.003	+0.028 -0.010 -0.026	+0.023 -0.008 -0.023
0,3,0	-0.108 +0.064 +0.004	-1.248 +0.824 +0.248	0.000 -0.001 -0.001	+0.006 -0.006 0.000	+0.002 -0.001 -0.001	+0.002 -0.001 -0.001
0,4,0	-0.005 +0.003 0.000	-0.103 +0.073 +0.017				
0,-3,-1	+0.003 0.000 -0.002	+0.057 -0.012 -0.038	-0.016 +0.002 +0.012			
0,-2,-1	+0.066 0 -0.033	+0.475 -0.128 -0.282	-0.112 +0.024 +0.087			
0,-1,-1	+2.406 -2.40435 -0.800	+4.406 -2.07739 -1.942	-0.440 +0.10745 +0.322	-0.004 -0.00008 +0.004	-0.00205	-0.00254
0,0,-1	0 +29.17538 -29.17538	+0.90412 +1.07714 +1.67212	-0.44447 +0.19091 +0.22460	-0.00059 -0.00268 +0.00280	-0.00426 +0.01694 -0.01436	-0.00015 +0.01464 -0.01330
0,1,-1	-2.406 +0.800 +2.40535	-6.453 +3.495 +3.52969	-0.464 +0.322 +0.12587	+0.002 -0.005 +0.00005	+0.00357	+0.00281
0,2,-1	-0.066 +0.033 0	-0.832 +0.492 +0.242	-0.136 +0.105 +0.029			
0,3,-1	-0.003 +0.002 0.000	-0.074 +0.049 +0.016	-0.019 +0.017 +0.003			
0,-2,-2	+0.002 0 -0.001	+0.013 -0.002 -0.009	-0.006 +0.004 +0.004			
0,-1,-2	+0.064 -0.0606 -0.020	+0.151 -0.0732 -0.066	-0.023 +0.0060 +0.017			
0,0,-2	0 +0.7348 -0.7348	+0.0683 +0.0235 +0.0419	-0.0293 +0.0437 +0.0439	-0.0004 +0.0004 -0.0003	-0.0004 -0.0004 +0.0002	-0.0004 -0.0004 +0.0002
0,1,-2	-0.064 +0.020 +0.0606	-0.187 +0.106 +0.1072	-0.030 +0.020 +0.0077			

<u>1.</u>						
0,2,-2	-0,002 +0.004 0	-0,023 +0.014 +0.008	-0,007 +0.006 +0.002			
0,-1,-3	+0.002 -0.002 0.000	+0.005 -0.002 -0.002				
0,0,-3	0 +0.048 -0.048	+0.003 -0.004 -0.004				
0,1,-3	-0.002 0.000 +0.002	-0.004 +0.002 +0.002				
<u>2.</u>						
0,-1,0		0.000 -0.00007 0.000	0.000 +0.00045 0.000	0,000 +0.00004 0.000		
0,0,0		+0.004274 -0.00476 -0.00024	-0.000330 -0.00042 +0.00062	-0.000307 0.00000 +0.00036		
0,1,0		-0.026 +0.0112 +0.01404	+0.002 -0.0039 -0.00023	+0.00026	-0,00005	-0,00003
0,2,0		-0.049 +0.027 +0.026	+0,025 -0.049 -0.006			
0,3,0		-0.010 +0.005 +0.004	+0.010 -0.008 -0.002			
0,-1,-1	-0.004 -0.00453 +0.004	+0.006 -0.0016 -0.003	-0.013 +0.00224 +0.009	+0.00033	-0.00004	+0.00004
0,0,-1	0 +0.12204 +0.03889	+0.10584 -0.12882 +0.00893	-0.06656 +0.01050 +0.05387	-0.00526 +0.00026 +0.00632	+0.00002 +0.00042 +0.00003	-0.00003 -0.00002 +0.00006
0,1,-1	+3.632 -2.414 -4.04465	-2.144 +0.709 +1.64745	-0.145 +0.036 +0.07354	+0.004 -0.005 +0.00436	+0.004 -0.002 -0.00392	+0.00104
0,2,-1	-43.838 +14.480 +44.060	-16.928 +8.446 +8.550	-0.122 +0.075 +0.045	+0.011 -0.014 +0.001	-0.053 +0.018 +0.052	+0.001 -0.005 +0.003
0,3,-1	-3.642 +1.596 +1.644	-3.950 +2.154 +1.549	-0.050 +0.037 +0.044	+0.008 -0.008 -0.001	-0.004 +0.002 +0.002	
0,4,-1	-0.264 +0.437 +0.077	-0.456 +0.279 +0.126	-0.008 +0.008 +0.002			
0,5,-1	-0.049 +0.044 +0.004	-0.043 +0.029 +0.009				

<u>2.</u>						
0, -2, -2	+0.003 +0.004 -0.004	+0.012 -0.003 -0.008	-0.028 +0.004 +0.024			
0, -1, -2	+0.127 +0.1847 -0.073	+0.079 -0.0426 -0.044	-0.234 +0.0435 +0.183		-0.0044	-0.0007
0, 0, -2	0 -44.5228 -4.6284	-0.0602 -0.6007 +0.0884	-1.4436 +0.3034 +1.0924	-0.0010 -0.0003 +0.0007	+0.0002 +0.0079 -0.0113	-0.0013 +0.0057 -0.0064
0, 1, -2	-432.236 +287.397 +484.0483	+0.300 +12.102 +12.5456	-2.347 +1.025 +1.1606	-0.004 -0.004 0.0000	-0.064 +0.035 +0.0755	-0.048 +0.013 +0.0694
0, 2, -2	+5217.734 -1723.485 -5244.077	-1.945 +7.442 +6.520	-3.574 +2.478 +0.993	+0.002 -0.004 -0.004	+0.538 -0.162 -0.552	+0.468 -0.140 -0.513
0, 3, -2	+429.854 -189.964 -194.803	-0.813 +0.673 +0.284	-1.799 +1.360 +0.443		+0.062 -0.028 -0.037	+0.037 -0.017 -0.016
0, 4, -2	+31.454 -16.308 -9.207	-0.188 +0.112 +0.074	-0.320 +0.253 +0.062		+0.003 -0.002 -0.004	
0, 5, -2	+2.247 -1.289 -0.503	-0.019 +0.012 +0.006	-0.044 +0.033 +0.007			
0, 6, -2	+0.160 -0.100 -0.030	-0.004 +0.004 0.000	-0.003 +0.003 0.000			
0, -1, -3	+0.007 +0.014 -0.004	+0.005 -0.003 -0.003	-0.019 +0.004 +0.016			
0, 0, -3	0 -0.854 -0.272	-0.043 +0.018 -0.014	-0.120 +0.027 +0.094	+0.005 -0.004 -0.006		
0, 1, -3	-25.406 +16.892 +28.275	+1.212 +0.816 -0.072	-0.238 +0.120 +0.104	-0.004 +0.004 -0.004	-0.007 +0.004 +0.007	-0.002 +0.001 +0.002
0, 2, -3	+306.687 -104.303 -308.236	+16.662 -7.584 -7.827	-0.370 +0.264 +0.092	-0.010 +0.013 -0.004	+0.094 -0.030 -0.090	+0.033 -0.008 -0.034
0, 3, -3	+25.266 -11.166 -11.274	+4.850 -2.565 -2.014	-0.213 +0.162 +0.050	-0.008 +0.009 +0.004	+0.008 -0.004 -0.004	
0, 4, -3	+1.847 -0.959 -0.544	+0.571 -0.346 -0.160	-0.039 +0.032 +0.009			
0, 5, -3	+0.132 -0.076 -0.030	+0.056 -0.036 -0.014	-0.004 +0.003 0.000			

BERECHNUNG DER IN DEN MONDTAFELN ANGEWANDTEN STÖRUNGEN. 255

<u>2.</u>						
0,0,-4	0 -0,035 -0.044	+0,002 +0.003 -0.002	-0,007 +0.002 +0.007			
0,1,-4	-1.036 +0.689 +1.153	+0.085 +0.038 -0.026	-0.040 +0.004 +0.008			
0,2,-4	+12.507 -4.134 -12.570	+1.169 -0.536 -0.554	+0.005 -0.005 0.000	+0,003 -0.004 -0.003		
0,3,-4	+1.030 -0.455 -0.460	+0.362 -0.192 -0.153	+0.004 0.000 0.000			
0,4,-4	+0.075 -0.039 -0.022	+0.045 -0.026 -0.013				
0,4,-5	-0.036 +0.024 +0.040	+0.003 -0.004 -0.003				
0,2,-5	+0.435 -0.144 -0.437	+0.053 -0.026 -0.026				
0,3,-5	+0.036 -0.016 -0.046	+0.017 -0.040 -0.007				
<u>11.</u>						
0,2,-2		+0.003 -0.003 0.000				
0,3,-2		-0.057 +0.028 +0.029	+0.004 0.000 0.000			
0,4,-2		-0.003 +0.003 0.000				
0,1,-3		-0.004 +0.006 0.000	+0.004 -0.003 0.000			
0,2,-3		+0.171 -0.138 -0.049	-0.053 +0.023 +0.015			
0,3,-3		-1.598 +0.757 +0.829	-0.398 +0.289 +0.098	-0,004 +0.002 0.000		
0,4,-3		-1.240 +0.632 +0.582	-0.287 +0.247 +0.068	-0.001 +0.004 0.000		
0,5,-3		-0.182 +0.103 +0.063	-0.074 +0.057 +0.016			

<u>11.</u>						
0,0,-4		0,000 -0.002 +0.004	-0,003 +0.004 +0.002	+0,002 0.000 -0.003		
0,1,-4		-0.002 -0.194 +0.077	-0.044 +0.002 +0.009	+0.043 -0.001 -0.044		
0,2,-4		-5.724 +6.743 +0.635	-0.037 +0.082 -0.049	+0.002 +0.040 -0.044	+0,003 -0.001 -0.003	-0,006 +0.002 +0.006
0,3,-4		+110.540 -52.786 -56.604	-0.093 +0.129 -0.036	-0.038 +0.046 -0.002	+0.034 -0.044 -0.028	-0.040 +0.003 +0.016
0,4,-4		+68.064 -34.945 -34.351	-0.073 +0.073 -0.004	-0.040 +0.048 +0.005	-0.038 +0.042 +0.041	+0.053 -0.049 -0.049
0,5,-4		+9.570 -5.572 -3.051	-0.022 +0.049 +0.004	-0.047 +0.049 +0.002	-0.006 +0.003 +0.004	+0.006 -0.003 -0.004
0,6,-4		+1.017 -0.645 -0.248	-0.004 +0.003 0.000	-0.003 +0.003 0.000		
0,7,-4		+0.083 -0.056 -0.016				
0,1,-5		+0.002 -0.021 +0.006				
0,2,-5		-0.604 +0.702 +0.072	+0.030 0.000 -0.048			
0,3,-5		+11.342 -5.357 -5.836	+0.375 -0.259 -0.104	-0.006 +0.007 0.000		
0,4,-5		+8.540 -4.356 -3.996	+0.298 -0.220 -0.074	-0.006 +0.007 0.000		
0,5,-5		+1.239 -0.718 -0.403	+0.088 -0.067 -0.049	-0.004 +0.004 0.000		
0,6,-5		+0.124 -0.080 -0.032	+0.043 -0.041 -0.002			
0,2,-6		-0.042 +0.047 +0.006	+0.002 -0.004 0.000			
0,3,-6		+0.720 -0.337 -0.373	+0.044 -0.032 -0.042			



BERECHNUNG DER IN DEN MONDTAFELN ANGEWANDTEN STÖRUNGEN. 257

<u>44.</u>						
0,4,-6		+0,648 -0.329 -0.307	+0,040 -0.030 -0.040			
0,5,-6		+0.094 -0.054 -0.034	+0.009 -0.007 -0.003			
0,3,-7		+0.037 -0.019 -0.019				
0,4,-7		+0.035 -0.048 -0.047				
<u>45.</u>						
0,4,-5		-0.045 +0.007 +0.008	-0.028 +0.025 +0.007	-0,005 +0.005 +0.004		
0,5,-5		-0.024 +0.043 +0.012	-0.039 +0.028 +0.009	-0.005 +0.006 +0.004		
0,3,-6		-0.009 +0.030 -0.044	-0.048 +0.084 +0.006	-0.002 +0.003 0.000		
0,4,-6		+0.725 -0.327 -0.384	+1.183 -0.830 -0.305	-0.004 +0.004 0.000		
0,5,-6		+0.987 -0.488 -0.482	+1.394 -1.034 -0.339	-0.001 +0.004 0.000		
0,6,-6		+0.394 -0.206 -0.174	+0.560 -0.428 -0.127			
0,7,-6		+0.064 -0.037 -0.022	+0.106 -0.085 -0.024			
0,3,-7		-0.004 +0.005 -0.004	-0.005 +0.009 +0.004			
0,4,-7		+0.106 -0.046 -0.057	+0.478 -0.127 -0.046	+0.004 -0.005 -0.004		
0,5,-7		+0.170 -0.084 -0.084	+0.242 -0.184 -0.059	+0.005 -0.006 -0.004		
0,6,-7		+0.074 -0.039 -0.033	+0.108 -0.082 -0.025	+0.003 -0.003 0.000		

Die Summe der vorstehenden Producte ist  $=\bar{T}$ ; ich habe diese Summe nicht beigeschrieben, weil ich befürchte, dass alsdann beim Druck die Tafel eine grössere Breite bekommen würde, als das gewählte Format gestattet. Diese Summe wird übrigens weiter unten neben den Functionen, zu welchen sie jedenfalls addirt werden muss, aufgestellt werden.

Die einzelnen Coefficienten der vorstehenden Tafel kann man auf dieselbe Weise prüfen, wie im Art. 67 erklärt wurde. Ich werde von einigen Coefficienten die einzelnen Glieder, aus welchen sie bestehen, auch hier als Anleitung zu einer solchen Prüfung hersetzen. Namentlich werde ich für das Argument 1,0,0 der Abtheilung 1, aus welchem die Bewegung des Perigäums hervorgeht, alle Producte im Einzelnen anführen.

		in $\left(\frac{dT_0}{dg}\right) n\delta z$		in $\left(\frac{d^2T_0}{dg^2}\right) \times \frac{1}{2}(n\delta z)^2$	
1.	1.	1,0,0 in 1.	1.	1.	1,0,0 in 1.
2,0	-1,2,0	-0,00074	1,0	-1,1,0	+0,06588
-1,-1	1,-1,-1	- 518	2,0	-1,2,0	+ 14
1,-1	-1,1,-1	+ 790	-1,-1	1,-1,-1	+ 6
			1,-1	-1,1,-1	+ 11
2.	2.		2.	2.	
1,-1	-1,1,-1	- 4	2,-1	-1,2,-1	- 10
2,-1	-1,2,-1	+ 27	3,-1	-1,3,-1	+ 16
3,-1	-1,3,-1	- 14	1,-2	-1,1,-2	- 3
1,-2	-1,1,-2	- 15726	2,-2	-1,2,-2	+ 213
2,-2	-1,2,-2	+2.98876	3,-2	-1,3,-2	- 791
3,-2	-1,3,-2	- 75225	1,-3	-1,1,-3	- 25
1,-3	-1,1,-3	- 383	2,-3	-1,2,-3	+ 2
2,-3	-1,2,-3	- 41	3,-3	-1,3,-3	- 75
3,-3	-1,3,-3	+ 1270	1,-4	-1,1,-4	+ 148
1,-4	-1,1,-4	- 381	2,-4	-1,2,-4	- 1
2,-4	-1,2,-4	- 2	3,-4	-1,3,-4	+ 82
3,-4	-1,3,-4	+ 3	1,-1	1,1,-1	- 7
1,-1	1,1,-1	- 1	2,-1	1,2,-1	+ 1170
2,-1	1,2,-1	+ 295	3,-1	1,3,-1	+ 142
1,-2	1,1,-2	+ 18	1,-2	1,1,-2	+ 4
2,-2	1,2,-2	+ 2	2,-2	1,2,-2	- 555
3,-2	1,3,-2	+56.78475	3,-2	1,3,-2	- 50
1,-3	1,1,-3	+1.99462	1,-3	1,1,-3	- 1
2,-3	1,2,-3	+ 402	2,-3	1,2,-3	
3,-3	1,3,-3	+ 4	1,-4	1,1,-4	
1,-4	1,1,-4	+ 4			+0,06716
2,-4	1,2,-4	+ 14804			
		+ 848			
		+ 2			
		+ 21			
		+ 2			
		+61,02935			

		in $\left(\frac{d^2T_0}{d\sigma^2}\right) \times \frac{1}{4}(n\delta z)^2$	
1.	1.	1,0,0 in 1.	
1,0	-1,1,0	+0,00004	
2.	2.		
1,-2	1,1,-2	-	505
2,-2	1,2,-2	-	109
3,-2	1,3,-2	-	4
4,-3	1,1,-3	-	3
1,-2	-1,1,-2	+	1
2,-2	-1,2,-2	-	163
3,-2	-1,3,-2	+	780
4,-2	-1,4,-2	+	9
2,-3	-1,2,-3	-	1
3,-3	-1,3,-3	+	6
		+0,00012	

		in $H\delta P$				in $N\delta Q$	
1.	1.	1,0,0 in 1.		1.	1.	1,0,0 in 1.	
1,0	-1,1,0	+0,00012		0,0	1,0,0	-0,00524	
0,-1	-1,0,-1	+	2	1,0	-1,1,0	+	499
1,0	1,1,0	-	2	2.	2.		
0,-1	1,0,-1	-	3	1,-2	-1,1,-2	-	5
2.	2.			2,-2	-1,2,-2	-	288
1,-2	-1,1,-2	-	4	3,-2	-1,3,-2	+	54
2,-2	-1,2,-2	-	243	2,-3	-1,2,-3	-	1
3,-2	-1,3,-2	+	54	0,-2	1,0,-2	-	55
2,-3	-1,2,-3	-	1	1,-2	1,1,-2	+	1645
0,-2	1,0,-2	-	49	2,-2	1,2,-2	-	168
1,-2	1,1,-2	+	1776	1,-3	1,1,-3	+	6
2,-2	1,2,-2	-	161	3.	3.		
1,-3	1,1,-3	+	7	1,1	1,1,1	+	1
3.	3.			0,0	1,0,0	+	281
1,1	1,1,1	+	1	1,0	1,1,0	+	1453
0,0	1,0,0	+	281	2,0	1,2,0	-	153
1,0	1,1,0	+	1458	1,-1	1,1,-1	+	1
2,0	1,2,0	-	153	1,0	-1,1,0	-	4
1,-1	1,1,-1	+	1	2,0	-1,2,0	-	247
1,0	-1,1,0	-	4	3,0	-1,3,0	+	52
2,0	-1,2,0	-	247	4.	4.		
3,0	-1,3,0	+	51	0,3	-1,0,3	+	4
4.	4.			0,2	-1,0,2	+	1531
0,3	-1,0,3	+	4	1,2	-1,1,2	+	215
0,2	-1,0,2	+	1510	0,3	1,0,3	+	5
1,2	-1,1,2	+	216	-1,2	1,-1,2	-	172
0,3	1,0,3	+	5	0,2	1,0,2	+	2117
-1,2	1,-1,2	-	176			+0,05947	
0,2	1,0,2	+	2100				
		+0,06435					

Als zweites Beispiel wähle ich die drei Coefficienten des Arguments 1, -2 in der Abtheilung 2, und im Product  $\left(\frac{dT_0}{dg}\right) ndz$ . Hier sind die einzelnen Glieder nebst den Argumenten, denen sie angehören, die folgenden:

2.	1.	0, 1, -2	1.	-1, 2, -2	1.	1, 0, -2	
1, -2		0	-1, 1, 0	+12,544	-1, 1, 0	+12,5437	
0, -2	0, 1, 0	+0,040	-1, 2, 0	6		0	
2, -2	0, 1, 0	-0,497		0	-1, 2, 0	+ 0,3305	
3, -2	0, 2, 0	-		0	-1, 3, 0	+ 6	
1, -1		0	-1, 1, -1	- 2	1, -1, -1	- 20	
1, -3		0	1, -1, -1	+ 14	-1, 1, -1	+ 140	
2, -3	0, 1, -1	- 1			-1, 2, -1	+ 6	
<u>1.</u>	<u>2.</u>		<u>2.</u>		<u>2.</u>		
-1, -1	0, 2, -1	- 46	-1, 3, -1	+ 8	1, 1, -1	+ 78	
0, -1	0, 1, -1	+ 6	-1, 2, -1	- 8			
	2, 0	0, 3, -2	+ 14	-1, 4, -2	- 9	1, 2, -2	- 43
0, -1	0, 1, -3	+ 40	-1, 2, -3	- 54			
1, -1	0, 2, -3	- 166	-1, 3, -3	+ 82	1, 1, -3	+ 834	
<u>11.</u>	<u>2.</u>		<u>2.</u>		<u>2.</u>		
2, -4	0, 1, -2	- 32			-1, 2, -2	+ 419	
3, -4	0, 2, -2	+ 904	1, 1, -2	- 454	-1, 3, -2	- 4477	
4, -4	0, 3, -2	+ 33	1, 2, -2	- 40	-1, 4, -2	- 497	
5, -4					-1, 5, -2	- 2	
2, -5					-1, 2, -3	+ 2	
3, -5	0, 2, -3	+ 6	1, 1, -3	- 3	-1, 3, -3	- 30	
4, -5					-1, 4, -3	- 2	
		+0,300		+12,102		+12,5456	

Auf diese Art kann man jeden einzelnen Coefficienten der vorstehenden Tafel nachrechnen, will man indess ein ganzes Product nachrechnen, so verfährt man am Kürzesten, wenn man die partiellen Producte der Reihe nach, so wie man sie durch Multiplication aller Glieder des einen Factors mit allen Gliedern des andern Factors erhalten hat, in die auf einem anderen Papier aufgestellten Columnen der betreffenden Argumente einträgt. Man braucht die Combinationen, aus welchen die einzelnen Glieder hervorgegangen sind, nicht hinzuzufügen, denn wenn später das Bedürfniss eintreten sollte, diese für den einen oder anderen Coefficienten kennen zu lernen, so lassen sie sich mit sehr geringer Mühe auffinden.

73.

Wir kommen nun zu der mit  $G$  bezeichneten Function, die eben so behandelt werden muss wie  $T$ , nur kann man hier ein Weniges an der Genauigkeit vergeben, da  $G$  nur mit einem Factor erster Ordnung multiplicirt in das Endresultat übergeht.

Für  $G$

$\gamma, g, g'$	$S$ sin	$S_1$ sin	$L$ sin	$V$ cos	$V_1$ cos	$M$ cos
<b>1.</b>						
$-1, 1, 0$	-3503"	+17"	+3486"			
$0, 1, 0$	+289 -96 -289	-2 0 -35	+287 -96 -324			
$0, -1, -1$	-7 +7 +2	0 +2 0	-7 +9 +2			
$0, 0, -1$	0 -88 +88	0 -5 -7	0 -93 +84			
$0, 1, -1$	+7 -2 -7	0 0 -2	+7 -2 -9			
<b>2.</b>						
$0, 2, -1$	0 0 -30	0 0 -6	0 0 -36			
$0, 0, -2$	+24 +2 +2	+3 0 -2	+27 +2 0			
$0, 1, -2$	-294 0 -294	+2 -38 -39	-289 -38 -330			
$0, 2, -2$	-7 0 +3535	+3 -20 -18	-4 -20 +3517	0 0 -28"		0 0 -28"
$0, 3, -2$	0 0 +97	+2 -4 0	+2 -4 +97			
$0, 1, -3$	-17 0 -17	0 -2 -2	-17 -2 -19			
$0, 2, -3$	0 0 +207	0 -4 +5	0 -4 +242			

<u>11.</u>						
0,3,-4		-2"	-2"			
		0	0			
		+38	+38			
<hr/>						
0,4,-4		0	0			
		0	0			
		+20	+20			
<hr/>						
<u>3.</u>						
0,2,4	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0
	+87"	-6	+84	-87"	+6"	-84"
<hr/>						
0,4,0	-288	0	-288	+287	0	+287
	0	-19	-19	0	+19	+19
	-288	-19	-307	+287	+19	+306
<hr/>						
0,2,0	-7	+2	-5	+7	-2	+5
	0	-10	-10	0	+10	+10
	+3489	-9	+3480	-3482	+9	-3473
<hr/>						
0,3,0	0		0	0		0
	0		0	0		0
	+96		+96	-96		-96
<hr/>						
0,2,-4	0	0	0	0	0	0
	0	-4	-4	0	+4	+4
	+87	+5	+92	-87	-5	-92
<hr/>						
<u>4.</u>						
0,0,3	0	0	0	0	0	0
	-104	+3	-104	+103	-3	+100
	+104	+2	+106	-103	-2	-105
<hr/>						
0,-1,2	-146	+1	-145	+145	-1	+144
	+146	0	+146	-145	0	-145
	+49	0	+49	-48	0	-48
<hr/>						
0,0,2	0	+3	+3	0	-3	-3
	-1774	0	-1774	+1754	0	+1754
	+1774	-18	+1753	-1754	+18	-1736
<hr/>						
0,1,2	+146	0	+146	-145	0	-145
	-49	0	-49	+48	0	+48
	-146	-39	-185	+145	+39	+184
<hr/>						
<u>12.</u>						
0,3,-2		-4	-4		+4	+4
		0	0		0	0
		+38	+38		-38	-38
<hr/>						
0,4,-2		0	0		0	0
		0	0		0	0
		+22	+22		-22	-22

Ferner für  $G$ .

$\gamma, g, g'$	$Z$ sin	$Z_1$ sin	$O$ sin
<u>1.</u>			
-1,4,0	-3475"	+18"	-3457"
0,4,0	+286 -95 -286	-4 0 -37	+285 -95 -323
0,-1,-1	-7 +7 +2	0 +2 0	-7 +9 +2
0,0,-1	0 -88 +88	0 -5 -7	0 -93 +84
0,1,-1	+7 -2 -7	0 0 -2	+7 -2 -9
<u>2.</u>			
0,2,-1	0 0 -30	0 0 -6	0 0 -36
0,0,-2	+24 +2 +2	+3 0 -2	+27 +2 0
0,1,-2	-288 0 -288	+4 -37 -38	-287 -37 -326
0,2,-2	-7 0 +3493	+3 -20 -18	-4 -20 +3475
0,3,-2	0 0 +95	+4 -4 0	+4 -4 +95
0,1,-3	-17 0 -17	0 -2 -2	-17 -2 -19
0,2,-3	0 0 +206	0 -4 +5	0 -4 +244
<u>11.</u>			
0,3,-4		-4 0 +38	-4 0 +38
0,4,-4		0 0 +20	0 0 +20

<u>3.</u>			
0,2,1	0	0	0
	0	0	0
	-87"	+6"	-84"
0,1,0	+287	0	+287
	0	+19	+19
	+287	+19	+306
0,2,0	+7	-2	+5
	0	+10	+10
	-3476	+9	-3467
0,3,0	0		0
	0		0
	-95		-95
0,2,-1	0	0	0
	0	+1	+1
	-87	-5	-92
<u>4.</u>			
0,0,3	0	0	0
	+102	-3	+99
	-102	-2	-104
0,-1,2	+143	-1	+142
	-143	0	-143
	-48	0	-48
0,0,2	0	-3	-3
	+1736	0	+1736
	-1736	+18	-1718
0,1,2	-143	0	-143
	+48	0	+48
	+143	+39	+182
<u>12.</u>			
0,3,-2		+1	+1
		0	0
		-38	-38
0,4,-2		0	0
		0	0
		-22	-22

Ferner für  $G$ .

$\gamma, g, g'$	$R$ cos	$R_1$ cos	$\frac{1}{2}L\delta P$ cos	$M\delta Q$ cos	$H$ cos
<u>1.</u>					
0,0,0		+0.3		0.0	+0.3
-1,1,0		-1.6		-0.3	-1.9
0,1,0		+0.4			+0.4
		0.0			0.0
		-3.6			-3.6



<u>2.</u>					
0,2,-1	0,0 0.0 -2.6	0,0 0.0 -0.5			0,0 0.0 -3.4
0,0,-2	+2.1 0.0 0.0				-2.1 0.0 0.0
0,4,-2	-26.0 0.0 -26.0		+0,2 0.0 +0.2	+0,3 0.0 +0.4	-25.5 0.0 -25.4
0,2,-2	-0.4 0.0 +344.9	0.0 0.0 -0.4	0.0 +0.4 -2.1	0.0 -0.2 -3.9	-0.4 -0.4 +308.8
0,3,-2	0.0 0.0 +8.6				0.0 0.0 +8.6
0,4,-3	-1.5 0.0 -1.5				-1.5 0.0 -1.5
0,2,-3	0.0 0.0 +18.5	0.0 0.0 +0.5			0.0 0.0 +19.0
<u>4.</u>					
0,3,-4		-0.4 0.0 +3.4			-0.4 0.0 +3.4
0,4,-4		0.0 0.0 +1.8	0.0 0.0 -0.2		0.0 0.0 +1.6
<u>3.</u>					
0,2,1	0.0 0.0 -7.9	0.0 0.0 +0.5	0.0 0.0 -0.4		0.0 0.0 -7.5
0,0,0	-2.2 0.0 0.0	-0.4 0.0 0.0			-2.3 0.0 0.0
0,4,0	+25.9 0.0 +25.9	-0.4 +1.7 +1.8	-0.2 0.0 -0.3		+25.6 +1.7 +27.4
0,2,0	+0.7 0.0 -344.6	-0.4 +0.9 +0.8	0.0 0.0 +2.1	0.0 -0.2 -0.4	+0.6 +0.7 -342.1
0,3,0	0.0 0.0 -8.7				0.0 0.0 -8.7

<u>3.</u>					
0,2,-1	0%0 0.0 -7.9	0%0 0.0 -0.5	0%0 0.0 +0.3		0%0 0.0 -8.4
<u>4.</u>					
0,0,3	0 +9.3 -9.3	0.0 -0.2 -0.4			0.0 +9.4 -9.4
0,-1,2	+13.0 -13.0 -4.3	-0.4 0.0 0.0	-0.2 +0.2 0.0		+12.7 -12.8 -4.3
0,0,2	0 +157.8 -157.8	-0.3 0.0 +1.6	0.0 -2.2 +2.2	0%0 +0.3 0.0	-0.3 +155.9 -154.0
0,1,2	-13.0 +4.3 +13.0	0.0 0.0 +3.5	+0.2 0.0 -0.3		-12.8 +4.3 +16.2
0,0,4	0 -1.3 +1.3	0.0 +0.3 +0.3			0.0 -1.0 +1.6
<u>5.</u>					
0,2,2	0.0 0.0 -0.6		0.0 0.0 +2.2	0.0 0.0 -4.4	0.0 0.0 -2.5
<u>12.</u>					
0,3,-2		+0.2 0.0 -3.5			+0.2 0.0 -3.5
0,4,-2		0.0 0.0 -1.8		0.0 0.0 +0.3	0.0 0.0 -1.5
<u>13.</u>					
0,1,-4		0.0 -1.7 -1.7	+0.2 0.0 +0.2		+0.2 -1.7 -1.5
0,2,-4		+0.4 -0.9 -0.8	0.0 0.0 -2.0	0.0 +0.2 -0.2	+0.4 -0.7 -3.0
<u>19.</u>					
0,0,4			0.0 -1.4 +1.4	0.0 +2.4 -2.0	0.0 +1.0 -0.9

Ferner für G

$\gamma, g, g'$	$Y$ sin	$Y_1$ sin	$\frac{1}{2}O\delta Q$ sin	$N$ sin
<u>1.</u>				
$-1,1,0$	-314,6	+1,6	+2,0	-310,0
$0,1,0$	+25.9	-0.1	-0.2	+25.6
	-8.6	0.0	0.0	-8.6
	-25.9	-3.6	+0.3	-29.2
$0,0,-1$	0	0.0		0.0
	-7.9	-0.4		-8.3
	+7.9	-0.6		+7.3
<u>2.</u>				
$0,2,-1$	0.0	0.0		0.0
	0.0	0.0		0.0
	-2.6	-0.5		-3.1
$0,0,-2$	+2.4	+0.3		+2.4
	0.0	-0.0		0.0
	0.0	-0.2		-0.2
$0,1,-2$	-26.0	+0.4	+0.2	-25.7
	0.0	-3.7	0.0	-3.7
	-26.0	-3.8	+0.2	-29.6
$0,2,-2$	-0.4	+0.3	0.0	+0.2
	0.0	-1.8	+0.3	-1.5
	+314.9	-1.7	-2.0	+311.2
$0,3,-2$	0.0			0.0
	0.0			0.0
	+8.6			+8.6
$0,4,-3$	-1.5	0.0		-1.5
	0.0	-0.2		-0.2
	-1.5	-0.2		-1.7
$0,2,-3$	0.0	0.0		0.0
	0.0	-0.2		-0.2
	+18.5	+0.4		+18.9
<u>11.</u>				
$0,3,-4$		-0.4		-0.4
		0.0		0.0
		+3.4		+3.4
$0,4,-4$		0.0	0.0	0.0
		0.0	0.0	0.0
		+1.8	-0.2	+1.6
<u>3.</u>				
$0,2,1$	0.0	0.0	0.0	0.0
	0.0	0.0	0.0	0.0
	-7.9	+0.5	+0.4	-7.3
$0,0,0$	-2.2	-0.4		-2.3
	0.0	0.0		0.0
	0.0	0.0		0.0

3.				
0,1,0	+25.9	-0.1	-0.2	+25.6
	0.0	+1.8	0.0	+1.8
	+25.9	+1.8	-0.3	+27.4
0,2,0	+0.7	-0.1	0.0	+0.6
	0.0	+0.9	-0.3	+0.6
	-344.6	+0.8	+2.0	-344.8
0,3,0	0.0			0.0
	0.0			0.0
	-8.7			-8.7
0,2,-1	0.0	0.0	0.0	0.0
	0.0	0.0	0.0	0.0
	-7.9	-0.5	+0.2	-8.2
4.				
0,0,3	0	0.0		0.0
	+9.2	-0.2		+9.0
	-9.2	-0.1		-9.3
0,-1,2	+13.0	-0.1	-0.2	+12.7
	-13.0	0.0	+0.3	-12.7
	-4.3	0.0	0.0	-4.3
0,0,2	0	-0.3	0.0	-0.3
	+157.1	+0.1	-2.0	+155.2
	-157.1	+1.7	+2.0	-153.4
0,1,2	-13.0	0.0	+0.2	-12.8
	+4.3	0.0	0.0	+4.3
	+13.0	+3.5	-0.3	+16.2
0,0,1	0	0.0		0.0
	-1.3	+0.3		-1.0
	+1.3	+0.3		+1.6
5.				
0,2,2	0.0		0.0	0.0
	0.0		0.0	0.0
	-0.6		-2.2	-2.8
12.				
0,3,-2		+0.2		+0.2
		0.0		0.0
		-3.5		-3.5
0,4,-2		0.0	0.0	0.0
		0.0	0.0	0.0
		-1.8	+0.3	-1.5
13.				
0,1,-4		0.0	-0.2	-0.2
		+1.7	0.0	+1.7
		+1.7	-0.2	+1.5
0,2,-4		-0.1	0.0	-0.1
		+0.9	0.0	+0.9
		+0.9	+2.2	+3.1
19.				
0,0,4			0.0	0.0
			+1.1	+1.1
			-1.1	-1.1

Zufolge der auf  $G$  angewandten Gleichung (20) bekommen wir schliesslich

$\gamma, g, g'$	$G_0$ sin	$G_1$ sin	$G_2$ sin	$G_3$ sin	$H\delta P$ sin	$N\delta Q$ sin
$\frac{1}{-1,1,0}$	+4458,440	-18,303	-0,182	+0,002	+0,424	+0,369
$0,1,0$	-95.504 +34.775 +95.505	+4.357 -0.490 +38.988	+0.014 -0.087 +0.070	-0.003	-0.032 +0.003 +0.056	-0.029 +0.002 +0.054
$0,2,0$	-2.620 +4.308 0	+0.036 -0.024 +4.772	+0.007 -0.040 +0.003	-0.004	-0.046	-0.045
$0,3,0$	-0.108 +0.064 +0.004	+0.004 -0.001 +0.097				
$0,-2,-1$	+0.066 0 -0.033	-0.026 -0.055 +0.024	+0.043			
$0,-1,-1$	+2.406 -2.405 -0.800	-0.224 -4.224 +0.327	-0.003 +0.063 +0.008			
$0,0,-1$	0 +29.175 -29.175	-0.094 +0.688 +2.742	-0.040 +0.028 +0.047		+0.045 -0.044	+0.044 -0.043
$0,1,-1$	-2.406 +0.800 +2.405	-0.067 +0.375 +2.359	-0.004 +0,075			
$0,2,-1$	-0.066 +0.033 0.000	-0.034 +0.024 +0.427	+0.047			
$0,3,-1$	-0.003 +0.002 0.000	-0.004 +0.004 +0.009				
$0,-1,-2$	+0.064 -0.064 -0.020	-0.009 -0.043 +0.042	+0.004			
$0,0,-2$	0 +0.735 -0.735	-0.004 +0.043 +0.404	+0.004 +0.004			
$0,1,-2$	-0.064 +0.020 +0.064	-0.002 +0.016 +0.072	+0.004			
$0,2,-2$	-0.002 +0.004 0.000	+0.005				
$0,0,-3$	0 +0.048 -0.048	+0.005 -0.002 +0.003				
$0,1,-3$	-0.002 0.000 +0.002	+0.005 +0.002				

2. 0,1,0		-0.004 -0.004 +0.009				
0,2,0		0.000 +0.002 +0.018	-0.004			
0,0,-1	+0.200 +0.014 +0.014	-0.099 -0.004 +0.029	-0.003 +0.007 +0.005			
0,1,-1	-2.425 0 -2.425	-0.475 +0.226 +1.194	-0.003 -0.015 +0.035		-0.003 -0.003	
0,2,-1	-0.067 0 +29.403	-0.096 +0.099 +5.723	+0.002 -0.012 +0.030	-0.004	+0.035	-0.002
0,3,-1	-0.003 0 +0.807	-0.013 +0.004 +0.924	+0.001 -0.002 +0.008			
0,4,-1	0 0 +0.033	+0.062				
0,-1,-2	+0.109 +0.109 -0.024	-0.044 -0.028 +0.031	+0.020			
0,0,-2	-23.806 -1.322 -1.322	-1.066 -0.390 +0.553	-0.048 +0.226 +0.004		-0.003 +0.010 -0.040	-0.003 +0.006 -0.006
0,1,-2	+288.629 -0.036 +288.629	-0.497 +12.240 +12.946	-0.064 +0.204 +0.202	-0.004 -0.004	+0.034 -0.002 +0.051	+0.029 -0.015 +0.050
0,2,-2	+7.917 -0.001 -3499.572	-1.027 +6.629 +6.417	-0.037 +0.051 +0.540	-0.004 -0.004	+0.014 -0.373	+0.044 -0.354
0,3,-2	+0.326 0 -95.992	-0.551 +0.535 +0.231	-0.006 +0.003 +0.258		-0.004 -0.021	-0.003 +0.004 -0.008
0,4,-2	+0.016 0 -3.950	-0.044 +0.035 +0.048	+0.034			
0,5,-2	+0.004 0 -0.193	+0.003	+0.002			
0,0,-3	-1.399 -0.078 -0.078	-0.023 -0.035 +0.029	+0.002 +0.021 -0.005			
0,1,-3	+16.965 -0.002 +16.965	+0.446 +0.839 +0.284	-0.003 +0.044 -0.005		+0.002 +0.004	

BERECHNUNG DER IN DEN MONDTAFELN ANGEWANDTEN STÖRUNGEN. 271

<u>2.</u>						
0,2,-3	+0,465 0 -205.698	+0,030 +0.622 -5.044	-0,005 +0.023 +0.039			+0,002 -0.024
0,3,-3	+0.019 0 -5.642	-0.047 +0.053 -4.236	-0.004 +0.003 +0.029			
0,4,-3	+0.004 0 -0.232	-0.004 +0.003 -0.079				
0,0,-4	-0.057 -0.003 -0.003	+0.004 -0.004 +0.004				
0,4,-4	+0.692 0 +0.692	+0.029 +0.039	+0.002			
0,2,-4	+0.049 0 -8.389	+0.004 +0.038 -0.355	+0.004 +0.003			-0.002
0,3,-4	+0.004 0 -0.230	-0.003 +0.002 -0.095				
0,4,-4	0 0 -0.009					
0,4,-5	+0.024 0 +0.024					
0,2,-5	+0.004 0 -0.292					
0,3,-5	0 0 -0.008					
<u>11.</u>						
0,2,-2		-0.002 0.000 0.000				
0,3,-2		0.000 0.000 +0.019				
0,4,-3		+0.003 0.000 0.000				
0,2,-3		-0.045 +0.002 -0.033	-0.005 +0.002 +0.008			
0,3,-3		-0.034 +0.004 +0.553	-0.003 +0.004 +0.065			

11.						
0,4,-3		-0.003 0.000 +0.379	+0.043			
0,5,-3		0.000 0.000 +0.034	+0.008			
0,4,-4		-0.036 -0.014 +0.037	+0.006 +0.002 -0.006	-0.004		
0,2,-4		+3.414 +0.071 +0.448	+0.005 +0.072 -0.072	-0.004 +0.004	-0.004	+0.004
0,3,-4		+1.662 +0.102 -37.746	-0.005 +0.075 -0.055	+0.003	-0.002 -0.018	+0.003 +0.010
0,4,-4		+0.125 +0.036 -20.223	-0.005 +0.024 -0.009	+0.002	+0.028	-0.032
0,5,-4		+0.007 +0.004 -1.633	-0.004 +0.002 +0.002			
0,6,-4		0.000 0.000 -0.116				
0,4,-5		-0.004 0.000 0.000				
0,2,-5		+0.323 +0.009 +0.050	+0.005 +0.008 -0.014			
0,3,-5		+0.213 +0.045 -3.894	+0.003 +0.040 -0.073			
0,4,-5		+0.018 +0.004 -2.596	+0.003 -0.049		+0.004	-0.004
0,5,-5		0.000 0.000 -0.217	-0.010			
0,6,-5		0.000 0.000 -0.015				
0,2,-6		+0.019 0.000 +0.004				
0,3,-6		+0.045 0.000 -0.250	-0.008			



BERECHNUNG DER IN DEN MONDTAFELN ANGEWANDTEN STÖRUNGEN. 273

<u>11.</u>						
0,4,-6		0,000 0.000 -0.200	-0,005			
0,5,-6		0.000 0.000 -0.046				
0,3,-7		0.000 0.000 -0.043				
0,4,-7		0.000 0.000 -0.042				
<u>15.</u>						
0,4,-5		0.000 0.000 +0.005	+0.005			
0,5,-5		0.000 0.000 +0.008	+0.006			
0,3,-6		+0.024 0.000 -0.008	+0.047 +0.004			
0,4,-6		+0.026 0.000 -0.255	+0.048 +0.002 -0.205			
0,5,-6		+0.007 +0.002 -0.315	+0.006 -0.219			
0,6,-6		0.000 0.000 -0.409	-0.077			
0,7,-6		0.000 0.000 -0.043	-0.011			
0,3,-7		+0.003 0.000 0.000				
0,4,-7		+0.004 0.000 -0.038	+0.004 -0.030			
0,5,-7		+0.004 0.000 -0.055	-0.039			
0,6,-7		0.000 0.000 -0.024	-0.045			

deren Summe  $\bar{G}$  giebt.

74.

Auf ganz dieselbe Art erhält man

für  $\Sigma$ 

$g, g'$	$S$ sin	$S_1$ sin	$L$ sin	$V$ cos	$V_1$ cos	$M$ cos
<u>1.</u>						
1,0		+40"	+40"			
2,0		+2	+2			
-1,-1		-2	-2			
0,-1		0	0			
1,-1		+2	+2			
<u>2.</u>						
2,-1	+15"	+6	+21			
0,-2	-13		-13			
1,-2	+291		+291			
2,-2	-1760		-1760	+14"		+14"
3,-2	-97		-97			
4,-2	-5		-5			
1,-3	+17		+17			
2,-3	-103	-6	-109			
3,-3	-6		-6			
<u>11.</u>						
3,-4		-36	-36			
4,-4		-21	-21			
<u>3.</u>						
2,1	-44	+6	+38	+44	-6"	+38
1,0	+288		+288	-287		-287
2,0	-1737		-1737	+1734		+1734
3,0	-95		-95	+95		+95
2,-1	-44	-6	-50	+44	+6	+50
<u>4.</u>						
-1,2		-1	-1		+1	+1
0,2		+15	+15		-15	-15
1,2		+39	+39		-39	-39
<u>12.</u>						
3,-2		-36	-36		+37	+37
4,-2		-21	-21		+21	+21

Ferner für  $\Sigma$

$g, g'$	$Z$ sin	$Z_1$ sin	$O$ sin
<b>1.</b>			
<u>1,0</u>		+40"	+40"
2,0		+3	+3
-1,-1		-2	-2
0,-1		0	0
1,-1		+2	+2
<b>2.</b>			
<u>2,-1</u>	+15"	+6	+21
0,-2	-13		-13
1,-2	+288		+288
2,-2	-1738		-1738
3,-2	-95		-95
4,-2	-5		-5
1,-3	+17		+17
2,-3	-102	-6	-108
3,-3	-6		-6
<b>11.</b>			
<u>3,-4</u>		-37	-37
4,-4		-21	-21
<b>3.</b>			
<u>2,1</u>	+44	-6	+38
1,0	-287		-287
2,0	+1730		+1730
3,0	+95		+95
2,-1	+44	+6	+50
<b>4.</b>			
<u>-1,2</u>		+1	+1
0,2		-15	-15
1,2		-39	-39
<b>12.</b>			
<u>3,-2</u>		+37	+37
4,-2		+21	+21

Ferner für  $\Sigma$

$g, g'$	$R$ cos	$R_1$ cos	$R_2$ cos	$\frac{1}{2}L\delta P$ cos	$M\delta Q$ cos	$H$ cos
<b>1.</b>						
<u>0,0</u>		+1,35		-0,02	+0,14	+1,47
1,0		+3,49		-0,03	-0,15	+3,34
2,0		+0,25		+0,07	+0,11	+0,43
-1,-1		+0,12				+0,12
0,-1		+0,17				+0,17
1,-1		+0,18				+0,18

<u>2.</u>						
1,-1	-0.22	+0.04		-0.02		-0.20
2,-1	+1.32	+0.50		+0.13	+0.04	+1.99
3,-1	+0.07	+0.10				+0.17
0,-2	-1.19	+0.02	-0.04			-1.21
1,-2	+25.96	+0.03		-0.16	-0.36	+25.47
2,-2	-156.73	+0.09	+0.09	+1.02	+2.04	-153.49
3,-2	-8.61		+0.04	+0.04	+0.13	-8.40
4,-2	-0.47					-0.47
1,-3	+1.53	-0.02		+0.01	-0.01	+1.51
2,-3	-9.21	-0.50		-0.04	+0.14	-9.64
3,-3	-0.51	-0.12				-0.63
2,-4	-0.38	-0.03				-0.44
<u>11.</u>						
2,-4		+0.31				+0.31
3,-4		-3.25		+0.02	+0.04	-3.19
4,-4		-1.91		+0.01	+0.02	-1.88
5,-4		-0.18				-0.18
3,-5		-0.35				-0.35
4,-5		-0.22				-0.22
<u>3.</u>						
1,1	-0.65	-0.04		-0.01		-0.70
2,1	+3.94	-0.50		+0.08		+3.52
3,1	+0.22	-0.10				+0.12
0,0	+1.19					+1.19
1,0	-25.94		-0.04	+0.18	-0.05	-25.85
2,0	+156.59	+0.06	-0.09	-1.03	+0.32	+155.85
3,0	+8.60		-0.04	-0.07	+0.02	+8.51
1,-1	-0.65	+0.02		+0.03		-0.60
2,-1	+3.94	+0.50		-0.17		+4.27
3,-1	+0.22	+0.12				+0.34
<u>4.</u>						
0,3		-0.16				-0.16
-1,2		+0.02		-0.05	+0.03	0.00
0,2		-1.35		-0.01	-0.18	-1.54
1,2		-3.52		+0.05	+0.06	-3.44
2,2		-0.25				-0.25
<u>5.</u>						
1,2				+0.16	-0.32	
2,2	+0.32			-1.02	+2.04	+1.34
3,2				-0.05	+0.09	
<u>12.</u>						
2,-2		-0.31		-0.06	+0.01	-0.36
3,-2		+3.32		-0.63	+0.09	+3.20
4,-2		+1.91		-0.61	-0.17	+1.73
5,-2		+0.18				+0.18
3,-3		+0.24				+0.24
4,-3		+0.16				+0.16

BERECHNUNG DER IN DEN MONDTAFELN ANGEWANDTEN STÖRUNGEN. 277

13.						
2,-4		-0,06		+1,03	+0,01	+0,98
18.						
2,0				-0.06	+0.11	+0.05
3,0				+0.02	-0.03	-0.04
4,0				-0.09	+0.18	+0.09
6.						
1,-4	-0,05	-0.09				-0.14
7.						
2,-3	+0.18					+0.18
3,-3	-0.72	+0.09				-0.63
8.						
1,1	+0.29	+0.09				+0.38
9.						
3,-1	+0.71	-0.09				+0.62
10.						
1,-3	-0.25					-0.25

Ferner für  $\Sigma$ .

$g, g'$	$Y$ sin	$Y_1$ sin	$Y_2$ sin	$\frac{1}{2}OdQ$ sin	$N$ sin
1.					
1,0		+3,67		-0,06	+3,61
2,0		+0.25		+0.05	+0.30
-1,-1		-0.12			-0.12
0,-1		-0.05			-0.05
1,-1		+0.18			+0.18
2.					
1,-4	-0,22	+0.05			-0.17
2,-4	+1.32	+0.50		+0.02	+1.84
3,-4	+0.07	+0.10			+0.17
0,-2	-1.19	-0.02	+0,04		-1.17
1,-2	+25.96	-0.03	+0.08	-0.15	+25.86
2,-2	-156.73	+0.09	+0.09	+0.86	-155.69
3,-2	-8.64		+0.04	+0.06	-8.54
4,-2	-0.47				-0.47
1,-3	+1.53	-0.02			+1.51
2,-3	-9.21	-0.50		+0.07	-9.64
3,-3	-0.51	-0.13			-0.64
2,-4	-0.38	-0.03			-0.41

<u>11.</u>					
2,-4		-0.34			+0.34
3,-4		-3.25		+0.02	-3.23
4,-4		-1.94		+0.04	-1.90
5,-4		-0.18			-0.18
3,-5		-0.35			-0.35
4,-5		-0.22			-0.22
<u>3.</u>					
4,4	-0.65	-0.04		+0.04	-0.68
2,4	+3.94	-0.50		-0.03	+3.41
3,4	+0.22	-0.10			+0.12
0,0	+1.19				+1.19
1,0	-25.94		-0.04	+0.43	-25.85
2,0	+156.59	+0.06	-0.09	-0.86	+155.70
3,0	+8.60		-0.04	-0.04	+8.52
1,-1	-0.65	+0.02		+0.04	-0.62
2,-1	+3.94	+0.50		-0.07	+4.37
3,-1	+0.22	+0.12			+0.34
<u>4.</u>					
0,3		-0.16			-0.16
-1,2		+0.44		-0.02	+0.42
0,2		-1.35		-0.04	-1.36
1,2		-3.52		+0.02	-3.50
2,2		-0.25			-0.25
<u>5.</u>					
1,2				-0.16	
2,2	+0.32			+1.02	+1.34
3,2				+0.05	
<u>12.</u>					
2,-2		-0.34		-0.05	-0.36
3,-2		+3.32		+0.07	+3.39
4,-2		+1.94		-0.18	-1.73
5,-2		+0.18			+0.18
3,-3		+0.24			+0.24
4,-3		+0.16			+0.16
<u>13.</u>					
2,-4		-0.06		-1.03	-1.09
<u>18.</u>					
2,0				+0.06	+0.06
3,0				-0.02	-0.02
4,0				+0.09	+0.09
<u>6.</u>					
1,-1	-0.54	-0.09			-0.63

7.					
2,-3	+0,18				+0,18
3,-3	-0.72	+0,09			-0.63
8.					
1,1	+0.29	+0.09			+0.38
9.					
3,-1	+0.74	-0.09			+0.62
10.					
1,-3	+0.24				+0.24

Hiemit erhalten wir wieder schliesslich

$g, g'$	$\Sigma_0$ sin	$\Sigma_1$ sin	$\Sigma_2$ sin	$\Sigma_3$ sin	$H\delta P$ sin	$N\delta Q$ sin
1.						
1,0		-40,349	-0,006	+0,013	-0,013	-0,011
2,0		-2.895	-0.005	+0.006	+0.008	+0.008
3,0		-0.491				
4,0		-0.043				
-3,-1		+0.006	-0.004			
-2,-1		+0.403	-0.029			
-1,-1		+1.509	-0.144	-0.004		
0,-1		+0.34128	-0.44179	-0.00024	-0.00033	+0.00002
1,-1		-2.115	-0.148			
2,-1		-0.184	-0.036			
3,-1		-0.043	-0.004			
-2,-2		+0.002				
-1,-2		+0.052	-0.006			
0,-2		+0.0235	-0.0092			
1,-2		-0.064	-0.009			
2,-2		-0.006				
0,-3		+0.002				
1,-3		-0.002				
2.						
0,0		+0.000811	-0.000119	-0.000094		
1,0		-0.009	+0.002			
2,0		-0.046	+0.008			
3,0		-0.003				
-1,-1	+0,001	+0.004	+0.003			
0,-1	-0.11110	+0.08046	-0.02007	-0.00162	-0.00002	-0.00002
1,-1	+2.425	-0.472	-0.036	+0.004	+0.003	
2,-1	-14.635	-5.582	-0.038	+0.004	-0.018	
3,-1	-0.804	-1.082	-0.014	+0.002		
4,-1	-0.044	-0.094	-0.002			
5,-1	-0.003	-0.006				

<u>2.</u>						
-2,-2	-0.004	+0.002	-0.004			
-1,-2	-0.085	+0.028	-0.047			
0,-2	+13.2249	+0.3246	-0.4482	-0.0005	+0.0027	+0.0046
1,-2	-288.592	+0.263	-0.743		-0.036	-0.027
2,-2	+1741.874	-0.310	-1.149		+0.184	+0.157
3,-2	+95.667	-0.072	-0.530		+0.046	+0.042
4,-2	+5.250	-0.044	-0.069			
5,-2	+0.300	-0.004	-0.006			
6,-2	+0.018					
<u>-1,-3</u>						
0,-3	-0.005	+0.002	-0.005			
1,-3	+0.777	-0.046	-0.039			
1,-3	-16.963	+0.188	-0.074	-0.004	-0.004	-0.004
2,-3	+102.384	+5.523	-0.120	-0.004	+0.030	+0.040
3,-3	+5.623	+1.402	-0.062	-0.002		
4,-3	+0.309	+0.120	-0.006			
5,-3	+0.048	+0.008				
<u>0,-4</u>						
1,-4	+0.032	-0.002	-0.002			
1,-4	-0.692	+0.043	-0.002			
2,-4	+4.175	+0.386	+0.005			
3,-4	+0.229	+0.106	+0.002			
4,-4	+0.043	+0.008				
<u>1,-5</u>						
2,-5	-0.024					
2,-5	+0.145	+0.017				
3,-5	+0.008	+0.004				
<u>11.</u>						
2,-2		+0.002				
3,-2		-0.019				
<u>1,-3</u>						
2,-3		-0.003				
2,-3		+0.079	-0.045			
3,-3		-0.549	-0.129			
4,-3		-0.394	-0.088			
5,-3		-0.045	-0.049			
<u>0,-4</u>						
1,-4		+0.004				
1,-4		+0.045	-0.007	+0.003		
2,-4		-3.469	-0.043	0.000		-0.004
3,-4		+36.170	-0.030	-0.042	+0.008	-0.008
4,-4		+21.153	-0.024	-0.042	-0.045	+0.045
5,-4		+2.224	-0.006	-0.005		
6,-4		+0.185				
7,-4		+0.042				
<u>1,-5</u>						
2,-5		+0.004				
2,-5		-0.364	+0.007			
3,-5		+3.689	+0.124	-0.004		
4,-5		+2.689	+0.092	-0.004		
5,-5		+0.293	+0.023			
6,-5		+0.023				
<u>2,-6</u>						
3,-6		-0.024				
3,-6		+0.232	+0.044			
4,-6		+0.205	+0.041			
5,-6		+0.024				



44.					
3,-7		+0,012			
4,-7		+0.012			
45.					
4,-5		-0.005	-0,009	-0,002	
5,-5		-0.008	-0.011	-0.004	
3,-6		-0.014	-0.025		
4,-6		+0.229	+0.387		
5,-6		+0.346	+0.438		
6,-6		+0.117	+0.158		
7,-6		+0.016	+0.024		
3,-7		-0.003	-0.003		
4,-7		+0.034	+0.058	+0.001	
5,-7		+0.055	+0.078	+0.001	
6,-7		+0.022	+0.031		

deren Summe  $\bar{\Sigma}$  giebt.

75.

Es ist jetzt  $\bar{U}$  zu berechnen, welches durch die Gleichung (16), nemlich durch

$$\bar{U} = \bar{T} - \bar{G} - \bar{\Sigma}$$

geschieht. Diese Rechnung ist in der folgenden Tafel zusammengestellt.

$\gamma, \theta, g'$	$\bar{T}$ sin	$\bar{G}$ sin	$\bar{\Sigma}$ sin	$\bar{U}$ sin
1.				
-1,1,0	+1152,442	+1140,717		+11,725
0,1,0	-216.412	-94.194	-40,366	-81.852
-1,2,0	+91.148	+31.203		+59.945
1,0,0	+156.72478	+134.670		+22.055
0,2,0	-16.164	-2.577	-2.878	-10.709
	+9.404	+1.274		+8.130
	+3.698	+1.743		+1.955
0,3,0	-1.346	-0.107	-0.191	-1.048
	+0.879	+0.063		+0.816
	+0.249	+0.101		+0.148
0,4,0	-0.108		-0.013	-0.095
	+0.076			+0.076
	+0.017			+0.017
0,-3,-1	+0.044		+0.002	+0.042
	-0.010			-0.010
	-0.028			-0.028
0,-2,-1	+0.429	+0.040	+0.074	+0.315
	-0.104	-0.042		-0.062
	-0.228	-0.042		-0.216

<u>1.</u>				
0,-1,-1	+6.368 -4.38028 -2.446	+2.482 -3.566 -0.465	+4.367	+2.819 -0.814 -4.954
0,0,-1	+0.45765 +30.47233 -27.30352	-0.104 +29.920 -26.443	+0.19896	+0.363 +0.552 -0.894
0,4,4	-9.348 +4.642 +6.06734	-2.477 +1.175 +4.839	-2.263	-4.578 +3.437 +4.228
0,2,-1	-1.034 +0.630 +0.271	-0.097 +0.057 +0.444	-0.217	-0.720 +0.573 +0.427
0,3,-1	-0.096 +0.068 +0.049	-0.004 +0.003 +0.009	-0.047	-0.075 +0.065 +0.040
0,-2,-2	+0.009 -0.004 -0.006		+0.002	+0.007 -0.004 -0.006
0,-1,-2	+0.189 -0.1278 -0.069	+0.052 -0.100 -0.008	+0.046	+0.094 -0.028 -0.064
0,0,-2	+0.0387 +0.7722 -0.6789	-0.004 +0.752 -0.633	+0.0443	+0.025 +0.020 -0.046
0,1,-2	-0.278 +0.148 +0.1755	-0.063 +0.036 +0.137	-0.070	-0.145 +0.112 +0.039
0,2,-2	-0.032 +0.021 +0.040	-0.002 +0.004 +0.005	-0.006	-0.024 +0.020 +0.005
0,-1,-3	+0.007 -0.004 -0.002			+0.007 -0.004 -0.002
0,0,-3	+0.003 +0.017 -0.049	+0.005 +0.016 -0.045	+0.002	-0.004 +0.004 -0.004
0,1,-3	-0.006 +0.002 +0.004	+0.003 0.000 +0.004	-0.002	-0.007 +0.002 0.000
<u>2.</u>				
0,-1,0	0.000 +0.00009 0.000			
0,0,0	+0.000634 -0.00188 +0.00074		+0.000604	
0,4,0	-0.024 +0.0073 +0.04396	-0.004 -0.004 +0.009	-0.007	-0.046 +0.008 +0.005

2.				
0,2,0	-0,24 +0.008 +0.020	0,000 +0.002 +0.014	-0,008	-0,016 +0.006 +0.006
0,3,0	0.000 -0.003 +0.002		-0.003	+0.003 -0.003 +0.002
0,-1,-1	-0.008 +0.00088 +0.007		-0.004	-0.007 +0.004 +0.007
0,0,-1	+0.03404 +0.00405 +0.10810	+0.098 +0.014 +0.045	-0.05237	-0.042 -0.010 +0.063
0,1,-1	+1.408 -1.676 -2.31921	-2.906 +0.211 -1.202	+1.921	+2.393 -1.887 -1.117
0,2,-1	-60.929 +23.000 +52.711	-0.161 +0.087 +35.188	-20.269	-40.499 +22.913 +17.523
0,3,-1	-7.608 +3.781 +3.175	-0.045 +0.002 +1.739	-1.898	-5.695 +3.779 +1.436
0,4,-1	-0.728 +0.424 +0.205	0.000 0.000 +0.095	-0.140	-0.588 +0.424 +0.110
0,5,-1	-0.062 +0.040 +0.013		-0.009	
0,-2,-2	-0.013 +0.002 +0.015		-0.003	
0,-1,-2	-0.027 +0.1808 +0.069	+0.065 +0.101 +0.007	-0.104	+0.042 +0.080 +0.062
0,0,-2	-1.5059 -14.8068 -3.4649	-24.896 -1.470 -0.781	+13.1051	+10.285 -13.337 -2.684
0,1,-2	-434.396 +300.571 +494.8994	+288.128 +12.387 +304.877	-289.135	-433.389 +288.184 +193.022
0,2,-2	+5213.220 -1714.138 -5237.630	+6.853 +6.736 -3493.343	+1740.750	+3465.617 -1720.874 -1744.287
0,3,-2	+427.338 -187.976 -191.162	-0.234 +0.539 -95.532	+95.093	+332.479 -188.515 -95.630
0,4,-2	+30.949 -15.945 -9.072	-0.025 +0.035 -3.871	+5.137	+25.837 -15.980 -5.201

2.				
0,5,-2	+2,187 -1.244 -0.490	+0,004 0.000 -0.188	+0,290	+4,896 -1.244 -0.302
0,6,-2	+0.156 -0.096 -0.030		+0.018	
0,-1,-3	-0.007 +0.012 +0.009		-0.008	+0.004 +0.012 +0.009
0,0,-3	-0.158 -0.840 -0.198	-1.420 -0.092 -0.054	+0.722	+0.540 -0.718 -0.144
0,4,-3	-24.442 +17.837 +28.342	+17.380 +0.881 +17.248	-16.855	-24.967 +16.956 +11.064
0,2,-3	+323.093 -108.648 -316.096	+0.490 +0.647 -210.754	+107.823	+214.780 -109.295 -105.342
0,3,-3	+29.903 -13.564 -13.244	-0.029 +0.056 -6.849	+6.964	+22.974 -13.620 -6.392
0,4,-3	+2.381 -1.273 -0.692	-0.003 +0.003 -0.311	+0.423	+4.961 -1.276 -0.381
0,5,-3	+0.184 -0.109 -0.044	-0.014	+0.026	+0.158 -0.109 -0.030
0,0,-4	-0.005 -0.030 -0.006	-0.056 -0.004 -0.002	+0.028	+0.023 -0.026 -0.004
0,4,-4	-0.964 +0.731 +1.135	+0.721 +0.041 +0.692	-0.684	-1.001 +0.690 +0.444
0,2,-4	+13.684 -4.672 -13.127	+0.023 +0.039 -8.749	+4.566	+9.095 -4.711 -4.378
0,3,-4	+1.393 -0.647 -0.613	-0.002 +0.002 -0.325	+0.337	+1.058 -0.649 -0.288
0,4,-4	+0.420 -0.065 -0.035	-0.014	+0.021	+0.099 -0.065 -0.019
0,4,-5	-0.033 +0.023 +0.037	+0.024 +0.024	-0.024	-0.033 +0.023 +0.013
0,2,-5	+0.488 -0.170 -0.463	+0.001 -0.309	+0.162	+0.325 -0.170 -0.154

<u>2.</u>				
0,3,-5	+0,053 -0.026 -0.023	-0,010	+0,012	+0,044 -0.026 -0.013
<u>11.</u>				
0,2,-2	+0.003 -0.003 0.000	-0.002	+0.002	+0.003 -0.003 0.000
0,3,-2	-0.056 +0.028 +0.029	+0.019	-0.019	-0.037 +0.028 +0.010
0,4,-2	-0.003 +0.003 0.000			
0,4,-3	-0.003 +0.003 0.000	+0.003	-0.003	-0.003 +0.003 0.000
0,2,-3	+0.118 -0.115 -0.034	-0.050 +0.004 -0.025	+0.064	+0.104 -0.119 -0.009
0,3,-3	-1.997 +1.048 +0.927	-0.034 +0.002 +0.618	-0.648	-1.315 +1.046 +0.309
0,4,-3	-1.528 +0.850 +0.650	-0.003 +0.422	-0.479	-1.046 +0.850 +0.228
0,5,-3	-0.256 +0.160 +0.079	+0.042	-0.064	-0.192 +0.160 +0.037
0,0,-4	-0.004 -0.004 +0.003		+0.004	
0,4,-4	-0.003 -0.193 +0.072	-0.030 -0.013 +0.034	+0.044	+0.016 -0.180 +0.041
0,2,-4	-5.762 +6.836 +0.575	+3.119 +0.142 +0.377	-3.483	-5.398 +6.694 +0.198
0,3,-4	+110.433 -52.622 -56.654	+1.658 +0.177 -37.806	+36.128	+72.647 -52.799 -18.848
0,4,-4	+67.966 -34.834 -34.355	+0.120 +0.060 -20.234	+21.120	+46.726 -34.894 -11.121
0,5,-4	+9.534 -5.534 -3.045	+0.006 +0.006 -1.634	+2.213	+7.342 -5.540 -1.414
0,6,-4	+1.040 -0.639 -0.248	-0.116	+0.185	+0.825 -0.639 -0.132

<u>14.</u>				
0,7,-4	+0.083 -0.056 -0.016		+0.012	
0,1,-5	+0.002 -0.021 +0.006	-0.004	+0.004	+0.002 -0.021 +0.006
0,2,-5	-0.574 +0.702 +0.054	+0.328 +0.017 +0.036	-0.357	-0.545 +0.685 +0.018
0,3,-5	+11.711 -5.609 -5.940	+0.216 +0.025 -3.967	+3.812	+7.683 -5.634 -1.973
0,4,-5	+8.832 -4.569 -4.070	+0.018 +0.007 -2.645	+2.780	+6.034 -4.576 -1.425
0,5,-5	+1.326 -0.784 -0.422		+0.316	+1.010 -0.784 -0.195
0,6,-5	+0.137 -0.091 -0.034	-0.015	+0.023	+0.114 -0.091 -0.019
0,2,-6	-0.040 +0.046 +0.006	+0.019 +0.004	-0.024	-0.035 +0.046 +0.002
0,3,-6	+0.764 -0.369 -0.385	+0.015 -0.258	+0.246	+0.503 -0.369 -0.127
0,4,-6	+0.688 -0.359 -0.317	-0.205	+0.216	+0.472 -0.359 -0.112
0,5,-6	+0.103 -0.061 -0.034	-0.016	+0.021	+0.082 -0.061 -0.018
0,3,-7	+0.037 -0.019 -0.019	-0.013	+0.012	+0.025 -0.019 -0.006
0,4,-7	+0.035 -0.018 -0.017	-0.012	+0.012	+0.023 -0.018 -0.005
<u>15.</u>				
0,4,-5	-0.048 +0.037 +0.016	+0.010	-0.016	-0.032 +0.037 +0.006
0,5,-5	-0.068 +0.047 +0.022	+0.014	-0.020	-0.048 +0.047 +0.008
0,3,-6	-0.059 +0.117 -0.005	+0.038 -0.004	-0.039	-0.058 +0.117 -0.004

15.				
0,4,-6	+1,907 -1.156 -0.686	+0,044 +0.002 -0.460	+0,616	+1,247 -1.158 -0.226
0,5,-6	+2.377 -1.518 -0.821	+0.013 +0.002 -0.534	+0.754	+1.610 -1.520 -0.287
0,6,-6	+0.952 -0.634 -0.298	-0.186	+0.275	+0.677 -0.634 -0.112
0,7,-6	+0.170 -0.122 -0.043	-0.024	+0.040	+0.130 -0.122 -0.019
0,3,-7	-0.009 +0.044 0.000	+0.003	-0.006	-0.006 +0.044 0.000
0,4,-7	+0.288 -0.178 -0.404	+0.005 -0.068	+0.093	+0.200 -0.178 -0.036
0,5,-7	+0.447 -0.271 -0.144	+0.004 -0.094	+0.134	+0.284 -0.271 -0.050
0,6,-7	+0.185 -0.124 -0.058	-0.036	+0.053	+0.132 -0.124 -0.022

76.

Es sind jetzt, um  $T$  zu erhalten, nur noch zufolge der ersten Gleichung (17) die Producte

$$\bar{G}\nu; \bar{U} \left\{ (1+\nu)^2 \frac{h^2}{h_0^2} - 1 \right\}; \bar{\Sigma}(2\nu + \nu^2)$$

zu berechnen, deren Factoren im Vorhergehenden enthalten sind. Diese Producte befinden sich in der folgenden Tafel, welcher ich  $\bar{T}$  hinzugefügt habe, um alle Glieder, aus welchen jetzt  $T$  besteht, neben einander zu haben.

$\gamma, g, g'$	$\bar{T}$ sin	$\bar{G}\nu$ sin	(U) sin	( $\Sigma$ ) sin	T sin
1. -1,1,0	+1152,442	-18,858	-1,046		+1132,538
0,1,0	-216.412	+1.479	-36.539	-18,923	-270.395
-1,2,0	+91.148	+0.537	+18.133		+109.818
1,0,0	+156.72478	+16.81227	+18.35442		+191.89147

\*) Hier ist  $(U) = \bar{U} \left\{ (1+\nu)^2 \frac{h^2}{h_0^2} - 1 \right\}; (\Sigma) = \bar{\Sigma}(2\nu + \nu^2)$

1.					
0,2,0	-16.164 +9.404 +3.698	-0.047 +0.034 +0.932	-2.494 +1.495 +0.486	-1.382	-20.084 +10.930 +5.116
0,3,0	-1.346 +0.879 +0.249	-0.003 0.000 +0.042	-0.205 +0.134 +0.039	-0.086	-1.640 +1.040 +0.330
0,4,0	-0.108 +0.076 +0.017		-0.043 +0.009 +0.003	-0.004	-0.425 +0.085 +0.020
0,-3,-1	+0.044 -0.040 -0.028		+0.009 -0.004 -0.005	+0.002	+0.055 -0.044 -0.033
0,-2,-1	+0.429 -0.104 -0.228	+0.044 -0.040 -0.007	+0.097 -0.024 -0.055	+0.048	+0.585 -0.168 -0.290
0,-1,-1	+6.368 -4.38028 -2.446	-0.054 -0.46406 -0.137	+1.161 -0.60518 -0.554	+0.629	+8.107 -5.44952 -3.107
0,0,-1	+0.45765 +30.47233 -27.30352	-0.05060 -0.83144 +0.68938	+0.24316 -0.17679 -0.08035	+0.11593	+0.76644 +29.46440 -26.69449
0,1,-1	-9.348 +4.612 +6.06734	+0.064 -0.107 +1.07765	-2.060 +1.047 +1.04206	-1.071	-12.385 +5.552 +8.15705
0,2,-1	-1.034 +0.630 +0.274	+0.009 -0.005 +0.037	-0.124 +0.076 +0.043	-0.070	-1.216 +0.704 +0.324
0,3,-1	-0.096 +0.068 +0.049		-0.007 +0.005 +0.003	-0.006	-0.409 +0.073 +0.022
0,-2,-2	+0.009 -0.004 -0.006		+0.004 -0.004 -0.004		+0.040 -0.002 -0.007
0,-1,-2	+0.189 -0.1278 -0.069	-0.003 -0.0447 -0.005	+0.037 -0.0490 -0.017	+0.049	+0.242 -0.1645 -0.094
0,0,-2	+0.0387 +0.7722 -0.6789	-0.0044 -0.0342 +0.0235	+0.0483 -0.0444 -0.0078	+0.0079	+0.0635 +0.7269 -0.6632
0,1,-2	-0.278 +0.148 +0.1755	+0.004 -0.004 +0.0327	-0.064 +0.034 +0.0302	-0.035	-0.373 +0.178 +0.2384
0,2,-2	-0.032 +0.021 +0.040	+0.003	-0.002 +0.004 -0.004	-0.004	-0.038 +0.022 +0.042
0,-1,-3	+0.007 -0.004 -0.002				+0.007 -0.004 -0.002



BERECHNUNG DER IN DEN MONDTAFELN ANGEWANDTEN STÖRUNGEN. 289

<u>1.</u>					
0,0,-3	+0,003 +0.017 -0.019	-0,002 +0.001	+0,004	+0,002	+0,006 +0.015 -0.018
0,1,-3	-0.006 +0.002 +0.004	+0.002	-0.001	-0.002	-0.009 +0.002 +0.006
<u>2.</u>					
0,-1,0	0.000 +0.00009 0.000	-0.00004	-0.00003		+0.00005
0,0,0	+0.000634 -0.00488 +0.00074	-0.000270 +0.00003 -0.00038	+0.000623 -0.00069 +0.00001	+0.000503	+0.004490 -0.00254 +0.00037
0,1,0	-0.024 +0.0073 +0.01396	0.000 +0.0012 +0.00335	-0.011 +0.0028 +0.00419	-0.003	-0.038 +0.0113 +0.02150
0,2,0	-0.024 +0.008 +0.020	-0.001	+0.002 -0.001 -0.003	+0.003	-0.019 +0.006 +0.017
0,3,0	0.000 -0.003 +0.002				0.000 -0.003 +0.002
0,-1,-1	-0.008 +0.00088 +0.007	+0.003 +0.00068	-0.005 +0.00186 +0.004	-0.003	-0.013 +0.00342 +0.011
0,0,-1	+0.03404 +0.00405 +0.10810	-0.04847 +0.01273 -0.02109	+0.05195 -0.05546 -0.00906	+0.04578	+0.08327 -0.03868 +0.07795
0,1,-1	+1.408 -1.676 -2.31924	+0.030 -0.089 +0.58714	-0.962 +0.486 +0.48564	-0.511	-0.035 -1.279 -1.21646
0,2,-1	-60.929 +23.000 +52.711	+0.036 -0.056 -0.336	+0.465 -0.226 -0.243	+0.392	-60.036 +22.718 +52.132
0,3,-1	-7.608 +3.784 +3.175	+0.002 -0.002 -0.340	+0.730 -0.369 -0.353	+0.355	-6.524 +3.410 +2.482
0,4,-1	-0.728 +0.424 +0.205	-0.019	+0.088 -0.048 -0.028	+0.028	-0.612 +0.376 +0.158
0,5,-1	-0.062 +0.040 +0.013		+0.007 -0.004 -0.002		-0.055 +0.036 +0.011
0,-2,-2	-0.013 +0.002 +0.015		-0.006 +0.004 +0.004	-0.002	-0.021 +0.003 +0.019
0,-1,-2	-0.027 +0.1808 +0.069	-0.027 +0.0185 +0.015	-0.062 +0.0016 +0.052	-0.037	-0.153 +0.2009 +0.136

2. 0,0,-2	-1,5059 -14.8068 -3.4649	-0,2695 +0.4494 +0.3272	-0,8552 +0.2798 +0.6114	-0,6023	-3,2329 -14.0776 -2.5263
0,1,-2	-434.396 +300.571 +494.8994	-2.249 -5.469 +3.2534	+2.601 -1.701 -1.0922	+4.098	-429.916 +293.401 +497.0603
0,2,-2	+5213.220 -1714.138 -5237.630	+0.484 -4.399 +26.453	-12.674 +6.313 +6.426	-22.557	+5178.476 -1712.224 -3204.751
0,3,-2	+427.338 -187.976 -194.162	+0.368 -0.342 -0.390	+2.296 -1.200 -1.269	-0.264	+429.738 -189.488 -192.824
0,4,-2	+30.949 -15.945 -9.072	+0.025 -0.049 -0.060	+0.444 -0.248 -0.153	+0.050	+34.465 -16.242 -9.285
0,5,-2	+2.187 -1.244 -0.490	+0.004 -0.004	+0.048 -0.032 -0.014	+0.007	+2.243 -1.276 -0.508
0,6,-2	+0.156 -0.096 -0.030		+0.008 -0.006 -0.004		+0.164 -0.102 -0.034
0,-1,-3	-0.007 +0.012 +0.009	-0.002	-0.007 +0.004	-0.004	-0.047 +0.042 +0.013
0,0,-3	-0.158 -0.810 -0.198	+0.007 +0.029 +0.038	-0.122 +0.061 +0.072	-0.080	-0.353 -0.720 -0.088
0,1,-3	-24.442 +17.837 +28.312	-0.127 -0.367 -0.066	+0.724 -0.379 -0.345	+0.510	-23.338 +17.094 +27.904
0,2,-3	+323.093 -108.648 -316.096	-0.004 -0.427 +1.482	-0.145 +0.060 +0.094	-1.102	+324.845 -109.045 -314.523
0,3,-3	+29.903 -13.564 -13.244	+0.032 -0.033 +0.400	-0.554 +0.260 +0.290	-0.434	+28.950 -13.337 -12.554
0,4,-3	+2.384 -1.273 -0.692	+0.004 +0.019	-0.053 +0.027 +0.018	-0.028	+2.304 -1.246 -0.655
0,5,-3	+0.184 -0.109 -0.044		-0.006 +0.004 +0.004		+0.178 -0.105 -0.040
0,0,-4	-0.005 -0.030 -0.006	+0.004 +0.004 +0.002	-0.004 +0.003 +0.004	-0.002	-0.040 -0.026 -0.003
0,1,-4	-0.964 +0.734 +1.435	-0.005 -0.047 -0.044	+0.043 -0.023 -0.022	+0.033	-0.890 +0.694 +1.402

BERECHNUNG DER IN DEN MONDTAFELN ANGEWANDTEN STÖRUNGEN. 291

<u>2.</u>					
0,2,-4	+13'684 -4.672 -13.427	-0'025 +0.064	+0'019 -0.010 -0.009	-0'038	+13'665 -4.707 -13.075
0,3,-4	+1.393 -0.647 -0.613	+0.002 +0.032	-0.050 +0.023 +0.025	-0.033	+1.312 -0.624 -0.556
0,4,-4	+0.120 -0.065 -0.035		-0.008 +0.005 +0.002	-0.002	+0.110 -0.060 -0.033
0,1,-5	-0.033 +0.023 +0.037		+0.002 -0.001 -0.001		-0.031 +0.022 +0.036
0,2,-5	+0.488 -0.170 -0.463	+0.002		-0.002	+0.486 -0.170 -0.461
0,3,-5	+0.053 -0.026 -0.023		-0.002 +0.001 +0.001		+0.051 -0.025 -0.022
<u>11.</u>					
0,2,-2	+0.003 -0.003 0.000		-0.003 +0.002 +0.001	-0.002	-0.002 -0.001 +0.001
0,3,-2	-0.056 +0.028 +0.029	-0.009	+0.018 -0.009 -0.010	-0.009	-0.029 +0.019 +0.010
0,4,-2	-0.003 +0.003 0.000				-0.003 +0.003 0.000
0,1,-3	-0.003 +0.003 0.000		-0.003 +0.003 +0.001		-0.006 +0.006 +0.001
0,2,-3	+0.118 -0.115 -0.034	+0.025 -0.001 +0.009	-0.055 +0.043 +0.017	-0.031	+0.057 -0.073 -0.008
0,3,-3	-1.997 +1.048 +0.927	+0.022 -0.001 -0.278	+0.481 -0.247 -0.222	+0.290	-1.204 +0.800 +0.427
0,4,-3	-1.528 +0.850 +0.650	+0.001 -0.285	+1.002 -0.544 -0.450	+0.320	-0.205 +0.306 -0.085
0,5,-3	-0.256 +0.160 +0.079	-0.028	+0.164 -0.100 -0.051	+0.044	-0.051 +0.060 0.000
0,0,-4	-0.001 -0.001 +0.003	+0.003	+0.005 -0.005 -0.002	-0.001	+0.006 -0.006 +0.001
0,1,-4	-0.003 -0.193 +0.072	+0.086 +0.009 -0.024	-0.199 +0.185 +0.073	-0.070	-0.186 +0.001 +0.121

11.					
0,2,-4	-5.762 +6.836 +0.575	-1.384 -0.087 -1.054	+4.294 -2.675 -1.959	+2.407	-0.442 +4.074 -2.435
0,3,-4	+140.433 -52.622 -56.654	-1.095 -0.130 +16.720	-24.423 +11.327 +12.537	-15.744	+69.174 -44.425 -27.397
0,4,-4	+67.966 -34.834 -34.355	-0.069 -0.047 +13.355	-43.627 +21.853 +21.337	-13.778	+40.492 -13.028 +3.337
0,5,-4	+9.534 -5.534 -3.045	-0.004 -0.005 +0.958	-5.865 +3.210 +2.044	-1.339	+2.326 -2.329 -0.046
0,6,-4	+1.040 -0.639 -0.248		-0.560 +0.328 +0.152	-0.400	+0.350 -0.344 -0.037
0,7,-4	+0.083 -0.056 -0.016		-0.048 +0.029 +0.044	-0.008	+0.027 -0.027 -0.003
0,1,-5	+0.002 -0.024 +0.006	+0.008 -0.004	-0.016 +0.046 +0.005	-0.005	-0.044 -0.005 +0.007
0,2,-5	-0.574 +0.702 +0.054	-0.440 -0.040 -0.405	+0.444 -0.262 -0.185	+0.244	-0.056 +0.430 -0.236
0,3,-5	+11.714 -5.609 -5.940	-0.443 -0.047 +1.695	-2.323 +1.060 +1.486	-1.591	+7.654 -4.566 -3.059
0,4,-5	+8.832 -4.569 -4.070	-0.044 -0.006 +1.747	-5.644 +2.860 +2.733	-1.817	+1.360 -1.745 +0.440
0,5,-5	+1.326 -0.784 -0.422		-0.808 +0.453 +0.277	-0.493	+0.325 -0.334 -0.040
0,6,-5	+0.437 -0.094 -0.034		-0.084 +0.049 +0.024	-0.044	+0.042 -0.042 -0.005
0,2,-6	-0.040 +0.046 +0.006	-0.010 -0.007	+0.024 -0.017 -0.044	+0.046	-0.040 +0.029 -0.042
0,3,-6	+0.764 -0.369 -0.385	-0.044 +0.405	-0.435 +0.060 +0.069	-0.099	+0.549 -0.309 -0.244
0,4,-6	+0.688 -0.359 -0.347		-0.438 +0.224 +0.244	-0.442	+0.408 -0.435 +0.029
0,5,-6	+0.403 -0.064 -0.034		-0.062 +0.035 +0.024	-0.045	+0.026 -0.026 -0.003

<u>14.</u>					
0,3,—7	+0,037 —0.049 —0.049	+0,006	—0,008 +0.003 +0.003	—0,006	+0,023 —0.046 —0.040
0,4,—7	+0.035 —0.048 —0.047	+0.008	—0.024 +0.043 +0.043	—0.008	+0.003 —0.005 +0.004
<u>15.</u>					
0,4,—5	—0.048 +0.037 +0.046	—0.006	+0.049 —0.043 —0.006	+0.008	—0.021 +0.024 +0.004
0,5,—5	—0.068 +0.047 +0.022	—0.010	+0.043 —0.034 —0.042	+0.046	—0.009 +0.046 0.000
0,3,—6	—0.059 +0.447 —0.005	—0.023 —0.004 —0.004	+0.072 —0.074 —0.040	+0.036	+0.026 +0.042 —0.049
0,4,—6	+1.907 —1.156 —0.686	—0.032 —0.003 +0.280	—0.679 +0.427 +0.226	—0.385	+0.844 —0.732 —0.480
0,5,—6	+2.377 —1.548 —0.824	—0.040 —0.004 +0.396	—1.505 +1.048 +0.445	—0.569	+0.293 —0.471 +0.020
0,6,—6	+0.954 —0.634 —0.298	+0.142	—0.584 +0.455 +0.144	—0.219	+0.149 —0.179 —0.042
0,7,—6	+0.170 —0.122 —0.043	+0.045	—0.409 +0.083 +0.049	—0.027	+0.034 —0.039 —0.009
0,3,—7	—0.009 +0.044 0.000	—0.002	+0.042 —0.044 —0.002	+0.005	+0.006 +0.003 —0.002
0,4,—7	+0.288 —0.178 —0.104	—0.003 +0.044	—0.098 +0.062 +0.033	—0.053	+0.134 —0.116 —0.030
0,5,—7	+0.447 —0.274 —0.144	—0.004 +0.069	—0.263 +0.185 +0.076	—0.098	+0.055 —0.086 +0.004
0,6,—7	+0.185 —0.124 —0.058	+0.026	—0.113 +0.090 +0.022	—0.044	+0.034 —0.034 —0.040

Wie oben werde ich auch hier von dem Coefficienten des Arguments 1,0,0 in 1., welcher die Bewegung des Perigäums giebt, die einzelnen Combinationen angeben.

in $\overline{G\nu}$			in $\overline{U} \left\{ (1+\nu) \frac{h^2}{h_0^2} - 1 \right\}$				
1.	1.	1,0,0 in 1.	1.	1.	1,0,0 in 1.		
0,0	1,0,0	-0,87254	0,0	1,0,0	-0,07605		
1,0	1,1,0	+	40	1,1,0	+	458	
-1,-1	1,-1,-1	-	247	1,-2,-1	-	1	
0,-1	1,0,-1	+	29	1,-1,-1	-	18	
1,-1	1,1,-1	-	2	1,0,-1	+	18	
1,0	-1,1,0	-	25857	1,1,-1	-	3	
2,0	-1,2,0	-	48	1,0	-1,1,0	-	944
0,-1	-1,0,-1	+	21	2,0	-1,2,0	-	238
1,-1	-1,1,-1	+	369	3,0	-1,3,0	-	2
2.	2.			-1,-1	-1,-1,-1	+	1
1,-1	1,1,-1	+	119	0,-1	-1,0,-1	+	12
2,-1	1,2,-1	+	7	1,-1	-1,1,-1	+	13
0,-2	1,0,-2	-	3782	2,-1	-1,2,-1	+	2
1,-2	1,1,-2	+	17.53924	2.	2.		
2,-2	1,2,-2	+	35049	1,-1	1,1,-1	+	109
3,-2	1,3,-2	+	65	2,-1	1,2,-1	+	18
0,-3	1,0,-3	-	10	-1,-2	1,-1,-2	+	2
1,-3	1,1,-3	+	4548	0,-2	1,0,-2	+	3833
2,-3	1,2,-3	+	177	1,-2	1,1,-2	+	14.79114
1,-4	1,1,-4	+	6	2,-2	1,2,-2	+	1.13083
2,-1	-1,2,-1	-	1	3,-2	1,3,-2	+	262
0,-2	-1,0,-2	+	1	0,-3	1,0,-3	+	3
1,-2	-1,1,-2	-	738	1,-3	1,1,-3	+	3499
2,-2	-1,2,-2	+	4540	2,-3	1,2,-3	+	517
3,-2	-1,3,-2	+	113	3,-3	1,3,-3	+	1
1,-3	-1,1,-3	-	2	1,-4	1,1,-4	+	5
2,-3	-1,2,-3	+	23	2,-4	1,2,-4	+	1
3,-3	-1,3,-3	+	1	2,-1	-1,2,-1	+	24
11.	11.			3,-1	-1,3,-1	-	15
2,-4	1,2,-4	+	107	0,-2	-1,0,-2	-	2
3,-4	1,3,-4	+	88	1,-2	-1,1,-2	-	41308
4,-4	1,4,-4	+	2	2,-2	-1,2,-2	+	3.40780
2,-5	1,2,-5	+	1	3,-2	-1,3,-2	-	86724
3,-5	1,3,-5	+	1	4,-2	-1,4,-2	-	449
		+	16,81227	5,-2	-1,5,-2	-	2
				1,-3	-1,1,-3	-	24
				2,-3	-1,2,-3	+	1374
				3,-3	-1,3,-3	-	391
				4,-3	-1,4,-3	-	2
				2,-4	-1,2,-4	+	3
				3,-4	-1,3,-4	-	1
				11.	11.		
				2,-4	1,2,-4	+	88
				3,-4	1,3,-4	+	71
				4,-4	1,4,-4	-	4
				3,-5	1,3,-5	+	1
				2,-4	-1,2,-4	-	1
				3,-4	-1,3,-4	+	43
				4,-4	-1,4,-4	+	138
				5,-4	-1,5,-4	+	4
				4,-5	-1,4,-5	+	2
						+	18,35442

wie in der vorstehenden Tafel angegeben ist.

77.

Es ist schon bemerkt worden, dass in den vorstehenden Zahlenwerthen, mit Ausnahme der Glieder, die von  $\delta P$  und  $\delta Q$  herrühren, nur die Abtheilungen 1, 2, 11, 15 berücksichtigt worden sind, da die übrigen Abtheilungen nur wenig oder nichts hinzufügen. Es sind im Vorhergehenden die Daten enthalten, durch welche Jeder sich überzeugen kann, dass dieses in der That der Fall ist. Nur Eine Ausnahme wurde angemerkt, und diese betrifft den Coefficienten des Arguments 1,0,0 der Abtheilung 1, welcher die Bewegung des Perigäums giebt. Da in diesem die letzte der hier angegebenen Decimalen noch merklichen Werth giebt,\*) so müssen die genannten, übrigens zu übergehenden, Glieder, wenn man untersuchen will wie nahe der berechnete Werth der Bewegung des Perigäums mit dem beobachteten übereinstimmt, mit zugezogen werden.

Berücksichtigen wir zuerst nur das Quadrat der störenden Kraft, so reduciren sich die Ausdrücke (17) auf die folgenden.

$$T^{(1)} = T_0^{(1)} + \left(\frac{dT_0^{(1)}}{dg}\right) n\delta z + \{2T_0^{(1)} - G_0^{(1)}\} \nu - 2\{T_0^{(1)} - G_0^{(1)}\} \delta \frac{h_0}{h}$$

$$T^{(2)} = T_0^{(2)} + \left(\frac{dT_0^{(2)}}{dg}\right) n\delta z + \{3T_0^{(2)} - G_0^{(2)}\} \nu - 2\{T_0^{(2)} - G_0^{(2)}\} \delta \frac{h_0}{h}$$

und aus den in den vorhergehenden Tafeln enthaltenen numerischen Werthen findet man leicht,

$$\begin{aligned} \left(\frac{dT_0^{(1)}}{dg}\right) &= -0''059 \cos(-1,1,0, \text{ in } 3.); & 2T_0^{(1)} - G_0^{(1)} &= +2''724 \sin(1,0,0, \text{ in } 3.) \\ &-21.209 \cos(1,1,0, \text{ » }) & &-0.112 \sin(-1,1,0, \text{ » }) \\ &+2,324 \cos(-1,2,0, \text{ » }) & &-28.264 \sin(1,1,0, \text{ » }) \\ &-1,552 \cos(1,2,0, \text{ » }) & &+2.324 \sin(-1,2,0, \text{ » }) \\ &+7.069 \cos(-1,1,2, \text{ in } 4.) & &-1.164 \sin(1,2,0, \text{ » }) \\ &+7.069 \cos(1,-1,2, \text{ » }) & &+7.069 \sin(-1,1,2, \text{ in } 4.) \\ & & &-0.583 \sin(-1,0,2, \text{ » }) \\ & & &+0.583 \sin(1,0,2, \text{ » }) \\ & & &-7.069 \sin(1,-1,2, \text{ » }) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{dT_0^{(2)}}{dg}\right) &= -0''204 \cos(-1,1,-1, \text{ in } 6.); & 3T_0^{(2)} - G_0^{(2)} &= -0''264 \sin(-1,1,-1, \text{ in } 6.) \\ &+0.262 \cos(1,1,-1, \text{ » }) & &+0.553 \sin(1,1,-1, \text{ » }) \end{aligned}$$

\*) Man wird weiter unten sehen, dass die Zahlenwerthe des genannten Coefficienten nahe 767,7 Mal vergrößert in die jährliche Bewegung des Perigäums übergehen.

$$\begin{aligned}
 -2\{T_0^{(4)} - G_0^{(4)}\} &= -1,558 \sin(1,0,0, \text{ in } 3.) \\
 &+ 14,110 \sin(1,1,0, \text{ » } ) \\
 &- 2,324 \sin(-1,2,0, \text{ » } )
 \end{aligned}$$

Hiemit und mit den oben gegebenen numerischen Werthen von  $n\delta z$ ,  $\nu$ ,  $\delta \frac{h_0}{h}$  erhält man nach der Ausführung der Multiplicationen,

$\left(\frac{dT_0^{(4)}}{dg}\right) n\delta z + \left(\frac{dT_0^{(3)}}{dg}\right) n\delta z$			$\{2T_0^{(4)} - G_0^{(4)}\}\nu + \{3T_0^{(3)} - G_0^{(3)}\}\nu$		
3.	3.	1,0,0, in 4.	3.	3.	1,0,0, in 4.
1,0	-1,1,0	+0,00004	0,0	1,0,0	+0,00004
1,0	1,1,0	- 436	1,0	-1,1,0	+ 1
2,0	-1,2,0	+ 2	1,0	1,1,0	- 288
2,0	1,2,0	+ 2	2,0	-1,2,0	+ 2
4.	4.		2,0	1,2,0	+ 1
-1,2	1,-1,2	- 19	4.	4.	
1,2	-1,1,2	- 8	-1,2	1,-1,2	- 8
6.	6.		0,2	-1,0,2	+ 1
1,-1	-1,1,-1	+ 6	0,2	1,0,2	+ 1
1,-1	1,1,-1	+ 9	1,2	-1,1,2	- 4
		-0,00443	6.	6.	
			1,-1	-1,1,-1	+ 4
			1,-1	1,1,-1	+ 9
					-0,00280

$-2\{T_0^{(4)} - G_0^{(4)}\} \delta \frac{h_0}{h}$		
3.	3.	1,0,0, in 4.
0,0	1,0,0	-0,00004
1,0	1,1,0	- 11
2,0	-1,2,0	+ 2
		-0,00010

Der Werth, den hier die Combination 1,0 und 1,1,0 in 3. gegeben hat, lässt vermuthen, dass der Cubus der störenden Kraft nicht ganz unmerklich sein wird. Die betreffenden Glieder erhält man aus den Ausdrücken (17) wie folgt,

$$T^{(4)} = \frac{1}{2} \left(\frac{d^2 T_0^{(4)}}{dg^2}\right) (n\delta z)^2 + \frac{d(3T_0^{(4)} - G_0^{(4)})}{dg} \nu \cdot n\delta z + (T_0^{(4)} - G_0^{(4)}) \left\{ \nu^2 + 3\left(\delta \frac{h_0}{h}\right)^2 \right\}$$

und das Vorhergehende giebt die folgenden Zahlenwerthe,

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{d^2 T_0^{(4)}}{dg^2}\right) &= + 21,21 \sin(1,1,0, \text{ in } 3.); & \frac{1}{2}(n\delta z)^2 &= + 0,87 \cos(1,0, \text{ in } 3.) \\
 \frac{d(3T_0^{(4)} - G_0^{(4)})}{dg} &= - 28,26 \cos(1,1,0, \text{ » } ); & \nu \cdot n\delta z &= + 0,82 \sin(1,0, \text{ » } ) \\
 T_0^{(4)} - G_0^{(4)} &= - 7,06 \sin(1,1,0, \text{ » } ); & \nu^2 + 3\left(\delta \frac{h_0}{h}\right)^2 &= - 0,57 \cos(1,0, \text{ » } )
 \end{aligned}$$



Die Multiplication giebt hiemit für

$$\begin{array}{r} 1,0,0, \text{ in } 1. \\ \hline +0,00005 \\ +0,00006 \\ +0,00001 \\ \hline +0,00012 \end{array}$$

Addiren wir nun alle in diesem Art. berechneten Producte, so ergibt sich

$$T = -0,00721 \sin(1,0,0, \text{ in } 1.)$$

welche der Tafel des vor. Art. hinzuzufügen sind.

78.

Ausserdem ist noch der Beitrag zur Bewegung des Perigäums zu berücksichtigen, welcher aus  $T^{(s)}$  entsteht, und wobei auch das Quadrat der störenden Kraft in Betracht kommt. Es wird in Bezug hierauf ähnlicher Weise wie im vor. Art.

$$T^{(s)} = T_0^{(s)} + \left(\frac{dT_0^{(s)}}{dg}\right) n\delta z + \{4T_0^{(s)} - G_0^{(s)}\} \nu - 2\{T_0^{(s)} - G_0^{(s)}\} \delta \frac{h_0}{h}$$

und die numerischen Angaben der Artt. 58 und 64 geben für den gegenwärtigen Fall

$$\begin{array}{l} T_0^{(s)} = +0,00116 \sin(1,0,0, \text{ in } 1.) \\ \left(\frac{dT_0^{(s)}}{dg}\right) = -0,019 \cos(1,1,-2, \text{ in } 2.) \\ 4T_0^{(s)} - G_0^{(s)} = -0,062 \sin(1,1,-2, \text{ in } 2.) \\ -2\{T_0^{(s)} - G_0^{(s)}\} = +0,040 \sin(1,1,-2, \text{ in } 2.) \end{array}$$

Nach der Ausführung der Multiplicationen dieser Glieder mit den Evectionen, d. h. mit den mit  $\frac{\sin}{\cos}(1,-2, \text{ in } 2.)$  multiplicirten Gliedern von  $n\delta z$ ,  $\nu$ ,  $\delta \frac{h_0}{h}$  ergibt sich

$$\begin{array}{l} T_0^{(s)} = +0,00116 \sin(1,0,0, \text{ in } 1.) \\ \left(\frac{dT_0^{(s)}}{dg}\right) n\delta z = +0,00021 \text{ „ „ „} \\ \{4T_0^{(s)} - G_0^{(s)}\} \nu = +0,00034 \text{ „ „ „} \\ -2\{T_0^{(s)} - G_0^{(s)}\} \delta \frac{h_0}{h} = -0,00004 \text{ „ „ „} \\ \hline T^{(s)} = +0,00167 \sin(1,0,0, \text{ in } 1.) \end{array}$$

die ebenfalls dem in der Tafel des Art. 76 enthaltenen, numerischen Werthe des Coefficienten desselben Arguments hinzuzufügen sind.

Es sind ausserdem noch mehr Umstände vorhanden, die auf die Bewegung des Perigäums Einfluss haben, diese sind: Die Figur der Erde, die Figur des Mondes, die Anziehung der Planeten, und die im Art. 52 angegebenen Verbesserungen der der Rechnung zu Grunde gelegten Werthe der Excentricität und der Neigung der Mondbahn. Diese Umstände sollen weiter unten berücksichtigt werden.

## 79.

Ich habe noch anzuführen, dass im Vorhergehenden die Zahlenwerthe enthalten sind, aus welchen die Abtheilungen 1, 2, 11, 15, mit Ausnahme des constanten Gliedes, des Werthes von  $\delta \frac{h_0}{h}$  des Art. 69 im Voraus berechnet worden sind. Es sind diese die Summen der Columne für  $\bar{\Sigma}$  des Art. 75 und der für  $\bar{\Sigma}(2\nu + \nu^2)$  des Art. 76. Man sieht, dass der Werth von  $\delta \frac{h_0}{h}$  selbst dabei nicht gebraucht wird. Die ausserdem hiefür noch erforderlichen Werthe der Integrationsdivisoren werden weiter unten angegeben werden.

## 80.

Wir kommen jetzt zur Berechnung der Störungen von  $P$  und  $Q$  nach dem Ausdruck (20), indem wir darin  $B_0$  und  $C_0$  statt  $T_0$  substituieren. Hier können wir einige der Glieder höchster Ordnung übergehen, namentlich die in den Ausdrücken für  $L$ ,  $M$ ,  $O$ , für welche Grössen wir unmittelbar bez.  $S$ ,  $V$ ,  $Z$  in die Ausdrücke für  $H$  und  $N$  substituieren werden. Es ergab sich

für  $B$ 

$g, g'$	$R$ sin	$R_1$ sin	$R_2$ sin	$\frac{1}{4}S\delta P$ sin	$V\delta Q$ sin	$H$ sin
1.						
1,0		-19,99				-19,99
2,0		-1.46				-1.46
3,0		-0.40				-0.40
-2,-1		+0.06				+0.06
-1,-1		+0.75	-0,06			+0.69
0,-1		+0.17	-0.08	+0,04		+0.10
1,-1		-1.06	-0.07			-1.13
2,-1		-0.09	-0.02			-0.11

BERECHNUNG DER IN DEN MONDTAFELN ANGEWANDTEN STÖRUNGEN. 299

<u>1.</u>						
-1,-2		+0,03				+0,03
0,-2		+0.04				+0.04
1,-2		-0.05				-0.05
<u>2.</u>						
0,-1	-0,06	+0.04	-0,04			-0.03
1,-1	+1.22	-0.24	-0.03			+0.95
2,-1	-7.38	-2.81	-0.02			-10.24
3,-1	-0.40	-0.54				-0.94
4,-1	-0.02	-0.04				-0.06
-1,-2	-0.04	+0.04	-0.03			-0.06
0,-2	+6.67	+0.17	-0.22			+6.62
1,-2	-145.46	+0.12	-0.37			-145.69
2,-2	+877.98	+0.18	-0.58	+0,01	+0,02	+877.42
3,-2	+48.22	-0.05	-0.26		-0.17	+47.94
4,-2	+2.65	-0.02	-0.03			+2.60
5,-2	+0.15					+0.15
0,-3	+0.39	-0.02	-0.02			+0.35
1,-3	-8.55	+0.10	-0.04			-8.49
2,-3	+54.64	+2.81	-0.05			+54.37
3,-3	+2.83	+0.71	-0.03			+3.54
4,-3	+0.16	+0.06				+0.22
1,-4	-0.35					-0.35
2,-4	+2.10	+0.20				+2.30
3,-4	+0.12	+0.04				+0.16
2,-5	+0.07					+0.07
<u>11.</u>						
2,-3		+0.04	-0.04			+0.03
3,-3		-0.27	-0.07			-0.34
4,-3		-0.20	-0.04			-0.24
1,-4		+0.02				+0.02
2,-4		-1.75				-1.75
3,-4		+18.24				+18.24
4,-4		+10.68		-0.04		+10.67
5,-4		+1.12				+1.12
6,-4		+0.08				+0.08
2,-5		-0.17				-0.17
3,-5		+1.86	+0.06			+1.92
4,-5		+1.36	+0.05			+1.44
5,-5		+0.14				+0.14
3,-6		+0.13				+0.13
4,-6		+0.09				+0.09
<u>15.</u>						
4,-6		+0.12	+0.20			+0.32
5,-6		+0.16	+0.22			+0.38
6,-6		+0.06	+0.08			+0.14

<u>3.</u>						
2,2	+0.55	-0.40				+0.45
0,4	+0.17	+0.07				+0.24
1,4	-3.62	-0.23				-3.85
2,4	+24.83	-2.82	-0.04			+18.97
3,4	+1.20	-0.55				+0.65
0,0	+6.58	+0.54				+7.42
1,0	-143.59	+0.32	-0.18	-0.04	-0.02	-143.51
2,0	+866.64	-0.87	-0.53	+0.22	+0.12	+865.58
3,0	+47.60	-0.34	-0.26	+0.04	+0.04	+47.05
4,0	+2.64	-0.02	-0.02			+2.57
0,-1	+0.17					+0.17
1,-1	-3.62	+0.10				-3.52
2,-1	+24.83	+2.74	-0.04			+24.53
3,-1	+1.20	+0.68				+1.88
2,-2	+0.55	+0.40				+0.65
<u>4.</u>						
0,4	+2.11	-0.03				+2.08
-1,3	-2.83	-0.05				-2.88
0,3	+54.74	-0.77	+0.04			+50.98
1,3	-2.83	-1.30	+0.06			-4.07
-2,2	-0.66	+0.02				-0.64
-1,2	-48.07	+0.13		-0.04		-47.95
0,2	+879.74	-7.45		+0.15		+872.44
1,2	-48.07	-19.55				-67.62
2,2	-0.66	-1.43				-2.09
-1,1	+0.40	+0.09				+0.49
0,1	-7.39	-0.10	-0.04			-7.53
1,1	+0.40	-0.46	-0.07			-0.13
<u>5.</u>						
1,2	-0.87	+0.07			+0.04	-0.76
2,2	+5.28	-0.33		-0.02	-0.18	+4.75
3,2	+0.29	-0.05			-0.04	+0.23
<u>12.</u>						
3,-1		+0.35	-0.07			+0.28
4,-1		+0.46	-0.04			+0.42
2,-2		-1.67				-1.67
3,-2		+17.70				+17.70
4,-2		+10.54				+10.54
5,-2		+1.44				+1.44
6,-2		+0.08				+0.08
2,-3		-0.44				-0.44
3,-3		+1.24	+0.06			+1.27
4,-3		+0.99	+0.05			+1.04
5,-3		+0.40				+0.40
3,-4		+0.06				+0.06
4,-4		+0.05				+0.05

BERECHNUNG DER IN DEN MONDTAFELN ANGEWANDTEN STÖRUNGEN. 301

<u>13.</u>						
0,-4		-0,39	-0,23			-0,62
1,-4		-0.12	-0.19	+0,02		-0.29
2,-4		+0.90	-0.05	-0.14		+0.71
3,-4		+0.25				+0.25
<hr/>						
0,-5		-0.04	-0.02			-0.06
1,-5		-0.02	-0.02			-0.04
2,-5		+0.09				+0.09
3,-5		+0.03				+0.03
<hr/>						
<u>18.</u>						
2,0		+0.05				+0.05
3,0		-0.24				-0.24
4,0		+0.05				+0.05
<hr/>						
<u>19.</u>						
0,4		-0.05		-0.02	-0,19	-0.26
1,4		-0.10			+0.01	-0.09
2,4		-0.04				-0.04
<hr/>						
<u>6.</u>						
0,-1	-0,07	-0.04				-0.11
1,-1	+0.56	+0.49				+1.05
2,-1	-0.02	+0.04				-0.04
1,-2	+0.03	-0.05				-0.02
<hr/>						
<u>7.</u>						
3,-2	0.00	+0.08				+0.08
2,-3	-0.67	-0.04				-0.68
3,-3	+2.68	-0.52				+2.16
4,-3	+0.22	-0.04				+0.18
<hr/>						
<u>14.</u>						
4,-5		+0.09				+0.09
5,-5		+0.09				+0.09
<hr/>						
<u>8.</u>						
0,1	-0.44	-0.09				-0.53
1,1	+3.24	+0.47				+3.68
2,1	-0.09	+0.02				-0.07
<hr/>						
<u>9.</u>						
2,-1	-0.66	+0.03				-0.63
3,-1	+2.62	-0.49				+2.13
4,-1	+0.22	-0.04				+0.18
<hr/>						
<u>10.</u>						
0,-3	+0.37	+0.05				+0.42
1,-3	-2.70	+0.02				-2.68
2,-3	+0.07	-0.04				+0.06

Ferner für *B*

<i>g, g'</i>	<i>Y</i> cos	<i>Y</i> <sub>1</sub> cos	<i>Y</i> <sub>2</sub> cos	$\frac{1}{2}Z\delta Q$ cos	<i>N</i> cos
<b>1.</b>					
0,0	+870,02	-7,45		+0,20	+862,77
1,0	-95.07	-19.42		-0.04	-114.50
2,0	-1.30	-1.50		+0.02	-2.78
3,0	-0.04	-0.10			-0.14
-2,-1	-0.03	-0.04			-0.07
-1,-1	-2.39	-0.56	+0,06		-2.89
0,-1	+13.82	-0.85		+0.02	+42.99
1,-1	-2.39	-1.16	-0.07		-3.62
2,-1	-0.03	-0.11	-0.02		-0.16
-1,-2	-0.06	-0.03			-0.09
0,-2	+1.10	-0.06			+1.04
1,-2	-0.06	-0.05			-0.11
<b>2.</b>					
0,-1	-0.06	+0.07	+0.01		+0.02
1,-1	+1.20	-0.23			+0.97
2,-1	-7.26	-2.79	+0.02		-10.07
3,-1	-0.40	-0.55			-0.95
4,-1	-0.02	-0.04			-0.06
-1,-2	-0.04	+0.01	+0.03		0.00
0,-2	+6.56	+0.94	-0.17		+7.33
1,-2	-143.13	+0.36	+0.01	-0.05	-142.81
2,-2	+863.92	-1.58	-0.48	+0.24	+862.10
3,-2	+47.44	-0.54	-0.26	+0.01	+46.65
4,-2	+2.60	-0.05	-0.02		+2.53
5,-2	+0.15				+0.15
0,-3	+0.39	+0.09	+0.02		+0.50
1,-3	-8.41	+0.11	+0.01		-8.29
2,-3	+50.78	+2.64	-0.03		+53.39
3,-3	+2.79	+0.65	-0.01		+3.43
4,-3	+0.15	+0.06			+0.21
1,-4	-0.34	+0.01			-0.33
2,-4	+2.07	+0.19			+2.26
3,-4	+0.11	+0.04			+0.15
2,-5	+0.07				+0.07
<b>4.</b>					
2,-3		+0.04	-0.04		+0.03
3,-3		-0.27	-0.07		-0.34
4,-3		-0.20	-0.04		-0.24
1,-4		+0.01			+0.01
2,-4		-1.72			-1.72
3,-4		+17.95			+17.95
4,-4		+10.50		+0.01	+10.51
5,-4		+1.10			+1.10
6,-4		+0.08			+0.08

<u>11.</u>					
2,-5		-0,47			-0,47
3,-5		+1.83	+0,06		+1.89
4,-5		+1.34	+0.05		+1.39
5,-5		+0.14			+0.14
3,-6		+0.12			+0.12
4,-6		+0.09			+0.09
<u>15.</u>					
4,-6		+0.11	+0.19		+0.30
5,-6		+0.16	+0.22		+0.38
6,-6		+0.06	+0.08		+0.14
<u>3.</u>					
2,2	-0,55	+0.10			-0.45
0,1	-0.16	-0.07			-0.23
1,1	+3.59	+0.22			+3.81
2,1	-21.65	+2.77	+0.03		-18.85
3,1	-1.19	+0.55			-0.64
0,0	-6.53	-0.55		-0,02	-7.10
1,0	+142.42	-0.17	+0.17	+0.05	+142.47
2,0	-859.60	+0.19	+0.52	-0.23	-859.12
3,0	-47.21	+0.21	+0.26	-0.04	-46.75
4,0	-2.59	+0.02	+0.02		-2.55
0,-1	-0.16				-0.16
1,-1	+3.59	-0.10			+3.49
2,-1	-21.65	-2.71	+0.03		-24.33
3,-1	-1.19	-0.67			-1.86
2,-2	-0.55	-0.10			-0.65
<u>4.</u>					
0,4	-2.08	+0.05			-2.03
-1,3	+2.79	+0.05			+2.84
0,3	-51.09	+0.76	-0.04	-0.03	-50.40
1,3	+2.79	+1.29	-0.06		+4.02
-2,2	+0.65	-0.02			+0.63
-1,2	+47.48	-0.15		+0.02	+47.35
0,2	-869.06	+7.39		-0.42	-862.09
1,2	+47.48	+19.41		+0.03	+66.92
2,2	+0.65	+1.41			+2.06
-1,1	-0.40	-0.09			-0.49
0,1	+7.30	+0.10	+0.04		+7.44
1,1	-0.40	+0.44	+0.06		+0.10
<u>5.</u>					
1,2	+0.87	-0.07		-0.04	+0.76
2,2	-5.27	+0.33		+0.21	-4.73
3,2	-0.29	+0.05		+0.01	-0.23
<u>12.</u>					
3,-1		-0.34	+0.06		-0.28
4,-1		-0.16	+0.04		-0.12

<u>12.</u>					
2,-2		+4.77			+4.77
3,-2		-18.24			-18.24
4,-2		-10.49		-0.02	-10.51
5,-2		-1.10			-1.10
6,-2		-0.08			-0.08
2,-3		+0.11			+0.11
3,-3		-1.24	-0.06		-1.30
4,-3		-0.98	-0.05		-1.03
5,-3		-0.09			-0.09
3,-4		-0.06			-0.06
4,-4		-0.05			-0.05
<u>13.</u>					
0,-4		-0.38	-0.22		-0.60
1,-4		-0.12	-0.19		-0.31
2,-4		+0.89	-0.04	-0.02	+0.83
3,-4		+0.24			+0.24
0,-5		-0.04	-0.02		-0.06
1,-5		-0.02	-0.02		-0.04
2,-5		+0.09			+0.09
3,-5		+0.03			+0.03
<u>18.</u>					
2,0		-0.05			-0.05
3,0		+0.24			+0.24
4,0		-0.05			-0.05
<u>19.</u>					
0,4		+0.05		+0.24	+0.26
1,4		+0.11		+0.04	+0.12
2,4		+0.04			+0.04
<u>6.</u>					
0,-1	-0.80	-0.13			-0.93
1,-1	+5.83	+0.45			+6.28
2,-1	-0.16	+0.04			-0.12
1,-2	+0.29	-0.03			+0.26
<u>7.</u>					
3,-2	-0.04	+0.06			+0.02
2,-3	-0.66	+0.06			-0.60
3,-3	+2.62	-0.48			+2.14
4,-3	+0.22	-0.04			+0.18
<u>14.</u>					
4,-5		+0.09			+0.09
5,-5		+0.05			+0.05
<u>8.</u>					
0,1	+0.43	+0.09			+0.52
1,1	-3.14	+0.55			-2.59
2,1	+0.09	-0.02			+0.07



BERECHNUNG DER IN DEN MONDTAFELN ANGEWANDTEN STÖRUNGEN. 305

9.					
2,-1	+0'65	-0'03			+0'62
3,-1	-2.59	+0.49			-2.10
4,-1	-0.22	+0.04			-0.18
10.					
0,-3	+0.36	+0.07			+0.43
1,-3	-2.65	+0.02			-2.63
2,-3	+0.07	-0.01			+0.06

Für C

$g, g'$	$R$ COS	$R_1$ COS	$R_2$ COS	$\frac{1}{2}S\delta P$ COS	$V\delta Q$ COS	$H$ COS
1.						
0,0	-880'70	+7'66		-0'17	-0'06	-873'27
1,0	+96.23	+18.98		+0.02		+115.23
2,0	+1.32	+1.42				+2.74
3,0	+0.04	+0.10				+0.14
-2,-1	+0.03	+0.04				+0.07
-1,-1	+2.42	+0.55	-0'06			+2.94
0,-1	-44.36	+0.88		-0.04		-43.49
1,-1	+2.42	+1.15	+0.07			+3.64
2,-1	+0.03	+0.11	+0.02			+0.16
-1,-2	+0.06	+0.03				+0.09
0,-2	-1.12	+0.06				-1.06
1,-2	+0.06	+0.05				+0.11
2.						
0,-1	+0.06	-0.04	-0.04			+0.04
1,-1	-1.22	+0.24				-0.98
2,-1	+7.38	+2.84	+0.02			+10.24
3,-1	+0.40	+0.57				+0.97
4,-1	+0.02	+0.04				+0.06
-1,-2	+0.04	-0.02	-0.03			-0.04
0,-2	-6.67	-0.92	-0.24			-7.83
1,-2	+145.46	-0.34	-0.04	-0.04	-0.02	+145.08
2,-2	-877.98	+0.89	+0.49	+0.10	+0.24	-876.29
3,-2	-48.22	+0.57	+0.26			-47.39
4,-2	-2.65	+0.05	+0.03			-2.57
5,-2	-0.15					-0.15
0,-3	-0.39	-0.04	-0.02			-0.45
1,-3	+8.55	-0.11	-0.04			+8.43
2,-3	-54.64	-2.78	+0.05			-54.34
3,-3	-2.83	-0.66	+0.03			-3.46
4,-3	-0.16	-0.06				-0.22
1,-4	+0.35					+0.35
2,-4	-2.10	-0.20				-2.30
3,-4	-0.12	-0.04				-0.16
2,-5	-0.07					-0.07

<u>11.</u>						
2,-3		-0.04	+0.04			-0.03
3,-3		+0.26	+0.07			+0.33
4,-3		+0.20	+0.04			+0.24
1,-4		-0.02				-0.02
2,-4		+1.74				+1.74
3,-4		-18.23				-18.23
4,-4		-10.67		+0.04		-10.66
5,-4		-1.12				-1.12
6,-4		-0.08				-0.08
2,-5		+0.17				+0.17
3,-5		-1.97	-0.06			-2.03
4,-5		-1.36	-0.05			-1.41
5,-5		-0.14				-0.14
3,-6		-0.13				-0.13
4,-6		-0.09				-0.09
<u>15.</u>						
4,-6		-0.12	-0.20			-0.32
5,-6		-0.16	-0.22			-0.38
6,-6		-0.06	-0.08			-0.14
<u>3.</u>						
2,2	-0.55	+0.10				-0.45
0,4	-0.17	-0.07				-0.24
1,4	+3.62	+0.22				+3.84
2,4	-21.83	+2.82	+0.04			-18.97
3,4	-1.20	+0.55				-0.65
0,0	-6.58	-0.53			+0.04	-7.10
1,0	+143.59	-0.33	+0.18	+0.04	+0.02	+143.50
2,0	-866.64	+0.86	+0.53	-0.21	-0.09	-865.55
3,0	-47.60	+0.31	+0.26	-0.04	-0.04	-47.05
4,0	-2.61	+0.02	+0.02			-2.57
0,-1	-0.17					-0.17
1,-1	+3.62	+0.06				+3.68
2,-1	-21.83	-2.71	+0.04			-24.50
3,-1	-1.20	-0.68				-1.88
2,-2	-0.55	-0.10				-0.65
<u>4.</u>						
0,4	-2.13	+0.05				-2.08
-1,3	+2.86	+0.01				+2.87
0,3	-52.34	+0.77	-0.04			-51.61
1,3	+2.86	+1.30	-0.06			+4.10
-2,2	+0.67	-0.03				+0.64
-1,2	+48.66	-0.84		-0.02	-0.02	+47.78
0,2	-890.42	+7.54		+0.04	+0.29	-882.58
1,2	+48.66	+19.53		+0.02	-0.04	+68.20
2,2	+0.67	+1.43				+2.10

BERECHNUNG DER IN DEN MONDTAFELN ANGEWANDTEN STÖRUNGEN. 307

<u>4.</u>						
-1,1	-0,44	-0,09				-0,50
0,1	+7.48	+0.10	+0,04			+7.62
4,1	-0.44	+0.45	+0.07			+0.44
<u>5.</u>						
1,2	+0.87	-0.07		-0,04	-0,03	+0.76
2,2	-5.28	+0.33		+0.04	+0.16	-4.75
3,2	-0.29	+0.05			+0.04	-0.23
<u>12.</u>						
3,-1		-0.35	+0.07			-0.28
4,-1		-0.16	+0.04			-0.12
2,-2		+1.61				+1.61
3,-2		-17.67				-17.67
4,-2		-10.54		-0.04	+0.02	-10.53
5,-2		-1.44				-1.44
6,-2		-0.08				-0.08
2,-3		+0.11				+0.11
3,-3		-1.27	-0.06			-1.33
4,-3		-0.99	-0.05			-1.04
5,-3		-0.10				-0.10
3,-4		-0.06				-0.06
4,-4		-0.05				-0.05
<u>13.</u>						
0,-4		-0.40	-0.23			-0.63
1,-4		-0.14	-0.19	-0.03		-0.33
2,-4		+0.21	-0.04	+0.15		+0.32
3,-4		+0.29				+0.29
0,-5		-0.04	-0.02			-0.06
1,-5		-0.02	-0.02			-0.04
2,-5		+0.02				+0.02
3,-5		+0.03				+0.03
<u>18.</u>						
2,0		-0.05				-0.05
3,0		-0.47				-0.47
4,0		+0.08				+0.08
<u>19.</u>						
0,4		+0.05		+0.16		+0.21
1,4		+0.10		-0.04		+0.09
2,4		+0.04				+0.04
<u>6.</u>						
0,-1	+0.81	+0.14				+0.95
1,-1	-5.96	-0.45				-6.41
2,-1	+0.16	-0.03				+0.13
1,-2	-0.30	+0.03				-0.27

7.						
3,-2	+0,04	-0,06				-0,02
2,-3	+0.67	-0.06				+0.61
3,-3	-2.68	+0.49				-2.19
4,-3	-0.22	+0.04				-0.18
14.						
4,-5		-0.09				-0.09
5,-5		-0.05				-0.05
8.						
0,1	+0.45	+0.09				+0.54
1,1	-3.28	-0.47				-3.75
2,1	+0.09	-0.02				+0.07
9.						
2,-1	+0.66	-0.03				+0.63
3,-1	-2.62	+0.49				-2.13
4,-1	-0.22	+0.04				-0.18
10.						
0,-3	+0.38	+0.05				+0.43
1,-3	-2.77	+0.02				-2.75
2,-3	+0.08	-0.04				+0.07

## Ferner für C

$g, g'$	$Y$ sin	$Y_1$ sin	$Y_2$ sin	$\frac{1}{2}Z\delta Q$ sin	$N$ sin
1.					
1,0		-20,34		-0,04	-20,32
2,0		-1.44		+0.04	-1.40
3,0		-0.10			-0.10
-2,-1		+0.05			+0.05
-1,-1		+0.76	-0,06		+0.70
0,-1		+0.17	-0.07		+0.10
1,-1		-1.06	-0.07		-1.13
2,-1		-0.09	-0.02		-0.11
-1,-2		+0.03			+0.03
0,-2		+0.04			+0.04
1,-2		-0.05			-0.05
2.					
0,-1	-0,06	+0.04	-0.04		-0.03
1,-1	+1.20	-0.24	-0.02		+0.94
2,-1	-7.26	-2.77	-0.02		-10.05
3,-1	-0.40	-0.53			-0.93
4,-1	-0.02	-0.04			-0.06

BERECHNUNG DER IN DEN MONDTAFELN ANGEWANDTEN STÖRUNGEN. 309

<u>2.</u>					
-1,-2	-0'04	+0'04	-0'02		-0'05
0,-2	+6.56	+0.15	-0.22		+6.49
1,-2	-143.13	+0.13	-0.36	-0'03	-143.39
2,-2	+863.92	-0.48	-0.57	+0.18	+863.05
3,-2	+47.44	-0.01	-0.26	+0.01	+47.18
4,-2	+2.60	-0.02	-0.02		+2.56
5,-2	+0.15				+0.15
0,-3	+0.39	-0.01	-0.02		+0.36
1,-3	-8.41	+0.10	-0.03		-8.34
2,-3	+50.78	+2.71	-0.05	+0.02	+53.46
3,-3	+2.79	+0.69	-0.02		+3.46
4,-3	+0.15	+0.06			+0.21
1,-4	-0.34	+0.04			-0.33
2,-4	+2.07	+0.19			+2.26
3,-4	+0.11	+0.04			+0.15
2,-5	+0.07				+0.07
<u>11.</u>					
2,-3		+0.04	-0.01		+0.03
3,-3		-0.27	-0.07		-0.34
4,-3		-0.19	-0.04		-0.23
1,-4		+0.04			+0.01
2,-4		-1.72			-1.72
3,-4		+17.95		+0.01	+17.95
4,-4		+10.47			+10.48
5,-4		+1.09			+1.09
6,-4		+0.08			+0.08
2,-5		-0.17			-0.17
3,-5		+1.84	+0.06		+1.87
4,-5		+1.34	+0.05		+1.39
5,-5		+0.13			+0.13
3,-6		+0.12			+0.12
4,-6		+0.09			+0.09
<u>15.</u>					
4,-6		+0.12	+0.19		+0.34
5,-6		+0.16	+0.22		+0.38
6,-6		+0.06	+0.08		+0.14
<u>3.</u>					
2,2	-0.55	+0.10			-0.45
0,1	-0.16	-0.07			-0.23
1,1	+3.59	+0.22			+3.81
2,1	-21.65	+2.77	+0.03		-18.85
3,1	-1.19	+0.55			-0.64
0,0	-6.53	-0.54			-7.07
1,0	+142.42	-0.18	+0.17	+0.03	+142.44
2,0	-859.60	+0.18	+0.52	-0.18	-859.08
3,0	-47.21	+0.20	+0.26	-0.01	-46.76
4,0	-2.59	+0.02	+0.02		-2.55

3.					
0,-1	-0.16				-0.16
1,-1	+3.59	-0.10			+3.49
2,-1	-21.65	-2.72	+0.03		-24.34
3,-1	-1.19	-0.67			-1.86
2,-2	-0.35	-0.10			-0.65
4.					
0,4	-2.11	+0.03			-2.08
-1,3	+2.83				+2.83
0,3	-51.71	+0.76	-0.04		-50.99
1,3	+2.83	+1.29	-0.06		+4.06
-2,2	+0.66	-0.03			+0.63
-1,2	+48.07	-0.85			+47.22
0,2	-879.74	+7.48		-0.01	-872.27
1,2	+48.07	+19.39			+67.46
2,2	+0.66	+1.42			+2.08
-1,1	-0.40	-0.09			-0.49
0,1	+7.39	+0.10	+0.04		+7.53
1,1	-0.40	+0.44	+0.06		+0.10
5.					
1,2	+0.87	-0.07		-0.03	+0.77
2,2	-5.27	+0.33		+0.21	-4.73
3,2	-0.29	+0.05		+0.01	-0.23
12.					
3,-1		-0.34	+0.06		-0.28
4,-1		-0.16	+0.04		-0.12
2,-2		+1.77			+1.77
3,-2		-18.25		+0.01	-18.24
4,-2		-10.46		-0.03	-10.49
5,-2		-1.10			-1.10
6,-2		-0.08			-0.08
2,-3		+0.11			+0.11
3,-3		-1.20	-0.06		-1.26
4,-3		-0.98	-0.05		-1.03
5,-3		-0.09			-0.09
3,-4		-0.06			-0.06
4,-4		-0.05			-0.05
13.					
0,-4		+0.38	+0.26		+0.64
1,-4		+0.10	+0.19	+0.02	+0.31
2,-4		-0.21	+0.04	-0.13	-0.30
3,-4		-0.28			-0.28
0,-5		+0.04	+0.02		+0.06
1,-5		+0.02	+0.02		+0.04
2,-5		-0.02			-0.02
3,-5		-0.03			-0.03
18.					
2,0		-0.04			-0.04
3,0		+0.24			+0.24
4,0		-0.05			-0.05

BERECHNUNG DER IN DEN MONDTAFELN ANGEWANDTEN STÖRUNGEN. 344

19.					
0,4		+0,05		+0,08	+0,13
1,4		+0.10			+0.10
2,4		+0.01			+0.01
6.					
0,-1	-0,07	-0.04			-0.11
1,-1	+0.51	+0.48			+0.99
2,-1	-0.01				-0.01
1,-2	+0.02	-0.04			-0.02
7.					
3,-2	-0.04	+0.07			+0.03
2,-3	-0.66	-0.01			-0.67
3,-3	+2.62	-0.51			+2.11
4,-3	+0.22	-0.04			+0.18
14.					
4,-5		+0.09			+0.09
5,-5		+0.05			+0.05
8.					
0,1	+0.44	+0.09			+0.53
1,1	-3.20	-0.46			-3.66
2,1	+0.09	-0.09			+0.07
9.					
2,-1	+0.65	-0.03			+0.62
3,-1	-2.59	+0.49			-2.10
4,-1	-0.22	+0.04			-0.18
10.					
0,-3	-0.37	-0.05			-0.42
1,-3	+2.72	-0.02			+2.70
2,-3	-0.07	+0.01			-0.06

81.

Hiemit und mit den früher angegebenen Factoren ergeben sich die folgenden Producte, deren Summe  $\bar{B}$  giebt.

$g, g'$	$B_0$ cos	$B_1$ cos	$B_2$ cos	$H\delta P$ cos	$N\delta Q$ cos
1.					
0,0	+79,08488	-0,67340	+0,00093	-1,04877	-1,04640
1,0	-8.644	-1.754	+0.001	+0.142	+0.206
2,0	-0.119	-0.127		-0.064	-0.038
3,0	-0.003	-0.009		-0.003	-0.003
-2,-1	-0.003	-0.003			
-1,-1	-0.248	-0.048	+0.006	+0.005	+0.009
0,-1	+3.9836	-0.0780	+0.0004	-0.0708	-0.0794
1,-1	-0.248	-0.104	-0.006		+0.006
2,-1	-0.003	-0.010		-0.002	-0.002

<u>1.</u>					
-4,-2	-0,005	-0,003			
0,-2	+0.1004	-0.0034	+0,0001	-0,0017	-0,0021
1,-2	-0.005	-0.003			
0,-3	+0.003				
<u>2.</u>					
0,0			+0.00004	-0.00004	+0.00004
0,-1	-0.0050	+0.0043	+0.0014	-0.0009	
1,-1	+0.109	-0.020	-0.001	+0.019	+0.003
2,-1	-0.657	-0.052	-0.002	-0.106	-0.006
3,-1	-0.036	-0.050		-0.005	+0.001
4,-1	-0.002				
-1,-2	-0.004	+0.002	+0.002	+0.004	+0.003
0,-2	+0.5937	+0.0849	+0.0216	-0.0646	-0.0499
1,-2	-12.957	+0.032	+0.002	+0.192	+0.263
2,-2	+78.207	-0.145	-0.042	-1.106	-1.120
3,-2	+4.295	-0.050	-0.024	-0.040	-0.046
4,-2	+0.235	-0.004	+0.002	-0.002	-0.003
5,-2	+0.013				
0,-3	+0.035	+0.003	+0.002	-0.003	-0.003
1,-3	-0.762	+0.009	+0.001	-0.006	+0.018
2,-3	+4.597	+0.241	-0.005	+0.026	-0.082
3,-3	+0.252	+0.059	-0.002	+0.004	-0.004
4,-3	+0.014	+0.004			
1,-4	-0.031	+0.001			
2,-4	+0.188	+0.018		+0.005	-0.001
3,-4	+0.010	+0.003			
<u>11.</u>					
2,-3		+0.002			
3,-3		-0.025	-0.006		
4,-3		-0.017	-0.003		
2,-4		-0.156		+0.006	+0.007
3,-4		+1.626		+0.025	+0.021
4,-4		+0.950		-0.095	-0.094
5,-4		+0.100		-0.009	-0.009
2,-5		-0.014			
3,-5		+0.166	+0.006	+0.007	+0.005
4,-5		+0.121	+0.003	-0.009	-0.014
5,-5		+0.011			
<u>3.</u>					
1,2	+0.008				
2,2	-0.050	+0.009			
3,2	-0.003				
0,1	-0.0149	-0.0056	-0.0004	+0.0002	+0.0037
1,1	+0.326	+0.020		+0.012	-0.011
2,1	-1.968	+0.252	+0.003	-0.077	+0.036
3,1	-0.108	+0.050		-0.005	+0.001



3.					
-1,0	+0,004	-0,004		+0,004	-0,007
0,0	-0.59324	-0.05089	-0,00414	+0.04744	+0.40871
1,0	+12.946	-0.015	+0.016	-0.143	-0.243
2,0	-78.137	+0.018	+0.047	+0.935	+1.144
3,0	-4.291	+0.017	+0.024	+0.069	+0.022
4,0	-0.236	+0.002	+0.002	+0.004	+0.003
0,-1	-0.0149	+0.0004		+0.0014	+0.0023
1,-1	+0.326	-0.009		-0.022	-0.041
2,-1	-1.968	-0.245	+0.003	+0.140	+0.051
3,-1	-0.108	-0.063		+0.010	+0.003
1,-2	+0.008				
2,-2	-0.050	-0.009		+0.006	+0.003
3,-2	-0.003				
4.					
-1,4	+0.010				
0,4	-0.189	+0.004		-0.001	+0.003
1,4	+0.010				
-1,3	+0.254	+0.002		+0.008	-0.011
0,3	-4.643	+0.069	-0.003	-0.101	+0.133
1,3	+0.254	+0.118	-0.006	-0.002	-0.011
-2,2	+0.059	-0.001		-0.051	+0.049
-1,2	+4.316	-0.044		+0.022	-0.155
0,2	-78.9957	+0.6711		+0.0125	+2.0619
1,2	+4.316	+1.764		-0.015	-0.184
2,2	+0.059	+0.128		-0.016	-0.012
-1,1	-0.036	-0.009		-0.006	
0,1	+0.6637	+0.0088	+0.0030	+0.1032	+0.0123
1,1	-0.036	+0.042	+0.006	-0.002	-0.001
0,0		+0.00028	+0.00008	+0.00039	-0.00042
5.					
0,2	+0.0012	+0.0012		+0.0634	-0.0621
1,2	+0.026	-0.007		-0.193	+0.193
2,2	-0.158	+0.030		+1.099	-1.094
3,2	-0.009	+0.005		+0.040	-0.040
12.					
3,-1		-0.031	+0.006		
4,-1		-0.016	+0.003		
2,-2		+0.161		+0.063	+0.051
3,-2		-1.658		+0.032	-0.064
4,-2		-0.952		+0.009	+0.171
5,-2		-0.100			
2,-3		+0.010		+0.003	+0.003
3,-3		-0.141	-0.006	+0.004	
4,-3		-0.090	-0.003	+0.002	+0.011
13.					
0,-4		-0.036	-0.020	-0.017	+0.005
1,-4		-0.010	-0.017	+0.142	-0.220
2,-4		+0.081	-0.005	-0.943	+1.106
3,-4		+0.023		-0.068	+0.063

<u>13.</u>					
1,-5		-0,004	-0,002	+0,013	-0,021
2,-5		+0.006		-0.095	+0.115
<u>18.</u>					
1,0		0.000		-0.009	+0.009
2,0		-0.005		+0.056	-0.056
3,0		+0.029		-0.016	+0.015
4,0		-0.004		+0.088	-0.088
<u>19.</u>					
0,6				+0.005	-0.005
-1,5				-0.005	+0.005
0,5				+0.101	-0.100
1,5				-0.008	+0.008
-1,4				-0.046	+0.046
0,4				+1.024	-1.016
1,4				-0.090	+0.089
0,3				-0.030	+0.030
<u>6.</u>					
0,0	-0,00423	-0.00003	+0.00007	+0.00004	+0.00014
1,0	+0.009				
0,-1	-0.0732	-0.0099	-0.0010	+0.0026	+0.0032
1,-1	+0.535	+0.040		-0.001	-0.016
2,-1	-0.015	+0.003		+0.003	+0.001
0,-2	-0.0037	-0.0004			
1,-2	+0.027				
<u>7.</u>					
3,-2	-0.004	+0.007			
2,-3	-0.060	+0.006		-0.003	+0.004
3,-3	+0.238	-0.043		+0.006	-0.010
4,-3	+0.020	-0.004			
3,-4	+0.020				
<u>8.</u>					
0,2	+0.0020				
1,2	-0.015				
0,1	+0.0398	+0.0067		-0.0021	-0.0044
1,1	-0.291	-0.044		+0.001	+0.011
2,1	-0.008	-0.001		+0.003	-0.001
0,0	+0.00067	-0.00031	-0.00002		
1,0	-0.005	+0.007			
<u>9.</u>					
2,-1	+0.059	-0.003		-0.004	-0.001
3,-1	-0.238	+0.044		+0.004	+0.004
4,-1	-0.020				
<u>40.</u>					
0,-3	+0.033	+0.003		+0.002	-0.001
1,-3	-0.243	+0.002		-0.002	+0.007
2,-3	+0.007			+0.001	-0.001

Gleichwie oben für die Bewegung des Perigäums, werde ich auch hier die einzelnen Theile der Glieder angeben, aus welchen die Bewegung der Knoten hervorgeht.

$\left(\frac{dB_0}{dg}\right) n\delta z$			$\frac{1}{2} \left(\frac{d^2B_0}{dg^2}\right) (n\delta z)^2$		
1.	1.	0,0, in 1.	1.	1.	0,0, in 1.
-1,-1	-1,-1	-0,00004	1,0	1,0	+0,00049
1,-1	1,-1	+ 6	2.	2.	
2.	2.		2,-1	2,-1	+ 3
2,-1	2,-1	- 7	1,-2	1,-2	+ 3
1,-2	1,-2	+ 14030	2,-2	2,-2	- 58
2,-2	2,-2	- 81330	3,-2	3,-2	- 2
3,-2	3,-2	- 188	1,-3	1,-3	- 4
1,-3	1,-3	+ 37	2,-3	2,-3	+ 20
2,-3	2,-3	- 346	3.	3.	
3,-3	3,-3	- 4	1,0	1,0	- 3
3.	3.		2,0	2,0	+ 37
1,0	1,0	+ 267			+0,00048
2,0	2,0	+ 463			
4.	4.				
-1,2	-1,2	+ 12			
1,2	1,2	+ 5			
6.	6.				
1,-1	1,-1	+ 16			
		-0,67340			

$\frac{1}{6} \left(\frac{d^3B_0}{dg^3}\right) (n\delta z)^3$		
2.	2.	0,0 in 1.
1,-2	1,-2	-0,00004
2,-2	2,-2	+ 44
3,-2	3,-2	+ 2
		+0,00045

HδP			NδQ		
1.	1.	0,0, in 1.	1.	1.	0,0, in 1.
1,0	1,0	+0,00051	0,0	0,0	+0,044514
0,-1	0,-1	- 1	1,0	1,0	- 73
2.	2.		0,-1	0,-1	+ 5
2,-1	2,-1	+ 1	2.	2.	
0,-2	0,-2	- 8	2,-1	2,-1	- 1
1,-2	1,-2	+ 560	0,-2	0,-2	+ 9
2,-2	2,-2	+ 8428	1,-2	1,-2	- 503
3,-2	3,-2	+ 17	2,-2	2,-2	- 8480
1,-3	1,-3	+ 2	3,-2	3,-2	- 17
2,-3	2,-3	+ 34	1,-3	1,-3	- 2
4.	4.		2,-3	2,-3	- 34
3,-4	3,-4	+ 2	4.	4.	
3.	3.		3,-4	3,-4	- 2
2,1	2,1	- 4	3.	3.	
0,0	0,0	- 45	2,1	2,1	- 4
1,0	1,0	- 447	0,0	0,0	- 45
2,0	2,0	- 7755	1,0	1,0	- 443
3,0	3,0	- 16	2,0	2,0	- 7697
2,-1	2,-1	- 6	3,0	3,0	- 16
4.	4.		2,-1	2,-1	- 6
0,3	0,3	- 239	4.	4.	
-1,2	-1,2	+ 56	0,3	0,3	- 237
0,2	0,2	-1.02397	-1,2	-1,2	+ 54
1,2	1,2	- 92	0,2	0,2	-1.01546
0,1	0,1	- 18	1,2	1,2	- 92
12.	12.		0,1	0,1	- 18
3,-2	3,-2	- 2	12.	12.	
6.	6.		3,-2	3,-2	- 2
1,-1	1,-1	- 1	6.	6.	
8.	8.		1,-1	1,-1	- 6
1,1	1,1	+ 3	8.	8.	
		-1,01877	1,1	1,1	+ 2
					-1,04640

Da das eben in  $\frac{1}{4} \left( \frac{d^2 B_0}{dg^2} \right) (n\delta z)^3$  angeführte Glied das einzige dieses Products ist, welches merklich ist, so habe ich dafür keine besondere Columnne in der vorstehenden Tafel anlegen wollen, sondern habe es dem Gliede in  $\frac{1}{4} \left( \frac{d^2 B_0}{dg^2} \right) (n\delta z)^2$  hinzugefügt. Beim Argument 0,0, in 1. enthält also die Columnne für  $B_2$  die Summe der beiden Glieder +0,00048 und +0,00045.

Man bekommt ferner die folgenden Producte, deren Summe  $\bar{C}$  giebt.

$g, g'$	$C_0$ sin	$C_1$ sin	$C_2$ sin	$H\delta P$ sin	$N\delta Q$ sin
<u>1.</u>					
1,0		-1,842		+0,054	+0,028
2,0		-0.134		-0.060	-0.039
3,0		-0.044		-0.003	-0.003
-2,-1		+0.005			
-1,-1		+0.070	-0,006	-0.015	-0.005
0,-1		+0.0453	-0.0064	+0.2139	+0.0074
1,-1		-0.096	-0.006	-0.044	+0.002
2,-1		-0.009		-0.002	-0.002
-1,-2		+0.003			
0,-2		+0.0040	-0.0004	+0.0079	+0.0003
1,-2		-0.004			
<u>2.</u>					
0,0		+0.00005		+0.00004	
0,-1	-0,0050	+0.0036	-0.0009	-0.0004	-0.0004
1,-1	+0.109	-0.024	-0.004	+0.020	+0.004
2,-1	-0.657	-0.250	-0.002	-0.104	
3,-1	-0.036	-0.049		-0.005	-0.007
4,-1	-0.002				
-1,-2	-0.004	+0.004	-0.002	-0.005	-0.004
0,-2	+0.5937	+0.0440	-0.0202	+0.0666	+0.0473
1,-2	-12.957	+0.043	-0.034	+0.199	+0.449
2,-2	+78.207	-0.046	-0.052	-1.446	-0.788
3,-2	+4.295	-0.002	-0.024	-0.039	-0.050
4,-2	+0.235	-0.002	-0.002	-0.002	-0.004
5,-2	+0.043				
0,-3	+0.035	-0.004	-0.002	+0.003	+0.005
1,-3	-0.762	+0.009	-0.003	-0.003	+0.008
2,-3	+4.597	+0.246	-0.005	+0.025	-0.053
3,-3	+0.252	+0.063	-0.002	+0.004	-0.004
4,-3	+0.044	+0.009			
1,-4	-0.034	+0.004			
2,-4	+0.188	+0.048		+0.006	-0.002
3,-4	+0.040	+0.003			
<u>4.</u>					
2,-3		+0.002			
3,-3		-0.025	-0.006		
4,-3		-0.047	-0.003		
2,-4		-0.156		+0.006	+0.007
3,-4		+1.626		+0.022	+0.023
4,-4		+0.950		-0.095	-0.093
5,-4		+0.400		-0.009	-0.009

<u>44.</u>					
2,-5		-0.014			
3,-5		+0.166	+0.006	+0.003	+0.004
4,-5		+0.124	+0.003	-0.044	-0.042
5,-5		+0.044			
<u>3.</u>					
1,2	+0.008				
2,2	-0.050	+0.009			
3,2	-0.003				
0,4	-0.0149	-0.0056	-0.0004	+0.0042	-0.0003
1,4	+0.326	+0.020		+0.042	-0.008
2,4	-1.968	+0.252	+0.003	-0.070	+0.029
3,4	-0.408	+0.050		-0.005	+0.004
-1,0	+0.004	-0.004		-0.007	+0.004
0,0	-0.59324	-0.05017	+0.00028	+0.13272	-0.00368
1,0	+12.946	-0.016	+0.016	-0.242	-0.174
2,0	-78.437	+0.016	+0.047	+1.092	+0.964
3,0	-4.294	+0.017	+0.024	+0.066	+0.025
4,0	-0.236	+0.002	+0.002	+0.004	+0.003
0,-1	-0.0149	+0.0004	+0.0004	+0.0037	
1,-1	+0.326	-0.009		-0.024	-0.009
2,-1	-1.968	-0.247	+0.003	+0.147	+0.043
3,-1	-0.408	-0.064		+0.010	+0.003
1,-2	+0.008				
2,-2	-0.050	-0.009		+0.006	+0.002
3,-2	-0.003				
<u>4.</u>					
-1,4	+0.040				
0,4	-0.190	+0.004		-0.004	
1,4	+0.040				
-1,3	+0.255	+0.002		-0.005	+0.004
0,3	-4.662	+0.069	-0.003	+0.044	-0.009
1,3	+0.255	+0.148	-0.006	-0.002	-0.003
-2,2	+0.059	-0.003		+0.054	-0.054
-1,2	+4.333	-0.076		-0.184	+0.044
0,2	-79.3455	+0.6793	+0.0008	+2.2328	-0.4387
1,2	+4.333	+1.762		-0.174	-0.030
2,2	+0.059	+0.129		-0.045	-0.044
-1,1	-0.037	-0.009		-0.006	
0,1	+0.6664	+0.0088	+0.0030	+0.1162	-0.0008
1,1	-0.037	+0.042	+0.006	-0.040	-0.004
0,0	0	+0.00028	+0.00008	+0.00004	-0.00008
<u>5.</u>					
0,2	-0.0042	+0.0042		+0.0638	-0.0627
1,2	+0.026	-0.007		-0.193	+0.192
2,2	-0.158	+0.030		+1.104	-1.095
3,2	-0.009	+0.005		+0.040	-0.040

<u>12.</u>					
3,-1		-0,031	+0,006		
4,-1		-0.016	+0.003		
2,-2		+0.161		+0,062	+0,051
3,-2		-1.656		+0.033	-0.063
4,-2		-0.951		+0.009	+0.168
5,-2		-0.100			
2,-3		+0.010		+0.003	+0.003
3,-3		-0.111	-0.006	+0.004	-0.002
4,-3		-0.090	-0.003	+0.004	+0.017
<u>13.</u>					
0,-4		+0.035	+0.020	-0.007	+0.018
1,-4		+0.009	+0.017	+0.218	-0.141
2,-4		-0.019	+0.005	-1.116	+0.928
3,-4		-0.025		-0.065	+0.068
1,-5		+0.001	+0.002	+0.021	-0.013
2,-5		-0.002		-0.111	+0.093
<u>18.</u>					
1,0		0.000		-0.009	+0.009
2,0		-0.005		+0.057	-0.056
3,0		+0.029		-0.046	+0.045
4,0		-0.001		+0.089	-0.088
<u>19.</u>					
0,6				+0.003	-0.003
-1,5				-0.005	+0.005
0,5				+0.102	-0.101
1,5				+0.008	-0.008
-1,4				-0.046	+0.046
0,4				+1.036	-1.027
1,4				-0.090	+0.090
3,0				-0.030	+0.030
<u>6.</u>					
0,0	-0,00011	+0.00013	-0.00012	+0.00057	-0.00006
1,0	+0.001				
0,-1	-0.0066	-0.0033	+0.0010	-0.0067	-0.0003
1,-1	+0.048	+0.051		+0.041	-0.005
2,-1	-0.001	+0.016		+0.002	+0.001
0,-2	-0.0003	-0.0017			
1,-2	+0.002	-0.004			
<u>7.</u>					
3,-2	-0.004	+0.007			
2,-3	-0.060			-0.003	+0.001
3,-3	+0.238	-0.046		+0.006	-0.010
4,-3	+0.020	-0.004			
3,-4	+0.020				

<u>8.</u>					
0,2	+0,0020				
1,2	-0.015				
0,4	+0.0400	+0,0066		-0,0046	-0,0015
1,4	-0.293	-0.042		-0.014	+0.017
2,4	+0.008	-0.004		+0.004	-0.004
0,0	+0.00067	-0.00034	-0,00002		
1,0	-0.005	+0.006			
<u>9.</u>					
2,-1	+0.059	-0.003			
3,-1	-0.238	+0.044		+0.004	+0.003
4,-1	-0.020				
<u>10.</u>					
0,-3	-0.034	-0.003		-0.002	+0.004
1,-3	+0.245	-0.002		+0.008	-0.014
2,-3	-0.007			+0.004	

82.

Die für  $dP$  und  $dQ$  noch erforderlichen Producte von  $\bar{B}$  und  $\bar{C}$  mit  $(1 + \nu)^2 \frac{h}{h_0} - 1$  und bez.  $(1 + \nu)^3 \frac{h}{h_0} - 1$  sind nebst jenen Functionen und der Summe davon in den beiden folgenden Tafeln enthalten. In der Columnne, welche die Producte

$$\bar{B} \left\{ (1 + \nu)^2 \frac{h}{h_0} - 1 \right\} \text{ und bez. } \bar{B} \left\{ (1 + \nu)^3 \frac{h}{h_0} - 1 \right\}$$

enthält, habe ich die Ueberschrift weggelassen, die keinen Platz finden würde.

$g, g'$	$\bar{B}$ cos	cos	$B$ cos
<u>1.</u>			
0,0	+76,34724	-1,24004	+75,40723
1,0	-10.046	-0.493	-10.539
2,0	-0.348	-0.043	-0.394
3,0	-0.048	-0.002	-0.020
-2,-1	-0.006	-0.004	-0.010
-1,-1	-0.246	+0.015	-0.234
0,-1	+3.7564	-0.0794	+3.6770
1,-1	-0.322	-0.066	-0.388
2,-1	-0.047	-0.004	-0.048
-1,-2	-0.068		-0.008
0,-2	+0.0933	-0.0025	+0.0908
1,-2	-0.008	-0.002	-0.010
<u>2.</u>			
0,0	+0.00004	+0.00004	+0.00005



<u>2.</u>			
0,-1	-0,0005	+0,0053	+0,0048
1,-1	+0.108	-0.041	+0.067
2,-1	-1.023	-0.003	-1.026
3,-1	-0.090	+0.015	-0.075
<hr/>			
-1,-2	+0.007	+0.003	+0.010
0,-2	+0.5857	+0.0812	+0.6669
1,-2	-12.468	-1.198	-13.666
2,-2	+75.794	-2.009	+73.785
3,-2	+4.135	+0.043	+4.178
4,-2	+0.228	+0.008	+0.236
<hr/>			
0,-3	+0.034	+0.004	+0.038
1,-3	-0.740	-0.063	-0.803
2,-3	+4.777	-0.158	+4.619
3,-3	+0.309	-0.015	+0.294
<hr/>			
1,-4	-0.030	-0.002	-0.032
2,-4	+0.210	-0.009	+0.201
<hr/>			
<u>11.</u>			
3,-3	-0.031	+0.014	-0.017
<hr/>			
2,-4	-0.143	+0.101	-0.042
3,-4	+1.672	-0.602	+1.070
4,-4	+0.761	-0.763	-0.002
5,-4	+0.082	-0.073	+0.009
<hr/>			
2,-5	-0.014	+0.012	-0.002
3,-5	+0.184	-0.058	+0.126
4,-5	+0.104	-0.101	+0.003
<hr/>			
<u>3.</u>			
2,2	-0.041	+0.002	-0.039
<hr/>			
0,1	-0.0167	-0.0047	-0.0214
1,1	+0.344	+0.052	+0.396
2,1	-1.754	+0.038	-1.716
3,1	-0.062	-0.016	-0.078
<hr/>			
0,0	-0.51942	-0.03171	-0.55083
1,0	+12.561	+0.559	+13.120
2,0	-76.023	+1.322	-74.701
3,0	-4.159	-0.032	-4.191
4,0	-0.225	-0.004	-0.229
<hr/>			
0,-1	-0.0111	+0.0015	-0.0096
1,-1	+0.284	+0.004	+0.288
2,-1	-2.019	+0.043	-1.976
3,-1	-0.158	+0.016	-0.142
<hr/>			
2,-2	-0.050	+0.002	-0.048
<hr/>			
<u>4.</u>			
-1,4	+0.010		+0.010
0,4	-0.183	+0.004	-0.179
1,4	+0.010		+0.010
<hr/>			
-1,3	+0.253	+0.004	+0.257
0,3	-4.545	+0.086	-4.459
1,3	+0.353	+0.027	+0.380

<u>4.</u>			
-2,2	+0.056	+0.002	+0.058
-1,2	+4.169	-0.149	+4.020
0,2	-76.2502	+1.2389	-75.0113
1,2	+5.881	+0.646	+6.527
2,2	+0.159	+0.043	+0.202
<hr/>			
-1,1	-0.051	-0.018	-0.069
0,1	+0.7910	-0.0069	+0.7841
1,1	+0.009	+0.034	+0.043
<hr/>			
0,0	+0.00033	+0.00023	+0.00056
<hr/>			
<u>5.</u>			
0,2	+0.0012	+0.0011	+0.0023
1,2	+0.019	-0.016	+0.003
2,2	-0.123		-0.123
<hr/>			
<u>12.</u>			
3,-1	-0.025	+0.008	-0.017
2,-2	+0.275	-0.111	+0.164
3,-2	-1.690	+0.615	-1.075
4,-2	-0.772	+0.764	-0.008
5,-2	-0.100	+0.074	-0.026
<hr/>			
3,-3	-0.113	+0.037	-0.076
4,-3	-0.080	+0.071	-0.009
<hr/>			
<u>13.</u>			
0,-4	-0.068	-0.049	-0.117
1,-4	-0.105	+0.652	+0.547
2,-4	+0.239	+0.687	+0.926
3,-4	+0.018	-0.008	+0.010
<hr/>			
4,-5	-0.011		-0.011
2,-5	+0.026	+0.089	+0.115
<hr/>			
<u>18.</u>			
3,0	+0.028	-0.016	+0.012
<hr/>			
<u>19.</u>			
0,4	+0.008	-0.002	+0.006
<hr/>			
<u>6.</u>			
0,0	-0.00104	-0.00016	-0.00120
1,0	+0.009	-0.006	+0.003
<hr/>			
0,-1	-0.0783	-0.0109	-0.0892
1,-1	+0.558	+0.042	+0.600
2,-1	-0.008	-0.006	-0.014
<hr/>			
0,-2	-0.0038	+0.0002	-0.0036
1,-2	+0.027	-0.003	+0.024
<hr/>			
<u>7.</u>			
2,-3	-0.056	-0.010	-0.066
3,-3	+0.191	+0.010	+0.201
<hr/>			
<u>8.</u>			
0,2	+0.0020		+0.0020
1,2	-0.015		-0.015

8.			
0,4	+0,0403	+0,0070	+0,0473
1,4	-0.320	-0.030	-0.350
2,4	-0.007	+0.005	-0.002
0,0	+0.00034	-0.00038	-0.00004
9.			
2,-1	+0.054	+0.007	+0.058
3,-1	-0.486	-0.043	-0.199
10.			
0,-3	+0.037	+0.004	+0.041
1,-3	-0.236	-0.043	-0.249

Von dem Gliede dieser Tafel, welches zur Knotenbewegung beiträgt, sind die folgenden die einzelnen Theile.

$\bar{B} \left\{ (1+\nu)^2 \frac{h}{h_0} - 1 \right\}$ $+ \bar{B} \left\{ (1+\nu)^3 \frac{h}{h_0} - 1 \right\}$		
1.	1.	0,0, in 1.
0,0	0,0	-0,62304
1,0	1,0	- 654
2,0	2,0	- 4
-1,-1	-1,-1	- 5
0,-1	0,-1	+ 54
1,-1	1,-1	+ 8
2.		
2,-1	2,-1	- 10
0,-2	0,-2	- 2
1,-2	1,-2	+ 14540
2,-2	2,-2	- 72350
3,-2	3,-2	- 474
1,-3	1,-3	+ 28
2,-3	2,-3	- 346
3,-3	3,-3	- 4
2,-4	2,-4	- 4
11.		
3,-4	3,-4	- 9
3.		
1,0	1,0	+ 266
2,0	2,0	+ 463
4.		
0,3	0,3	- 4
-1,2	-1,2	+ 9
0,2	0,2	- 240
1,2	1,2	+ 8
12.		
3,-2	3,-2	- 4
6.		
1,-1	1,-1	+ 22
-1,24004		

mit der vorstehenden Tafel übereinstimmend. \*)

## 83.

Zur Berücksichtigung von  $\mathcal{L}^{(3)}$  ist der Ausdruck

$$B^{(3)} = B_0^{(3)} + R\delta P + Y\delta Q$$

anzuwenden, und dafür wurde im Art. 63 gefunden.

$$B_0^{(3)} = +0''00095$$

$$R = +0.010 \sin(2g' + 2\omega')$$

$$Y = -0.010 \cos(2g' + 2\omega')$$

Multiplicirt man diese mit den betreffenden Gliedern der Ausdrücke für  $\delta P$  und  $\delta Q$ , so bekommt man

$$R\delta P + Y\delta Q = -0''00002$$

woraus

$$B^{(3)} = +0''00093$$

folgt, welcher dem Coefficienten des Arguments 0,0, in 1. der Tafel des vor. Art. hinzugefügt werden muss.

Ausserdem kommen auch hier nicht nur die im Art. 78 in Bezug auf die Bewegung des Perigäums angeführten Umstände in Betracht, sondern auch die Mondmasse liefert einen Beitrag zur Bewegung der Knoten, wie sich weiter unten ergeben wird.

## 84.

Wir kommen nun zum letzten Product, welches für die Erlangung des Werthes von  $C$  zu berechnen ist, nemlich  $\bar{C} \left\{ (1 + \nu)^2 \frac{h}{h_0} - 1 \right\}$  und bez.  $\bar{C} \left\{ (1 + \nu)^2 \frac{h}{h_0} - 1 \right\}$ . Die Ueberschrift ist wieder weggelassen, weil sie keinen Platz finden würde.

$g, g'$	$\bar{C}$ sin	sin	$C$ sin
1.			
1,0	-1''760	-0''830	-2''590
2,0	-0.230	-0.036	-0.266
3,0	-0.017	-0.002	-0.019

\*) Der Factor, womit diese Grössen in die jährliche Bewegung der Knoten übergehen, ist noch etwas grösser wie der oben für die Bewegung des Perigäums angeführte. Er ist nahe = 925,8.

BERECHNUNG DER IN DEN MONDTAFELN ANGEWANDTEN STÖRUNGEN. 325

<u>1.</u>			
-2,-1	+0,005	+0,002	+0,007
-1,-1	+0.044	+0.028	+0.072
0,-1	+0.2302	+0.0024	+0.2323
1,-1	-0.141	-0.048	-0.159
2,-1	-0.043	-0.003	-0.046
-1,-2	+0.003		+0.003
0,-2	+0.0088	+0.0003	+0.0094
1,-2	-0.004	-0.002	-0.006
<u>2.</u>			
0,0	+0.00006	-0.00004	+0.00005
0,-1	-0.0025	+0.0017	-0.0008
1,-1	+0.108	-0.048	+0.090
2,-1	-1.043	+0.044	-0.999
3,-1	-0.097	+0.044	-0.083
-1,-2	-0.044	-0.002	-0.046
0,-2	+0.7044	-0.0267	+0.6747
1,-2	-12.660	+0.439	-12.521
2,-2	+76.205	-0.636	+75.569
3,-2	+4.180	+0.027	+4.207
4,-2	+0.225	+0.006	+0.234
0,-3	+0.040	-0.002	+0.038
1,-3	-0.751	+0.049	-0.732
2,-3	+4.840	-0.028	+4.782
3,-3	+0.313	-0.048	+0.295
1,-4	-0.030		-0.030
2,-4	+0.240	-0.002	+0.208
<u>4.</u>			
3,-3	-0.034	+0.044	-0.047
2,-4	-0.443	+0.108	-0.035
3,-4	+1.674	-0.596	+1.075
4,-4	+0.762	-0.767	-0.005
5,-4	+0.082	-0.074	+0.008
2,-5	-0.044	+0.042	-0.002
3,-5	+0.479	-0.058	+0.421
4,-5	+0.104	-0.104	0.000
<u>3.</u>			
2,2	-0.044	+0.002	-0.039
0,4	-0.0467	-0.0046	-0.0213
1,4	+0.350	+0.052	+0.402
2,4	-1.754	+0.039	-1.715
3,4	-0.062	-0.046	-0.078
0,0	-0.54409	-0.02869	-0.54278
1,0	+12.563	+0.533	+13.096
2,0	-76.024	+1.330	-74.694
3,0	-4.159	-0.032	-4.191
4,0	-0.225	-0.004	-0.229

3.			
0,-1	-0.0410	+0.0045	-0.0095
1,-1	+0.284	+0.004	+0.288
2,-1	-2.022	+0.043	-1.979
3,-1	-0.156	+0.046	-0.140
2,-2	-0.051	+0.002	-0.049
4.			
-1,4	+0.040		+0.040
0,4	-0.187	+0.004	-0.183
1,4	+0.010		+0.010
-1,3	+0.256	+0.004	+0.260
0,3	-4.561	+0.086	-4.475
1,3	+0.362	+0.027	+0.389
-2,2	+0.056	-0.004	+0.052
-1,2	+4.120	-0.184	+3.936
0,2	-76.5413	+1.2462	-75.2951
1,2	+5.894	+0.644	+6.538
2,2	+0.159	+0.043	+0.202
-1,1	-0.052	-0.018	-0.070
0,1	+0.7936	-0.0070	+0.7866
1,1	0.000	+0.034	+0.034
0,0	+0.00032	+0.00022	+0.00054
5.			
0,2	+0.0044	+0.0040	+0.0021
1,2	+0.018	-0.016	+0.002
2,2	-0.122		-0.122
12.			
3,-1	-0.025	+0.008	-0.017
2,-2	+0.274	-0.111	+0.163
3,-2	-4.686	+0.645	-4.071
4,-2	-0.774	+0.762	-0.012
5,-2	-0.100	+0.074	-0.026
3,-3	-0.115	+0.037	-0.078
4,-3	-0.075	+0.071	-0.004
13.			
0,-4	+0.066	+0.049	+0.115
1,-4	+0.103	-0.655	-0.552
2,-4	-0.202	-0.686	-0.888
3,-4	-0.022	+0.007	-0.015
1,-5	+0.011		+0.011
2,-5	-0.020	-0.090	-0.110
18.			
3,0	+0.028	-0.016	+0.012
19.			
0,4	+0.009	-0.002	+0.007
6.			
0,0	+0.00044	+0.00007	+0.00048

6.			
0,-1	-0,0459	-0,0008	-0,0167
1,-1	+0.105	+0.047	+0.122
2,-1	+0.048	-0.003	+0.045
<hr/>			
0,-2	-0.0020	+0.0003	-0.0017
1,-2	-0.002	-0.003	-0.005
<hr/>			
7.			
2,-3	-0.062	-0.003	-0.065
3,-3	+0.188	+0.047	+0.205
<hr/>			
8.			
0,2	+0.0020		+0.0020
1,2	-0.015		-0.015
<hr/>			
0,4	+0.0405	+0.0069	+0.0474
1,4	-0.332	-0.030	-0.362
2,4	+0.010	+0.005	+0.015
<hr/>			
0,0	+0.00034	-0.00037	-0.00003
<hr/>			
9.			
2,-1	+0,056	+0.007	+0.063
3,-1	-0,194	-0.013	-0.204
<hr/>			
10.			
0,-3	-0.038	-0.006	-0.044
1,-3	+0.237	+0.013	+0.250

85.

Um die Glieder von  $\delta\delta K$  zu ermitteln, müssen nach Art. 54 die Producte

$$C \frac{1}{4 \cos^2 J} \delta P \text{ und } - \left\{ \left[ \frac{1}{4 \cos^2 J} + 2F^2 \right] B + \alpha F \right\} \delta Q$$

des Ausdrucks für  $X$  berechnet werden, während die dort mit  $\delta P^2$ , etc. multiplicirten Glieder weggelassen werden können, weil sie durchaus nichts Merkliches geben. Jene Producte sind in den Columnen ohne Ueberschriften der folgenden Tafel enthalten, deren letzte Columnne ihre Summe, oder  $X$  giebt.

$g, g'$	cos	cos	$X$ cos
<hr/>			
1.			
0,0	+0,0259	+0,0497	+0,0456
1,0	-0.003	-0.002	-0.005
<hr/>			
0,-1	+0.0048	+0.0045	+0.0033
<hr/>			
2.			
0,-2	+0.0045	+0.0006	+0.0024
1,-2	-0.004	-0.007	-0.011
2,-2	+0.025	+0.030	+0.055

3.			
0,0	-0,00043	-0,00483	-0,00496
1,0	-0.005	+0.006	+0.004
2,0	+0.025	-0.029	-0.004
4.			
0,3	-0.002	-0.005	-0.007
0,2	-0.0040	-0.0943	-0.0953
0,4	+0.0023		+0.0023
13.			
1,-4	+0.004	+0.004	+0.008
2,-4	-0.025	-0.025	-0.050
19.			
0,4	-0.023	+0.023	0.000

Die Meisten dieser Glieder können ihrer Kleinheit wegen über-  
gangen werden. Da das constante Glied in  $X$  auch zu den Bewegungen  
des Perigäums und der Knoten beiträgt, so gebe ich wieder die einzel-  
nen Theile, aus welchen es besteht.

$C \frac{1}{4 \cos^2 \frac{1}{2} J} \delta P$			$-\left\{ \left[ \frac{1}{4 \cos^2 \frac{1}{2} J} + 2F^2 \right] B + \alpha F \right\} \delta Q$		
2.	2.	0,0, in 1.	4.	4.	0,0, in 4.
1,-2	1,-2	+0,00012	0,0	0,0	-0,00634
2,-2	2,-2	+ 182	1,0	1,0	+ 2
2,-3	2,-3	+ 4	2.	2.	
3.	3.		1,-2	1,-2	+ 12
0,0	0,0	+ 4	2,-2	2,-2	+ 182
1,0	1,0	+ 10	2,-3	2,-3	+ 4
2,0	2,0	+ 168	3.	3.	
4.	4.		0,0	0,0	+ 4
0,3	0,3	+ 5	1,0	1,0	+ 10
-1,2	-1,2	- 4	2,0	2,0	+ 168
0,2	0,2	+ 2214	4.	4.	
1,2	1,2	+ 2	0,3	0,3	+ 5
		+0,02594	-1,2	-1,2	- 4
			0,2	0,2	+ 2222
			1,2	1,2	+ 2
					+0,04970



mit der Tafel übereinstimmend.

86.

Bei der Berechnung aller vorhergehenden Producte tritt ein Umstand ein, der in der Planetentheorie nicht vorkommt. Dort sind alle Argumente von der Form  $ig + i'g'$ , und man hat bei der Verwandlung der Producte der Sinusse und Cosinusse in linearische Sinusse und Cosinusse bloß die Werthe von  $i$  und  $i'$  der beiden in jedem partiellen Product in Betracht kommenden Argumente zu addiren und zu subtrahiren. Hier in der Mondtheorie, wo alle Argumente von der Form

$$ig + i'g' + i''\omega + i'''\omega'$$

sind, kommen auch die Werthe von  $i''$  und  $i'''$  bei den genannten Additionen und Subtractionen selbstverständlich in Betracht. Da diese aber im Vorhergehenden in den neunzehn Gruppen, die mit den Zahlen 1 bis 19 bezeichnet wurden, zusammengestellt sind, so hat man, ehe man an die Addition und Subtraction der betreffenden Werthe von  $i$  und  $i'$  geht, zu erwägen, welche Gruppen jedes einzelne Argument hervorbringen können. Dieses ist häufig sehr leicht im Kopfe auszuführen, allein man erleichtert sich die Sache sehr, wenn man sich eine Tafel der verschiedenen Combinationen bildet, die überhaupt ein Argument irgend einer Gruppe hervorbringen können. Die Tafeln, die ich zu diesem Zweck angewandt habe, will ich hierher setzen und erklären. Zuvor will ich aber die Bedeutung der Ziffern, die die verschiedenen Abtheilungen bezeichnen, wiederholen.

1.	bedeutet den Zusatz	$0\omega + 0\omega'$	zu $ig + i'g'$
2.	»	$2\omega - 2\omega'$	»
3.	»	$2\omega$	»
4.	»	$2\omega'$	»
5.	»	$2\omega + 2\omega'$	»
6.	»	$\omega - \omega'$	»
7.	»	$3\omega - 3\omega'$	»
8.	»	$\omega + \omega'$	»
9.	»	$3\omega - \omega'$	»
10.	»	$\omega - 3\omega'$	»
11.	»	$4\omega - 4\omega'$	»
12.	»	$4\omega - 2\omega'$	»
13.	»	$2\omega - 4\omega'$	»

14.	bedeutet den Zusatz	$5\omega - 5\omega'$	zu	$ig + ig'$
15.	„	„	„	$6\omega - 6\omega'$ „
16.	„	„	„	$6\omega - 4\omega'$ „
17.	„	„	„	$4\omega - 6\omega'$ „
18.	„	„	„	$4\omega$ „
19.	„	„	„	$4\omega'$ „

und hiemit ist die Richtigkeit der folgenden symbolischen Gleichungen leicht zu erkennen.

1.	=	$1. \pm 1.$	2.	=	$2. \pm 1.$
	=	$2. - 2.$		=	$11. - 2.$
	=	$3. - 3.$		=	$- 4. + 3.$
	=	etc.		=	$12. - 3.$
				=	$13. + 4.$
				=	$-19. + 5.$
11.	=	$11. \pm 1.$	15.	=	$15. \pm 1.$
	=	$2. + 2.$		=	$11. + 2.$
	=	$13. + 3.$			
	=	$12. - 4.$			
3.	=	$3. \pm 1.$	4.	=	$4. \pm 1.$
	=	$4. + 2.$		=	$-13. + 2.$
	=	$12. - 2.$		=	$3. - 2.$
	=	$5. - 4.$		=	$5. - 3.$
			12.	=	$12. \pm 1.$
				=	$3. + 2.$
				=	$11. + 4.$
				=	$18. - 4.$
			13.	=	$13. \pm 1.$
				=	$- 4. + 2.$
				=	$-19. + 3.$
				=	$11. - 3.$
16.	=	$16. \pm 1.$	17.	=	$17. \pm 1.$
	=	$12. + 2.$		=	$13. + 2.$
	=	$11. + 3.$		=	$15. - 3.$
	=	$15. + 4.$		=	$11. - 4.$
18.	=	$18. \pm 1.$	19.	=	$19. \pm 1.$
	=	$3. + 3.$		=	$-13. + 3.$
	=	$12. + 4.$		=	$4. + 4.$
	=	$2. + 5.$		=	$- 2. + 5.$

<p>6. = 6. + 1.          = -6. + 2.          = 7. - 2.          = -8. + 3.          = 9. - 3.          = 10. + 4.          = 8. - 4.</p>	<p>7. = 7. + 1.          = 6. + 2.          = 14. - 2.          = 10. + 3.          = 9. - 4.</p>
<p>14. = 14. + 1.          = 7. + 2.          = 11. + 6.</p>	<p>8. = 8. + 1.          = -10. + 2.          = 9. - 2.          = -6. + 3.          = 6. + 4.          = -8. + 5.</p>
<p>9. = 9. + 1.          = 8. + 2.          = 6. + 3.          = 7. + 4.</p>	<p>10. = 10. + 1.          = -8. + 2.          = 7. - 3.          = 6. - 4.</p>

Diese Gleichungen bilden bei der Berechnung der Producte einen Leitfaden, der die Arbeit sehr erleichtert.

§ 6. Integration der im Vorhergehenden entwickelten Differentialgleichungen. Berücksichtigung der Werthe von  $\Delta e$  und  $\Delta J$  in den Bewegungen des Perigäums und der Knoten.

87.

Nachdem im Vorhergehenden die Function  $T$  entwickelt, und die numerischen Werthe der Coefficienten derselben berechnet worden sind, ist daraus zuerst das Differential von  $W_0$  zu bilden und die Integration auszuführen. Dieses Differential steht zufolge des Art. 24 mit  $T$  in folgender Verbindung:

$$\frac{dW_0}{n_0 dt} = T + \frac{y}{\sqrt{1-e_0^2}} \left\{ \frac{e_0^2}{a_0^2} \left( \frac{dW_0}{dy} \right) - \frac{d \cdot e_0^2}{2a_0^2 dy} \left[ W_0 + \frac{h_0}{h} + 1 \right] \right\}$$

Da  $y$  eine Grösse erster Ordnung in Bezug auf die störende Kraft ist, so reicht man in dem damit multiplicirten Theile der vorstehenden Gleichung damit aus, dass man für  $\left( \frac{dW_0}{dy} \right)$ ,  $W_0$ ,  $\frac{h_0}{h}$  die Werthe substituirt, die die zunächst vorhergehende Annäherung gegeben hat.

So habe ich diese Integration in den »*Fundamenta etc.*« erklärt, und so habe ich sie in der That bei der Berechnung der Mondstörungen von Annäherung zu Annäherung ausgeführt.

Um diese Integration hier auf dieselbe Weise auszuführen, müsste ich die Werthe der oben genannten Functionen, welche diese in der vorletzten Annäherung erhalten haben, anführen, allein dieses ist unnöthig, da man die vorstehende Gleichung auch direct integriren kann. Ich werde hier um so mehr die directe Integration anwenden, da hierin der Beweis mit enthalten ist, dass die vorletzte Annäherung Werthe der Störungen gegeben hat, die von den definitiven, in den Mondtafeln angewandten nur unerheblich verschieden sind. Denn wenn dieses nicht der Fall wäre, so müsste die directe Integration ein von der oben beschriebenen indirecten erheblich verschiedenes Resultat geben.

88.

Wenden wir uns zur Gleichung (7) und nehmen mit dieser die Veränderungen vor, die erforderlich sind, um  $W_0$  aus  $\bar{W}$  zu erhalten. Diese Veränderungen bestehen in nichts Weiterem als dass  $\bar{r}$  in  $\varphi_0$  und  $\bar{f}$  in  $\varphi_0$  verwandelt werden müssen. Es wird demzufolge

$$W_0 = -1 - \frac{h_0}{h} + \frac{2h_0 e_0}{h_0 a_0 (1 - e_0^2)} \{1 + e \cos(\varphi_0 + n_0 y t + \pi_0 - \chi)\}$$

Führen wir hierin die Elemente

$$\mathcal{E} = -1 - \frac{h_0}{h} + 2 \frac{h}{h_0} - \frac{2e_0}{1 - e_0^2} \frac{h}{h_0} \{e \cos(\chi - n_0 y t - \pi_0) - e_0\}$$

$$\mathcal{I} = \frac{2}{1 - e_0^2} \frac{h}{h_0} \{e \cos(\chi - n_0 y t - \pi_0) - e_0\}$$

$$\mathcal{P} = \frac{2}{1 - e_0^2} \frac{h}{h_0} e \sin(\chi - n_0 y t - \pi_0)$$

ein, so wird

$$(25) \dots W_0 = \mathcal{E} + \mathcal{I} \left( \frac{e_0}{a_0} \cos \varphi_0 + \frac{1}{2} e_0 \right) + \mathcal{P} \frac{e_0}{a_0} \sin \varphi_0$$

wo die bei der Integration veränderlichen Functionen  $\mathcal{E}$ ,  $\mathcal{I}$ ,  $\mathcal{P}$  von den constanten getrennt sind. Die obigen Ausdrücke geben ausserdem die Relation

$$\mathcal{E} + \frac{1}{2} e_0 \mathcal{I} = 2 \frac{h}{h_0} - \frac{h_0}{h} - 1$$

von welcher wir Gebrauch machen werden.

89.

Setzen wir

$$V = T - \frac{y}{\sqrt{1-e_0^2}} \frac{h}{h_0} \frac{d \cdot e_0^2}{a_0^2 dy} \dots \dots \dots (26)$$

so geht zufolge der eben entwickelten Relation der Ausdruck für  $dW_0$  des vorvor. Art. in den folgenden über,

$$\begin{aligned} \frac{dW_0}{n_0 dt} = & V + \frac{y}{\sqrt{1-e_0^2}} \left\{ \frac{e_0^2}{a_0^2} \left( \frac{dW_0}{dy} \right) - \frac{d \cdot e_0^2}{2a_0^2 dy} W_0 \right\} \\ & + \frac{y}{\sqrt{1-e_0^2}} \left\{ \mathcal{E} + \frac{3}{2} e_0 \mathcal{I} \right\} \frac{d \cdot e_0^2}{2a_0^2 dy} \end{aligned}$$

Der Ausdruck für  $W_0$  des vor. Art. giebt aber

$$\left( \frac{dW_0}{dy} \right) = -\mathcal{I} \frac{\sin \varphi_0}{\sqrt{1-e_0^2}} + \mathcal{P} \frac{\cos \varphi_0 + e_0}{\sqrt{1-e_0^2}}$$

und ausserdem ist

$$\frac{d \cdot e_0^2}{2a_0^2 dy} = \frac{e_0 e_0 \sin \varphi_0}{a_0 \sqrt{1-e_0^2}}$$

und hieraus ergibt sich leicht

$$\begin{aligned} \frac{y}{\sqrt{1-e_0^2}} \left\{ \frac{e_0^2}{a_0^2} \left( \frac{dW_0}{dy} \right) - \frac{d \cdot e_0^2}{2a_0^2 dy} W_0 \right\} + \frac{y}{\sqrt{1-e_0^2}} \left\{ \mathcal{E} + \frac{3}{2} e_0 \mathcal{I} \right\} \frac{d \cdot e_0^2}{2a_0^2 dy} = \\ -y \mathcal{I} \frac{e_0}{a_0} \sin \varphi_0 + y \mathcal{P} \frac{e_0}{a_0} \cos \varphi_0 \end{aligned}$$

Es wird daher

$$\frac{dW_0}{n_0 dt} = V - y \mathcal{I} \frac{e_0}{a_0} \sin \varphi_0 + y \mathcal{P} \frac{e_0}{a_0} \cos \varphi_0 \dots \dots \dots (27)$$

90.

Die Function  $V$ , die durch die Gleichung (26) mit  $T$  verbunden ist, hat zufolge dieser Gleichung augenscheinlich dieselbe Form wie  $T$ , und die Form dieser Function ist aus den vorhergehenden Entwicklungen sichtbar. Heben wir nun aus dem vollständigen Ausdruck von  $V$  irgend drei Glieder aus, die von derselben Function von  $t$  abhängen, so bekommen wir

$$\begin{aligned} V = & A_0 \sin(n_0 \beta t + \theta) + A_{-1} \sin(-\gamma + n_0 \beta t + \theta) \\ & + A_1 \sin(\gamma + n_0 \beta t + \theta) \end{aligned}$$

wo  $A_0, A_{-1}, A_1$  numerische Coefficienten bezeichnen, und die Ausdrücke von  $\beta$  und  $\theta$  aus den vorhergehenden Entwicklungen von  $T$  leicht zu entnehmen sind. Es folgt hieraus, dass im Integral aus den obigen Gliedern die folgenden entstehen müssen,

$$\begin{aligned} W_0 = & \Pi_0 \cos(n_0 \beta t + \theta) + \Pi_{-1} \cos(-\gamma + n_0 \beta t + \theta) \dots \dots (28) \\ & + \Pi_1 \cos(\gamma + n_0 \beta t + \theta) \end{aligned}$$

und die nächste Aufgabe ist,  $\Pi_0, \Pi_{-1}, \Pi_1$  in Functionen von  $A_0, A_{-1}, A_1$  darzustellen, womit die Integration ausgeführt ist.

Wir haben schon oben in § 3 eingeführt,

$$\frac{e_0}{a_0} \cos \varphi_0 + \frac{1}{2} e_0 = f \cos \gamma + \dots, \quad \frac{e_0}{a_0} \sin \varphi_0 = f'' \sin \gamma + \dots$$

wo die Coefficienten  $f$  und  $f''$  folgende Ausdrücke haben,

$$f = 1 - \frac{8}{8} e^2 + \frac{5}{192} e^4 - \frac{7}{9216} e^6 + \dots$$

$$f'' = 1 - \frac{5}{8} e^2 - \frac{11}{192} e^4 - \frac{457}{9216} e^6 + \dots$$

und hiemit wird die Gleichung (25)

$$W_0 = \mathcal{Z} + \mathcal{Y} f \cos \gamma + \mathcal{Y} f'' \sin \gamma$$

Dem Ausdruck (28) von  $W_0$  können wir aber auch folgende Form geben,

$$W_0 = \Pi_0 \cos(n_0 \beta t + \theta) + \{\Pi_{-1} + \Pi_1\} \cos(n_0 \beta t + \theta) \cos \gamma \\ + \{\Pi_{-1} - \Pi_1\} \sin(n_0 \beta t + \theta) \sin \gamma$$

woraus folgt, dass den hier in Betracht gezogenen drei Gliedern von  $W_0$  die folgenden in  $\mathcal{Z}, \mathcal{Y}, \mathcal{Y}$  entsprechen,

$$\mathcal{Z} = \Pi_0 \cos(n_0 \beta t + \theta)$$

$$\mathcal{Y} = \frac{\Pi_{-1} + \Pi_1}{f} \cos(n_0 \beta t + \theta)$$

$$\mathcal{Y} = \frac{\Pi_{-1} - \Pi_1}{f''} \sin(n_0 \beta t + \theta)$$

wodurch

$$-y \mathcal{Y} \frac{e_0}{a_0} \sin \varphi_0 + y \mathcal{Y} \frac{e_0}{a_0} \cos \varphi_0 = -(\mathcal{l} \Pi_{-1} - \mathcal{l} \Pi_1) \sin(n_0 \beta t + \theta) \\ + (\mathcal{l} \Pi_{-1} - \mathcal{l} \Pi_1) \sin(-\gamma + n_0 \beta t + \theta) \\ + (\mathcal{l} \Pi_{-1} - \mathcal{l} \Pi_1) \sin(\gamma + n_0 \beta t + \theta)$$

wird, wenn man zur Abkürzung

$$\mathcal{l} = \frac{3ey}{2f''}, \quad \mathcal{l}' = \frac{f^2 + f''^2}{2ff''} y, \quad \mathcal{l}'' = \frac{f^2 - f''^2}{2ff''} y$$

setzt. Substituirt man nun die entwickelten Glieder in (27), so bekommt man die identische Gleichung

$$(29) \dots \begin{cases} 0 = \{\beta \Pi_0 + A_0 - \mathcal{l} \Pi_{-1} + \mathcal{l} \Pi_1\} \sin(n_0 \beta t + \theta) \\ + \{\beta \Pi_{-1} + A_{-1} + \mathcal{l}' \Pi_{-1} - \mathcal{l}'' \Pi_1\} \sin(-\gamma + n_0 \beta t + \theta) \\ + \{\beta \Pi_1 + A_1 + \mathcal{l}'' \Pi_{-1} - \mathcal{l}' \Pi_1\} \sin(\gamma + n_0 \beta t + \theta) \end{cases}$$

woraus zuerst

$$0 = \beta \Pi_0 + A_0 - \mathcal{l} \Pi_{-1} + \mathcal{l} \Pi_1$$

$$0 = \beta \Pi_{-1} + A_{-1} + \mathcal{l}' \Pi_{-1} - \mathcal{l}'' \Pi_1$$

$$0 = \beta \Pi_1 + A_1 + \mathcal{l}'' \Pi_{-1} - \mathcal{l}' \Pi_1$$

und hieraus durch die Elimination

$$\begin{aligned} \Pi_{-1} &= -\frac{\beta - l'}{\beta^2 - l'^2 + l''^2} A_{-1} - \frac{l''}{\beta^2 - l'^2 + l''^2} A_1 \\ \Pi_1 &= -\frac{\beta + l'}{\beta^2 - l'^2 + l''^2} A_1 + \frac{l''}{\beta^2 - l'^2 + l''^2} A_{-1} \\ \Pi_0 &= -\frac{A_0}{\beta} + \frac{l}{\beta} \Pi_{-1} - \frac{l}{\beta} \Pi_1 \end{aligned}$$

folgt, womit die Integration im Allgemeinen ausgeführt ist.

91.

Die oben gefundenen Gleichungen können für die Anwendung ein wenig vereinfacht werden. Aus den obigen Ausdrücken für  $l'$  und  $l''$  findet man

$$l'^2 - l''^2 = y^2$$

Die Ausdrücke für  $f$  und  $f''$  geben ferner

$$\begin{aligned} \frac{f}{f''} &= 1 + \frac{1}{4} e^2 + \frac{23}{96} e^4 + \frac{327}{1536} e^6 + \dots \\ \frac{f''}{f} &= 1 - \frac{1}{4} e^2 - \frac{17}{96} e^4 - \frac{167}{1536} e^6 - \dots \end{aligned}$$

woraus

$$\begin{aligned} l' &= y \left( 1 + \frac{1}{32} e^4 + \frac{5}{96} e^6 + \dots \right) \\ l'' &= y \left( \frac{1}{4} e^2 + \frac{5}{24} e^4 + \frac{247}{1536} e^6 + \dots \right) \end{aligned}$$

folgt. In diesem Ausdruck von  $l'$  ist der Coefficient von  $y$  so wenig von Eins verschieden, dass selbst für die grössten in der Mondbewegung vorkommenden Glieder unbedenklich  $l' = y$  gesetzt werden darf. Die drei zu Ende des vor. Art. gefundenen Gleichungen gehen daher für die Anwendung in die folgenden über,

$$\left. \begin{aligned} -\Pi_{-1} &= \frac{A_{-1}}{\beta + y} + \frac{l''}{\beta^2 - y^2} A_1 \\ -\Pi_1 &= \frac{A_1}{\beta - y} - \frac{l''}{\beta^2 - y^2} A_{-1} \\ -\Pi_0 &= \frac{A_0}{\beta} - \frac{l}{\beta} \Pi_{-1} + \frac{l}{\beta} \Pi_1 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (30)$$

wo

$$\begin{aligned} l'' &= y \left( \frac{1}{4} e^2 + \frac{5}{24} e^4 + \frac{247}{1536} e^6 \right) \\ l &= y \left( \frac{3}{2} e + \frac{15}{16} e^3 + \frac{43}{64} e^5 \right) \end{aligned}$$

ist. Diese Ausdrücke sind um so mehr in der Anwendung einfach, da die mit  $l''$  und  $l$  multiplicirten Glieder nur in einigen wenigen Coefficienten Merkliches geben.

92.

Das im Vorhergehenden entwickelte Integrationsverfahren erleidet eine Ausnahme für die Glieder, in welchen  $\beta = 0$  ist. Dieser Fall tritt nur ein Mal und zwar in der Abtheilung 1. ein. Die allgemeine Form der Argumente dieser Abtheilung ist, wie man gesehen hat,

$$ig + i'g'$$

und da  $g = n_0t + c_0$ ,  $g' = n'_0t + c'_0$  ist, so wird

$$ig + i'g' = n_0(i + i'u)t + ic_0 + i'c'_0$$

wenn wir wie oben  $u = \frac{n'_0}{n_0}$  setzen. Es wird also hier

$$\beta = i + i'u, \theta = ic_0 + i'c'_0$$

und für  $i = i' = 0$  wird

$$\beta = 0, \theta = 0$$

in allen übrigen Abtheilungen können diese Werthe nicht vorkommen, wovon man sich leicht überzeugen kann.

Betrachten wir nun zuerst das erste Glied der identischen Gleichung (29), so zeigt sich, dass in dieser wegen  $\sin(n_0\beta t + \theta) = 0$  der Coefficient willkürlich ist, folglich ist im allgemeinen Problem auch  $\Pi_0$  willkürlich. Ich werde diese Constante wie früher mit  $b$  bezeichnen.\*)

Wenden wir uns zu den beiden anderen Gliedern der identischen Gleichung (29), so ist zu bedenken, dass für  $\beta = 0$  und  $\theta = 0$  in den obigen Ausdrücken für  $V$  und  $W_0$  die beiden letzten Glieder sich in Ein Glied zusammenziehen, und in Bezug auf diese

$$\begin{aligned} V &= (A_1 - A_{-1}) \sin \gamma \\ W_0 &= (\Pi_1 + \Pi_{-1}) \cos \gamma \end{aligned}$$

wird. Die beiden letzten Glieder in (29) ziehen sich folglich auch in Ein Glied zusammen, und geben

$$0 = A_1 - A_{-1} + (l'' - l') (\Pi_1 + \Pi_{-1})$$

oder wenn man die Ausdrücke für  $l''$  und  $l'$  substituirt und zur Abkürzung

$$A_1 - A_{-1} = k, \Pi_1 + \Pi_{-1} = \xi$$

setzt,

$$(31) \dots\dots\dots 0 = fk - yf''\xi$$

---

\*) Genau genommen habe ich sie in den »Fundamenta etc.« —  $b$  genaunt.



Diese Gleichung enthält die beiden Unbekannten  $y$  und  $\xi$ , und da keine zweite Gleichung zwischen diesen beiden Unbekannten da ist, so ist die eine derselben im allgemeinen Problem willkürlich, und bildet überhaupt das zweite Glied der dem Integral hinzuzufügenden willkürlichen Constante. Es ist hier  $\xi$  die willkürliche Grösse, von welcher sich übrigens durch vollständige Entwicklung der vorstehenden Gleichung zeigen lässt, dass sie sich mit der Excentricität verbindet; die obige Gleichung dient daher zur Bestimmung von  $y$ . Der ganze Ausdruck der unserm Integral hinzuzufügenden willkürlichen Constante ist nun

$$b + \xi \cos \gamma$$

wenn man von den Gliedern, die mit  $\cos 2\gamma$ , etc. multiplicirt sind, absieht, die gleichwie die übrigen ähnlichen durch den Satz des Art. 35 berechnet werden müssen. Das dritte in der Planetentheorie vorkommende mit  $\sin \gamma$  multiplicirte Glied dieser Constante fällt in der Mondtheorie weg, indem es sich der in den Argumenten explicite enthaltenen Länge des Mondperigäums einverleibt.

Diese Integrationsconstante ist nur in der allgemeinen Aufgabe in der That willkürlich, in jeder speciellen Anwendung derselben auf irgend einen bestimmten Himmelskörper aber bestimmt, wie ich vor einigen Jahren Veranlassung hatte aufs Ausführlichste erörtern zu müssen. Die Bestimmung dieser Constante richtet sich nach der Beschaffenheit der Elemente, die der Berechnung der Störungen zu Grunde gelegt worden sind. Hier, wo wir die mittleren Elemente der Mondbahn zu Grunde gelegt haben, muss zufolge meiner früheren Auseinandersetzungen  $b$  so bestimmt werden, dass in dem vollständigen Ausdruck von  $n_0 z$  ausser dem Gliede  $n_0 t$  kein der Zeit proportionales Glied, und  $\xi$  so, dass in demselben Ausdruck kein mit  $\sin g$  multiplicirtes Glied enthalten ist.

93.

Um aus der Gleichung (31)  $y$  zu bestimmen, muss sie weiter entwickelt werden, da  $k$  Function von  $y$  ist. Da

$$\frac{d \cdot e_0^2}{a_0^2 d\gamma} = \frac{2e_0 \sin \gamma_0}{a_0 \sqrt{1-e_0^2}} = \frac{2f'e}{\sqrt{1-e^2}} \sin \gamma$$

so wird die Gleichung (26) zuerst

$$V = T - y \frac{h}{h_0} \frac{2f'e}{\sqrt{1-e^2}} \sin \gamma \dots \dots \dots (32)$$

und da wir überhaupt jetzt in dieser Gleichung nur auf das mit  $\sin \gamma$  multiplicirte Glied Rücksicht zu nehmen haben, so können wir setzen

$$\frac{h}{h_0} = 1 + c$$

indem die periodischen Glieder dieser Function hier keine Wirkung ausüben. Der numerische Werth von  $c$  ist im Art. 69 angegeben, und befindet sich neben dem Argument 0,0 der Abtheilung 1. Sei ausserdem

$$T = M \sin \gamma$$

dann ist der numerische Werth von  $M$  der, welcher im Art. 76 neben dem Argument 1,0,0 in der Abtheilung 1. angegeben ist. Da wir schon oben  $V = k \sin \gamma$  gesetzt haben, so giebt die obige Gleichung

$$k = M - y (1 + c) \frac{2f'e}{1 - e^2}$$

und substituiren wir diesen Ausdruck von  $k$  in (31), so ergibt sich

$$(33) \dots \dots \dots y = \frac{fM(1 - e^2)}{2eff' + 2celf' + \xi f'(1 - e^2)}$$

woraus  $y$  bestimmt werden muss.

## 94.

Es giebt noch einen Fall, in welchem die im Art. 91 für die Integration entwickelten Ausdrücke nicht angewandt werden können, nemlich den, wo entweder  $\beta - y$  oder  $\beta + y$  sehr klein, oder gar Null wird, und in welchem daher ein anderes Verfahren angewandt werden muss. In Bezug auf die Glieder, die in dieser Abhandlung berechnet werden, tritt dieser Fall nicht ein, weshalb ich ihn hier unerörtert lasse.

## 95.

Wenden wir uns jetzt zu der Integration der Gleichungen, die die Breitenstörungen geben, und zwar zuerst zu denen für  $P$  und  $Q$ . Diese sind zufolge des Vorhergehenden

$$\begin{aligned} \frac{dP}{n_0 dt} &= -\alpha Q + B \\ \frac{dQ}{n_0 dt} &= \alpha P + C \end{aligned}$$

Heben wir nun aus den vollständigen Ausdrücken von  $B$  und  $C$  irgend zwei correspondirende Glieder aus, und bezeichnen sie mit

$$B = I \cos (n_0 \beta t + \theta)$$

$$C = A \sin (n_0 \beta t + \theta)$$

welchen in  $P$  und  $Q$  die Glieder

$$P = \Theta \sin (n_0 \beta t + \theta)$$

$$Q = H \cos (n_0 \beta t + \theta)$$

entsprechen sollen. Die Substitution dieser Ausdrücke in die vorstehenden Gleichungen führt sogleich auf die Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} (\beta \Theta = -\alpha H + I) \cos (n_0 \beta t + \theta) \\ (-\beta H = \alpha \Theta + A) \sin (n_0 \beta t + \theta) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (34)$$

woraus durch die Elimination

$$\left. \begin{aligned} \Theta = \frac{\beta}{\beta^2 - \alpha^2} I + \frac{\alpha}{\beta^2 - \alpha^2} A \\ H = -\frac{\beta}{\beta^2 - \alpha^2} A - \frac{\alpha}{\beta^2 - \alpha^2} I \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (35)$$

hervorgeht, womit die Integration im Allgemeinen ausgeführt ist.

96.

Wir haben wieder für  $\beta = 0$ , welche Bedingung auch hier  $\theta = 0$  nach sich zieht, einen Ausnahmefall zu betrachten. Die zweite Gleichung (34) ist in diesem Falle schon dadurch erfüllt, dass  $\sin (n_0 \beta t + \theta) = 0$  wird. Der Coefficient bleibt daher bei der allgemeinen Integration unbestimmt, und bildet die willkürliche Constante. Da nun dem Vorhergehenden zufolge

$$Q = 2 \sin \frac{1}{2} J_0 + \delta Q$$

ist, wo  $\delta Q$  von der Ordnung der Störungen ist, so hat hier die willkürliche Constante den Ausdruck  $2 \sin \frac{1}{2} J_0 + k$ , wo  $k$  von der Ordnung der Störungen ist, und bildet das constante Glied im vollständigen Ausdruck von  $Q$ . Nennen wir dieses Glied, der im vor. Art. eingeführten Bezeichnung gemäss,  $H_0$ , so wird also

$$H_0 = 2 \sin \frac{1}{2} J_0 + k$$

und da hier unter  $J_0$  die mittlere Neigung der Mondbahn gegen die Ecliptik verstanden wird, so muss  $k$  so bestimmt werden, dass im Ausdruck des Sinus der Mondbreite, dessen Hauptglied  $\sin J_0 \sin (\bar{f} + \omega)$  ist, kein mit  $\sin (g + \omega)$  multiplicirtes Glied vorkommt, oder mit andern Worten, dass der Coefficient des in dem Ausdruck der Störungen des Sinus der Mondbreite mit  $\sin (g + \omega)$  multiplicirten Gliedes gleich Null ist.

Wenden wir uns nun zur ersten Gleichung (34) für den Fall  $\beta = 0$ , und substituiren darin den oben gefundenen Ausdruck für  $H_0$ , so muss um dieser Gleichung zu genügen,

$$-\alpha (2 \sin \frac{1}{2} J_0 + k) + I_0 = 0$$

sein, wenn wir mit  $I_0$  das constante Glied im vollständigen Ausdruck von  $B$ , dessen numerische Coefficienten im Art. 82 gegeben sind, bezeichnen. Diese Gleichung giebt

$$(36) \dots\dots\dots \alpha = \frac{I_0}{2 \sin \frac{1}{2} J_0 + k}$$

wodurch der Werth von  $\alpha$  gegeben ist.

Die zweite willkürliche Constante, die diesen beiden Integralen zukommt, fällt mit dem Bogen  $\theta$  zusammen. Wenn  $\beta$  nahe  $= \pm \alpha$ , so kann sich auch hier ereignen, dass die Gleichungen (35) nicht angewandt werden können. Die alsdann nöthigen Abänderungen sollen erklärt werden, wenn der Fall eintritt.

97.

Es ist noch die Integration darzulegen, wodurch die im Art. 51 eingeführte Function  $\delta\delta K$  erhalten wird. Diese ist sehr einfach. Sei der Ausdruck des Differentials davon, dessen numerische Coefficienten im Art. 85 entwickelt wurden, zufolge des Art. 51

$$\frac{d\delta\delta K}{ndt} = \sum X \cos (n\beta t + \theta) + \eta - \alpha \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} J_0$$

und dem entsprechend im Integral

$$\delta\delta K = \sum R \sin (n\beta t + \theta)$$

so ist im Allgemeinen für jedes Glied

$$(37) \dots\dots\dots R = \frac{X}{\beta}$$

wo aber wieder der Fall  $\beta = 0$  ausgenommen werden muss. Bezeichnen wir den Coefficienten des constanten Gliedes unter dem Summenzeichen  $\sum$  im Ausdruck des Differentials von  $\delta\delta K$  mit  $X_0$ , so wird in diesem Falle

$$0 = X_0 + \eta - \alpha \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} J_0$$

woraus

$$(38) \dots\dots\dots \eta = \alpha \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} J_0 - X_0$$

hervorgeht. Diese Gleichung dient daher zur Bestimmung von  $\eta$ .

## 98.

Ehe wir zur Bestimmung der numerischen Werthe der Bewegungen des Perigäums und der Knoten übergehen können, müssen wir den im Art. 52 angeführten Umstand, dass die Werthe von  $e$  und  $J$ , die schliesslich durch die Vergleichung der Theorie mit den Beobachtungen hervorgegangen sind, kleine Unterschiede von den der Berechnung der Störungen zu Grunde gelegten Werthen zeigen, berücksichtigen. da er einigen Einfluss auf die genannten Bewegungen hat. Der geringe Betrag dieser a. a. O. mit  $\Delta e$  und  $\Delta J$  bezeichneten Unterschiede macht deren Berücksichtigung sehr einfach, und es hat deswegen namentlich  $\Delta e$  auf die Bewegung des Perigäums nur sehr kleinen, unmerklichen Einfluss. Der Grund davon ist der folgende. Im Ausdruck (33) für  $y$  ist der Zähler  $M$  durchweg mit  $e$  multiplicirt, und der Nenner ebenfalls, indem auch der analytische Ausdruck von  $\xi$  mit  $e$  multiplicirt ist; es hebt sich daher in der Hauptsache der Einfluss von  $\Delta e$  auf  $y$  auf. Nun enthalten freilich auch die einzelnen Theile des Ausdrucks (33) Glieder, die mit  $e^3, e^5, \text{etc.}$  multiplicirt sind, allein wegen des geringen Betrages von  $\Delta e$  ist die Wirkung davon auf diese Glieder unmerklich. In Bezug auf die Knotenbewegung findet für  $\Delta J$  ein ähnliches Verhalten statt. Alle Glieder des Ausdrucks (36) für  $\alpha$  sind mit  $\sin \frac{1}{2}J$  multiplicirt, und die Wirkung einer Verbesserung dieses Factors ist daher Null, so dass nur die Wirkung von  $\Delta J$  auf die mit  $\sin \frac{3}{4}J, \text{etc.}$  multiplicirten Glieder übrig bleibt. Da im Ausdruck (36) auch Glieder vorkommen, die mit  $e^2, e^4, \text{etc.}$  multiplicirt sind, so ist  $\Delta e$  nicht ohne Wirkung, die aber in unserem Falle nur sehr klein sein kann.

## 99.

In meiner dritten Abhandlung über die Störungen der kleinen Planeten habe ich ausführlich gezeigt, wie man die Verbesserungen der Störungen berechnen kann, wenn alle der Rechnung zu Grunde gelegten Elemente mit Fehlern behaftet sind, im gegenwärtigen Falle stellt sich jedoch diese Verbesserung weit einfacher dar, theils weil wir uns nur mit zwei Elementen zu beschäftigen haben, und theils weil die Verbesserungen dieser Elemente so sehr klein sind.

Der Grundsatz, von welchem wir bei dieser Verbesserung der Störungen ausgehen müssen, ist selbstverständlich der, dass wir die Aus-

drücke der Differentiale der Störungen in Bezug auf  $e$  und  $J$  suchen, und darin die Incremente  $\Delta e$  und  $\Delta J$  nebst ihren Potenzen und Producten substituiren müssen, wodurch die Verbesserungen der Störungen mit jeder beliebigen Genauigkeit erhalten werden. In Bezug auf  $\Delta J$  ist diese Substitution bei der hier angewandten Methode sehr einfach, denn da ohne Rücksicht auf die Störungen  $Q = 2 \sin \frac{1}{2} J$  ist, so brauchen wir nur zu dem im Art. 66 angegebenen Werthe von  $\delta Q$  das Increment  $\frac{\Delta J}{\cos \frac{1}{2} J}$ , oder bloß  $\Delta J$ , hinzuzufügen, und damit die Rechnungen ohne weitere Abänderung der Formeln durchzuführen, da die Differentiale der Störungen nach  $P$  und  $Q$  ohnehin schon gegeben sind. In Bezug auf  $\Delta e$  ist etwas anders zu verfahren, da in der angewandten Methode  $e$  nicht als Veränderliche auftritt. Statt dessen dienen die Veränderlichen  $n\delta z$ ,  $\nu$  und  $\delta \frac{h_0}{h}$ , und man braucht daher nur den Einfluss von  $\Delta e$  auf diese Veränderlichen zu ermitteln, und die daraus folgenden Incremente  $n\Delta z$ ,  $\Delta \nu$  und  $\Delta \frac{h_0}{h}$  den Werthen von  $n\delta z$ ,  $\nu$  und  $\delta \frac{h_0}{h}$  der Artt. 66 u. 69 hinzuzufügen und damit die Rechnung fortzusetzen. Die im Vorhergehenden mit unten angehängter Null bezeichneten Functionen dürfen hiebei nicht geändert werden, sondern müssen die nemlichen numerischen Werthe behalten, die sie im Vorhergehenden bekommen haben.

100.

Zufolge des Vorhergehenden ist mit bloßer Rücksicht auf den vorliegenden Fall

$$\begin{aligned} \frac{d\delta z}{dt} &= 2 \left( \frac{r}{a} \cos f + \frac{1}{2} e \right) \Delta e \\ \nu &= -\frac{1}{2} \frac{d\delta z}{dt} + \frac{1}{2} \delta \frac{h_0}{h} \\ \frac{1}{h} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{an} \end{aligned}$$

Die Entwicklung giebt mit ausreichender Genauigkeit

$$\begin{aligned} \frac{r}{a} \cos f + \frac{1}{2} e &= \cos g + \frac{1}{2} e \cos 2g + \dots \\ \Delta \frac{h_0}{h} &= -\frac{e}{1-e^2} \Delta e = -e_1 \Delta e \end{aligned}$$

wenn man hier  $1-e^2$  übergeht. Hiemit wird

$$\begin{aligned} n\Delta z &= 2\Delta e \sin g + \frac{1}{2} e \Delta e \sin 2g + \dots \\ \Delta \nu &= -\frac{1}{2} e \Delta e - \Delta e \cos g - \frac{1}{2} e \Delta e \cos 2g + \dots \end{aligned}$$

$$2\Delta v + \Delta \frac{h}{h_0} = -2\Delta e \cos g - e\Delta e \cos 2g - \dots$$

wozu noch

$$\Delta Q = \Delta J$$

kommt.

101.

Wenn wir nun zuerst schlechtweg  $\Delta J$  in der Bewegung des Perigäums berücksichtigen, so ist blos das Product des Coefficienten des Arguments 1,0,0 in 1. des Ausdrucks von  $N$  für  $T$  mit  $\Delta J$  den bisherigen Gliedern hinzuzufügen. Der Art. 71 giebt diesen Coefficienten  $= -31,22$ , und der Art. 52 giebt  $\Delta J = -5,33$ ; das Product dieser beiden Grössen ist

$$= + 0,00081$$

Gehen wir einen Schritt weiter und berücksichtigen auch die Producte von  $\Delta J$  mit  $\delta P$  und  $\delta Q$ , so ist leicht zu finden, dass die daher rührende Verbesserung in dem Product

$$(H\delta P + N\delta Q) \frac{\Delta J}{2 \sin \frac{1}{2} J_0}$$

besteht. Die betreffenden Tafeln des Art. 72 geben

$$H\delta P + N\delta Q = + 0,12382$$

und hiemit wird

$$(H\delta P + N\delta Q) \frac{\Delta J}{2 \sin \frac{1}{2} J_0} = - 0,00003$$

also sehr klein. Addiren wir nun die beiden berechneten Glieder, so wird ihre Summe

$$= + 0,00078$$

die ganze Verbesserung, die der Coefficient  $M$  des Ausdrucks (33) wegen  $\Delta e$  und  $\Delta J$  bekommt, da, wie oben erklärt wurde,  $\Delta e$  nichts Merkliches geben kann.

Der Art. 52 giebt  $\Delta e = -0,25$ , und hiemit geben die Ausdrücke des vor. Art.

$$n\Delta z = -0,50 \sin g - 0,01 \sin 2g$$

$$2\Delta v + \Delta \frac{h}{h_0} = + 0,50 \cos g + 0,03 \cos 2g$$

Multiplicirt man diese mit den betreffenden Gliedern von  $\left(\frac{dB_0}{dg}\right)$  und  $\bar{B}$ , so wird die Summe der Producte

$$= - 0,00002$$

und diese ist die ganze Verbesserung, die der Coefficient  $T_0$  des Aus-

drucks (36) wegen  $\Delta e$  bekommt. Die Verbesserung wegen  $\Delta J$  kann aus dem im Art. 98 angeführten Grunde auch nur klein werden, allein da hier  $\Delta J$  beträchtlich grösser ist wie  $\Delta e$ , so will ich sie berechnen. Zuerst ist, gleichwie oben, das Product des constanten Gliedes von  $N$  für  $B$  mit  $\Delta J$  zu berechnen. Dieses Glied ist zufolge des Art. 80  $= +862''77$ , und da  $\Delta J = -5''33$  ist, so wird dieses Product

$$= -0''02230$$

Ferner ist wieder das Product

$$(H\delta P + N\delta Q) \frac{\Delta J}{2 \sin \frac{1}{2} J}$$

zu berücksichtigen, in welchem, wenn wir ganz genau verfahren wollen, das Product des constanten Gliedes von  $N$  mit dem constanten Gliede von  $\delta Q$  ausser Berücksichtigung gelassen werden muss. Aus dem Art. 81 ergibt sich unter dieser Bedingung

$$H\delta P + N\delta Q = -1''01877 - 1''04640 - 0''14514 = -2''21031$$

und hieraus

$$(H\delta P + N\delta Q) \frac{\Delta J}{2 \sin \frac{1}{2} J} = +0''00064$$

und die ganze Verbesserung von  $T_0$  wegen  $\Delta J$  wird also

$$= -0''02166$$

Es muss nun aber auch die Constante  $k$  im Nenner des Ausdrucks (36) das Increment  $\Delta J$  bekommen, und hiemit wird

$$\Delta \alpha = - \frac{T_0}{(2 \sin \frac{1}{2} J_0 + k)^2} \Delta J$$

oder die Verbesserung von  $T_0$ , wenn wir den bisherigen Nenner  $2 \sin \frac{1}{2} J_0 + k$  beibehalten wollen,

$$= - \frac{T_0}{2 \sin \frac{1}{2} J_0 + k} \Delta J$$

Nun giebt der Art. 82  $T_0 = +75''11$  und hiemit wird

$$- \frac{T_0}{2 \sin \frac{1}{2} J_0 + k} \Delta J = +0''02157$$

fügt man diesem die oben gefundene Verbesserung hinzu, so wird die vollständige Verbesserung von  $T_0$  wegen  $\Delta J$

$$= -0''00009$$

also sehr klein.

In Bezug auf die Function  $X$  des Art. 85 ist im constanten Gliede die Verbesserung



$$- \left\{ B \frac{1 + \sin \frac{1}{2} J}{4 \cos \frac{1}{2} J} + \alpha F \right\} \Delta J = + 0,0010$$

anzubringen.

102.

Da nun alle von der störenden Kraft der Sonne herrührenden Glieder, die auf  $y$ ,  $\alpha$ ,  $\eta$  Wirkung äussern, berechnet sind, so können wir die Berechnung der Zahlenwerthe der letzt genannten Grössen nach den Ausdrücken (33), (36), (38) vornehmen. Für den mit  $M$  bezeichneten Coefficienten haben wir aus

$$\begin{array}{l} \text{Art. 76} \dots +194,89447 \\ \text{» 77} \dots -0.00721 \\ \text{» 78} \dots +0.00167 \\ \text{» 101} \dots +0.00078 \end{array} \left. \begin{array}{l} \\ \\ \text{aus } T^{(1)} \text{ und } T^{(2)} \\ \text{aus } T^{(2)} \\ \text{wegen } \Delta J \end{array} \right\}$$

$$M = +194,88671$$

Es ist ferner

$$\begin{aligned} \log f &= 9,9995090 \\ \log f'' &= 9,9994809 \\ c &= +973,799 \text{ aus Art. 69} \end{aligned}$$

und weiter unten wird sich ergeben, dass

$$\xi = -310,321$$

ist. Fügen wir noch aus dem Art. 52

$$\begin{aligned} \log e &= 8,7395786 \\ \log (1 - e^2) &= 9,9986890 \end{aligned}$$

hinzu, so ist alles beisammen, welches zur Berechnung von  $y$  erforderlich ist. Den Logarithmus des Nenners des Ausdrucks (33) finde ich

$$= 9,0353919$$

und hiemit wird

$$y = +1764,3718$$

Zur Bestimmung von  $\alpha$  durch (36) haben wir für  $T_0$

$$\begin{array}{l} \text{Art. 82} \dots +75,10723 \text{ aus } B^{(1)} \text{ und } B^{(2)} \\ \text{» 83} \dots +0.00093 \text{ aus } B^{(2)} \\ \text{» 101} \dots -0.00011 \text{ wegen } \Delta e \text{ und } \Delta J \end{array}$$

$$T_0 = +75,10805$$

Aus dem Art. 52 ist

$$\log 2 \sin \frac{1}{2} J = 8,9532574$$

und aus dem Art. 66

$$k = +34''700$$

hiemit wird der Logarithmus des Nenners des Ausdrucks (36)

$$= 8,9540703$$

und man bekommt

$$\alpha = 834''8648$$

Aus dem Art. 85 ist  $X_0$

$$+0''0456$$

$$\text{Art. 104} \dots +0.0010 \text{ wegen } \Delta J$$

$$X_0 = +0''0466$$

und hiemit giebt der Ausdruck (38)

$$\eta = +1''6399$$

womit die von der störenden Kraft der Sonne herrührenden Theile dieser Grössen gegeben sind.

### 103.

Um die im vor. Art. erhaltenen Werthe von  $y$ ,  $\alpha$ ,  $\eta$  mit den Resultaten der Beobachtungen vergleichen zu können, müssen noch die in den Artt. 78 und 83 angegebenen Umstände, die mitwirkend sind, berücksichtigt werden. Um den Gang der Darstellung, welche sich nur auf die von der Sonne bewirkten Ungleichheiten bezieht, nicht zu unterbrechen, habe ich die Entwicklung der zu  $y$  und  $\alpha$  hinzukommenden Glieder an den Schluss dieser Abhandlung verlegt und entnehme daraus die folgenden Zahlenwerthe. Zu  $y$  kommt

+0''0251	vermöge	der	Einwirkung	der	Planetenmassen
+0.0705	»	»	»	»	der Figur der Erde
+ $y'$	»	»	»	»	der Figur des Mondes

im Ganzen  $+0''0956 + y'$

und zu  $\alpha$  kommt

-0''0065	wegen	Einwirkung	der	Mondmasse
+0.0184	»	»	»	der Planetenmassen
+0.0709	»	»	»	der Figur der Erde
+ $\alpha'$	»	»	»	der Figur des Mondes

$$+0''0825 + \alpha' \text{ im Ganzen.}$$

Die hieraus folgende Aenderung von  $\gamma$  ist so klein, dass man sie übergehen kann. Die obigen Wirkungen der Mond- und der Planetenmassen haben ohne Weiteres aus der Theorie berechnet werden können, in Bezug auf die Wirkung der Figur der Erde ist der Umstand benutzt worden, dass diese auch in der Länge und der Breite des Mondes merkliche Ungleichheiten verursacht. Nachdem der Coefficient der daher rührenden Breitenstörung durch Vergleichung der Theorie mit den Beobachtungen bestimmt worden war, waren die obigen von der Figur der Erde herrührenden Theile von  $\gamma$  und  $\alpha$  gegeben, da die Theorie eine Relation zwischen diesen Theilen und jenem Coefficienten festsetzt. In Bezug auf die Einwirkung der Figur des Mondes ist ein solches Auskunftsmittel nicht vorhanden, da die periodischen Störungen, die davon herrühren, so klein sind, dass sie sich der Beobachtung entziehen. Es blieb daher hiefür kein anderes Mittel übrig als die oben eingeführten unbestimmten Grössen  $\gamma'$  und  $\alpha'$  anzuwenden, und aus der Vergleichung des so entstehenden Resultats der Theorie mit den Beobachtungen die Einwirkung der Figur des Mondes auf  $\gamma$  und  $\alpha$  zu ermitteln. Wenn man aus irgend einer anderen Erscheinung die Unterschiede der Trägheitsmomente des Mondkörpers hinreichend sicher ermitteln könnte, so würde man daraus  $\alpha'$  und  $\gamma'$  berechnen können, da sie Functionen dieser Unterschiede sind; aber dieses Mittel ist nicht vorhanden.

Da dieses sich so verhält, so ist die vollständige Bestimmung der Bewegungen des Perigäums und der Knoten des Mondes aus der Theorie unmöglich, und die von mir bei der Bearbeitung der Mondtafeln angewandte Bestimmung dieser Bewegungen durch die Beobachtungen ist daher auch kein Empirismus.

Aber selbst wenn es gelänge eine Erscheinung aufzufinden, durch welche man die Unterschiede der Trägheitsmomente des Mondkörpers mit einer für den hier verfolgten Zweck hinreichenden Sicherheit bestimmen könnte, müsste man doch auf die prioristische Bestimmung der Bewegungen des Perigäums und der Knoten des Mondes für den Zweck ihrer Anwendung in den Mondtafeln Verzicht leisten, da der Haupttheil derselben, nemlich der von der störenden Kraft der Sonne herrührende, sich mit der erforderlichen Genauigkeit nur auf höchst schwierige Weise berechnen lässt. Die Anzahl der Decimalen der Secunde, die in dieser Abhandlung mit in Rechnung gezogen worden ist, reicht für eine hinreichend genaue Bestimmung der Coefficienten der periodischen Un-

gleichheiten vollständig aus, denn man wird durch diese Anzahl von Decimalen die am Schwierigsten zu bestimmenden Coefficienten wenigstens bis auf ein Paar Hunderttheile der Secunde richtig erhalten, und die leichter zu bestimmenden Coefficienten genauer. Aber damit kann man in den jährlichen Bewegungen des Perigäums und der Knoten des Mondes die Hunderttheile von Secunden keineswegs verbürgen, während die Mondtafeln eine weit genauere Bestimmung dieser Bewegungen verlangen. Um dieses in der theoretischen Berechnung derselben leisten zu können, müsste man die Coefficienten der periodischen Störungen mit mehr Decimalen berechnen wie hier geschehen ist, und dadurch würde die Ausdehnung der Arbeit beträchtlich grösser werden, ohne sonstigen Nutzen zu schaffen.

Addiren wir nun die oben gefundenen verschiedenen Theile von  $y$  und  $\alpha$ , so ergibt sich

$$\begin{aligned} y &= 1761''4674 + \eta' \\ \alpha &= 834.9474 + \alpha' \\ \eta &= 1.6399 \end{aligned}$$

und multipliciren wir diese mit dem aus dem Art. 52 zu entnehmenden, und in Theilen des Kreisradius zu verwandelnden Werthe von  $n$ , so wird

$$\begin{aligned} ny &= 146707''20 + ny' \\ n\alpha &= 69540.18 + n\alpha' \\ n\eta &= 136.58 \end{aligned}$$

Die siderische Bewegung des Perigäums auf der Ecliptik hat  $n(y-2\eta)$ , und die siderische, rückläufige Bewegung der Knoten  $n(\alpha+\eta)$  zum Ausdruck; die vorstehenden Werthe geben

$$\begin{aligned} n(y-2\eta) &= 146434''04 + ny' \\ n(\alpha+\eta) &= 69676.76 + n\alpha' \end{aligned}$$

und dagegen habe ich mit Weglassung der höheren Decimalen nach Ausweis der Mondtafeln aus den Beobachtungen gefunden

$$\begin{aligned} \text{jährl. sid. Bew. des Perigäums} &= 146435''60 \\ \text{„ „ „ der Knoten} &= 69679.62 \end{aligned}$$

Vergleicht man diese mit den vorstehenden Werthen, so erhält man

$$\begin{aligned} ny' &= +1''56 \\ n\alpha' &= +2.85 \end{aligned}$$

oder in Theilen des Kreisradius

$$y' = +0,0000000908$$

$$\alpha' = +0,0000001659$$

die der Wirkung der Figur des Mondkörpers auf die Bewegungen des Perigäums und der Knoten des Mondes zuzuschreiben sind. Man wird unten sehen, dass daraus nicht unannehmbare Werthe der Unterschiede der Trägheitsmomente des Mondkörpers hervorgehen.

104.

Zur Ausführung der Integrationen müssen wir uns zuerst die Bedeutung der im Art. 90 eingeführten und mit  $\beta$  bezeichneten Grösse vergegenwärtigen. Diese ist in den verschiedenen Abtheilungen von  $T$  verschieden, und man findet leicht, dass in

- 1) . . .  $\beta = i + i'u$
- 2) . . .  $\beta = i + i'u + 2(y - 2\eta) - 2y'$
- 11) . . .  $\beta = i + i'u + 4(y - 2\eta) - 4y'$
- 15) . . .  $\beta = i + i'u + 6(y - 2\eta) - 6y'$
- 3) . . .  $\beta = i + i'u + 2(y - 2\eta) + 2(\alpha + \eta)$
- 4) . . .  $\beta = i + i'u + 2(\alpha + \eta) + 2y'$
- 5) . . .  $\beta = i + i'u + 2(y - 2\eta) + 4(\alpha + \eta) + 2y'$
- 12) . . .  $\beta = i + i'u + 4(y - 2\eta) + 2(\alpha + \eta) - 2y'$
- 13) . . .  $\beta = i + i'u + 2(y - 2\eta) - 2(\alpha + \eta) - 4y'$
- 16) . . .  $\beta = i + i'u + 6(y - 2\eta) + 2(\alpha + \eta) - 4y'$
- 17) . . .  $\beta = i + i'u + 4(y - 2\eta) - 2(\alpha + \eta) - 6y'$
- 18) . . .  $\beta = i + i'u + 4(y - 2\eta) + 4(\alpha + \eta)$
- 19) . . .  $\beta = i + i'u + 4(\alpha + \eta) + 4y'$
- 6) . . .  $\beta = i + i'u + (y - 2\eta) - y'$
- 7) . . .  $\beta = i + i'u + 3(y - 2\eta) - 3y'$
- 14) . . .  $\beta = i + i'u + 5(y - 2\eta) - 5y'$
- 8) . . .  $\beta = i + i'u + (y - 2\eta) + 2(\alpha + \eta) + y'$
- 9) . . .  $\beta = i + i'u + 3(y - 2\eta) + 2(\alpha + \eta) - y'$
- 10) . . .  $\beta = i + i'u + (y - 2\eta) - 2(\alpha + \eta) - 3y'$

wo  $y'$  nicht mit der im vor. Art. eben so bezeichneten Grösse identisch ist, sondern wie früher das Verhältniss der Bewegung des Sonnenperigäums zu  $n$  bezeichnet.

Aus dem Art. 52 erhalten wir jetzt, da die vorhergehenden Grössen in Theilen des Kreisradius ausgedrückt werden müssen,

$$u = 0,07543826$$

$$y' = 0.000000655$$

und der vor. Art. giebt

$$y - 2\eta = 0,008524027$$

$$\alpha + \eta = 0,004056055$$

$$y = 0,008539927$$

$$\alpha = 0,004048105$$

Hieraus ergeben sich die folgenden Werthe von  $\beta$  für den Index  $i$  von  $g$  und  $i'$  von  $g'$ . Es brauchten in jeder Abtheilung nur einige Werthe angegeben zu werden, da die übrigen daraus von selbst folgen.

$i, i'$	$\beta$	$i, i'$	$\beta$	$i, i'$	$\beta$
<b>1.</b>					
1,0	1	0,-2	-0.11678	3.	
2,0	2	1,-2	+0.88322	1,-2	0.8743
				2,-2	1.874
-2,-1	-2.0754	0,-3	-0.19221	<b>4.</b>	
-1,-1	-1.075438	1,-3	+0.80779	-1,4	-0.6901
0,-1	-0.07543826	-1,-4	-1.2677	0,4	+0.3099
1,-1	+0.9245617	0,-4	-0.26766	1,4	1.3099
2,-1	+1.924562	1,-4	+0.73234		
		0,-5	-0.34310	-1,3	-0.76557
-1,-2	-1.1509	1,-5	+0.65690	0,3	+0.23443
0,-2	-0.150877			1,3	1.2344
1,-2	+0.84942	1,-6	0.5815	-1,2	-0.84101
		2,-6	1.5815	0,2	0.158990
-1,-3	-1.226	2,-7	1.506	1,2	1.1590
0,-3	-0.2263	3,-7	2.506		
1,-3	+0.7737			-1,1	-0.9164
		<b>15.</b>		0,1	+0.083552
<b>2.</b>					
-1,-0	-0.98295	1,-5	0.674	1,1	1.0836
0,-0	+0.0170467	2,-5	1.674		
1,-0	+1.01705	1,-6	0.598	-1,0	-0.9919
		2,-6	1.598	0,0	+0.008113
-1,-1	-1.0584	2,-7	1.523	1,0	1.0081
0,-1	-0.05839452	3,-7	2.523		
1,-1	+0.9416085	<b>3.</b>		<b>5.</b>	
		1,2	1.176	-1,2	-0.8320
-1,-2	-1.13383	2,2	2.176	0,2	+0.1680
0,-2	-0.1338298			1,2	1.168
1,-2	+0.8661702	-1,1	-0.8994	<b>12.</b>	
		0,1	+0.10060	0,-1	-0.0332
-1,-3	-1.2093	1,1	1.1006	1,-1	+0.9668
0,-3	-0.2092680				
1,-3	+0.7907320	-1,0	-0.9748	-1,-2	-1.1087
		0,0	+0.025160	0,-2	-0.1087
-1,-4	-1.285	1,0	1.02516	1,-2	+0.8913
0,-4	-0.28471				
1,-4	+0.71529	-1,-1	-1.0503	-1,-3	-1.184
		0,-1	-0.050278	0,-3	-0.1841
0,-5	-0.3601	1,-1	+0.94972	1,-3	+0.8159
1,-5	+0.6399				

13.		6.		7.	
-1,-3	-1.247	-1,1	-0.9160	-1,-3	-1.201
0,-3	-0.2474	0,1	+0.08396	0,-3	-0.20075
1,-3	+0.7826	1,1	1.0840	1,-3	+0.79925
-1,-4	-1.2928	-1,0	-0.99448	0,-4	-0.2762
0,-4	-0.2928	0,0	+0.0085234	1,-4	+0.7238
1,-4	+0.7072	1,0	1.00852	8.	
0,-5	-0.3683	-1,-1	-1.0669	0,0	0.01664
1,-5	+0.6347	0,-1	-0.0669149	1,0	1.0166
16.		1,-1	+0.933085	-1,1	-0.9079
1,-4	0.7575	-1,-2	-1.1424	0,1	+0.09208
2,-4	1.7575	0,-2	-0.14235	1,1	1.092
17.		1,-2	+0.85765	9.	
1,-6	0.5734	-1,-3	-1.218	1,-1	0.9582
2,-6	1.5734	0,-3	-0.2178	2,-1	1.958
18.		1,-3	+0.7822	10.	
2,0	2.050	7.		0,0	0.00040995
3,0	3.050	-1,-2	-1.125	-1,-3	-1.226
19.		0,-2	-0.1253	0,-3	-0.2259
0,4	0.3180	1,-2	+0.8747	1,-3	+0.7741
1,4	1.318				

Hieraus bekommt man die folgenden Werthe von  $\beta+y$  und  $\beta-y$ , von welchen ich nur diejenigen angesetzt habe, die in dieser Abhandlung gebraucht werden, und dieselbe Abkürzung angewandt habe, wie in der vorigen Tafel.

$i, i'$	$\beta+y$	$\beta-y$	$i, i'$	$\beta+y$	$\beta-y$
1.			2.		
1,0	1.0085399	0.9944604	-1,-3	-1.2007	-1.2178
2,0	2.00854	1.994460	0,-3	-0.2007281	-0.2178080
-1,-1	-1.066898	-1.083978	1,-3	+0.7992719	+0.7821920
0,-1	-0.06689833	-0.08397819	-1,-4	-1.276	-1.293
1,-1	+0.9334016	+0.9160219	0,-4	-0.27618	-0.29325
-1,-2	-1.1423	-1.1594	1,-4	+0.72382	+0.70675
0,-2	-0.142337	-0.159417	0,-5	-0.3516	-0.3686
1,-2	+0.85766	+0.84058	1,-5	+0.6484	+0.6314
-1,-3	-1.218	-1.235	11.		
0,-3	-0.2178	-0.2348	0,-2	-0.10824	-0.12532
1,-3	+0.7822	+0.7652	1,-2	+0.89176	+0.87468
2.			0,-3	-0.18368	-0.20075
-1,0	-0.97441	-0.99449	1,-3	+0.81632	+0.79925
0,0	+0.0250867	+0.0085068	-1,-4	-1.2591	-1.2762
1,0	1.02559	1.00851	0,-4	-0.25912	-0.27620
-1,-1	-1.04985	-1.06693	1,-4	+0.74088	+0.72380
0,-1	+0.0498516	-0.0669315	0,-5	-0.33456	-0.35164
1,-1	+0.9501484	+0.9330686	1,-5	+0.66544	+0.64836
-1,-2	-1.12529	-1.14237	1,-6	0.5900	0.5730
0,-2	-0.1252899	-0.1423697	2,-6	1.590	1.573
1,-2	+0.8747101	+0.8576303	2,-7	1.515	1.497
			3,-7	2.515	2.497

15.				15.	
1,-5	0.683	0.665	1,-6	0.607	0.589
2,-5	1.683	4.665	2,-6	1.607	4.589
			2,-7	1.532	4.514
			3,-7	2.532	2.514

Es ergibt sich ferner durch die Ausdrücke des Art. 91

$$\log l = 6.847939$$

$$\log l'' = 4.80964$$

und hiemit die folgenden Werthe von  $\frac{l''}{\beta^2 - \gamma^2}$ , die einzigen, die Merkwürdliches geben können,

$i, i'$	$\log \frac{l''}{\beta^2 - \gamma^2}$
1.	
1,0	4.8097
0,-1	7.0601
2.	
0,-1	7.2864
1,-1	4.862
0,-2	6.5583
1,-2	4.9345
2,-2	4.268
3,-2	3.895
0,-3	6.169
1,-3	5.044

sowie die folgenden von  $\frac{l}{\beta}$ ,

$i, i'$	$\log \frac{l}{\beta}$	$i, i'$	$\log \frac{l}{\beta}$
1.		2.	
1,0	6.8480	1,-2	6.9104
2,0	6.547	2,-2	6.577
3,0	6.374	3,-2	6.391
-1,-1	6.816 $n$	4,-2	6.264
0,-1	7.9704 $n$	0,-3	7.527 $n$
1,-1	6.882	1,-3	6.950
-1,-2	6.787 $n$	2,-3	6.595
0,-2	7.6694 $n$	3,-3	6.402
1,-2	6.919	4,-3	6.269
2.		0,-4	7.394 $n$
0,0	8.61632	1,-4	6.994
0,-1	8.08162 $n$	1,-5	7.042
1,-1	6.8744	4.	
2,-1	6.560	0,-4	7.420 $n$
3,-1	6.379	1,-4	6.983
-1,-2	6.794 $n$	2,-4	6.609
0,-2	7.724386 $n$	3,-4	6.444
		4,-4	6.276
		2,-5	6.629



Zugleich mit dieser Integration müssen die Glieder der Functionen  $\rho \cos \varphi$  und  $\rho \sin \varphi$ , die von  $2\gamma$ ,  $3\gamma$ , etc. abhängen, und die zufolge des Satzes des Art. 35 bisher weggelassen werden durften, ergänzt werden, und diese Ergänzung wird durch die Multiplication der von  $\pm \gamma$  abhängigen Glieder mit den dort angegebenen Factoren bewirkt. Die numerischen Werthe dieser Factoren sind

$$\begin{aligned} \log \eta^{(2)} &= 8.4382213 \\ \text{„ } \eta^{(3)} &= 7.05254 \\ \text{„ } \eta^{(4)} &= 5.7406 \\ \text{„ } \eta^{(5)} &= 4.4695 \\ \text{„ } \eta^{(6)} &= 3.226 \\ \log \theta^{(2)} &= 4.5379 n \\ \text{„ } \theta^{(3)} &= 3.328 n \end{aligned}$$

Hiemit sind alle Divisoren und Factoren gegeben, die für die erste Integration gebraucht werden.

Um über die Anwendung dieses Satzes, und den Vortheil den er bei der Berechnung der Störungen verursacht, möglichst vollständige Aufklärung zu geben, schalte ich die folgende Auseinandersetzung hier ein. Die allgemeine Form der Argumente aller im Vorhergehenden entwickelten Functionen ist

$$x\gamma + i\gamma + i'g' + i''\omega - i'''\omega'$$

wo  $x$  nicht minder wie  $i$ ,  $i'$ ,  $i''$ ,  $i'''$  irgend eine ganze Zahl ist, die vom grössten negativen Werthe, welchem ein merklicher Coefficient zukommt, bis zum grössten positiven Werthe, für welchen dasselbe der Fall ist, ausgedehnt werden muss. Da die Verwandlung von  $\gamma$  in  $g$  nur erst nach der ersten Integration erfolgen darf, so müssten in allen Theilen, aus welchen das Differential von  $W_0$  besteht, wenn man den genannten Satz unberücksichtigt lassen wollte, für jedes Glied, welches einen merklichen Werth bekommt, die Coefficienten der folgenden Argumente berechnet werden,

$$\begin{aligned} & i\gamma + i'g' + i''\omega + i'''\omega' \\ - \gamma + (i + 1)g + i'g' + i''\omega + i'''\omega' \\ - 2\gamma + (i + 2)g + i'g' + i''\omega + i'''\omega' \\ - 3\gamma + (i + 3)g + i'g' + i''\omega + i'''\omega' \\ & \text{etc.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \gamma + (i - 1)g + i'g' + i''\omega + i'''\omega' \\ & + 2\gamma + (i - 2)g + i'g' + i''\omega + i'''\omega' \\ & + 3\gamma + (i - 3)g + i'g' + i''\omega + i'''\omega' \\ & \text{etc.} \end{aligned}$$

wogegen der Satz ausdrückt, dass es ausreichend ist, nur die Coefficienten der drei folgenden Argumente zu berechnen

$$\begin{aligned} & ig + i'g' + i''\omega + i'''\omega' \\ & - \gamma + (i + 1)g + i'g' + i''\omega + i'''\omega' \\ & + \gamma + (i - 1)g + i'g' + i''\omega + i'''\omega' \end{aligned}$$

indem die Coefficienten aller übrigen Argumente aus den beiden letzten dieser drei auf die allereinfachste Art berechnet werden können. Da diese Eigenschaft sich nicht nur ohne Ausnahme auf alle Theile von  $\frac{dW_0}{dt}$  erstreckt, sondern nach der Integration auch für  $W_0$  statt findet, so lässt sich die Berechnung der Glieder, in deren Argumenten  $-2\gamma$ ,  $-3\gamma$ , etc.  $+2\gamma$ ,  $+3\gamma$ , etc. vorkommt, bis nach der Integration verschieben, oder kann vielmehr mit der Integration selbst zugleich ausgeführt werden.

Seien mit bloßer Rücksicht auf die drei eben bezeichneten Argumente des Differential's durch das im Vorhergehenden entwickelte Integrationsverfahren im Integral die drei folgenden Glieder für jeden in Betracht kommenden Werth der Indices  $i, i',$  etc. erhalten worden,

$$\begin{aligned} W_0 = & \Pi(0, i, i', i'', i''') \cos(ig + i'g' + i''\omega + i'''\omega') \\ & + \Pi(-1, i, i', i'', i''') \cos(-\gamma + ig + i'g' + i''\omega + i'''\omega') \\ & + \Pi(1, i, i', i'', i''') \cos(\gamma + ig + i'g' + i''\omega + i'''\omega') \end{aligned}$$

so werden in Folge des genannten Satzes im vollständigen Ausdruck von  $W_0$  die folgenden Glieder anzusetzen sein.

$$\begin{aligned} W_0 = & \Pi(0, i, i', \dots) \cos(ig + i'g' + \dots) \\ & + \Pi(-1, i+1, i', \dots) \cos(-\gamma + ig + i'g' + \dots) \\ & + \{\eta_2 \Pi(-1, i+2, i', \dots) + \theta_2 \Pi(1, i+2, i', \dots)\} \cos(-2\gamma + (i+2)g + i'g' + \dots) \\ & + \{\eta_3 \Pi(-1, i+3, i', \dots) + \theta_3 \Pi(1, i+3, i', \dots)\} \cos(-3\gamma + (i+3)g + i'g' + \dots) \\ & + \text{etc.} \\ & + \Pi(1, i-1, i', \dots) \cos(\gamma + (i-1)g + i'g' + \dots) \\ & + \{\eta_2 \Pi(1, i-2, i', \dots) + \theta_2 \Pi(-1, i-2, i', \dots)\} \cos(2\gamma + (i-2)g + i'g' + \dots) \\ & + \{\eta_3 \Pi(1, i-3, i', \dots) + \theta_3 \Pi(-1, i-3, i', \dots)\} \cos(3\gamma + (i-3)g + i'g' + \dots) \\ & + \text{etc.} \end{aligned}$$

Durch dieses einfache Verfahren, welches dadurch noch einfacher wird, dass  $\theta_2, \theta_3, \text{etc.}$  ihrer kleinen numerischen Werthe wegen nur in den seltensten Fällen in Betracht kommen, können daher alle im Vorhergehenden ausgelassenen Glieder mit Leichtigkeit und Sicherheit berechnet werden.

105.

Um  $dW_0$  zu bilden, ist noch das letzte Glied der Gleichung (32), nemlich

$$-y \frac{h}{h_0} \frac{2f'e}{1-e^2} \sin \gamma$$

zu berechnen. Aber für die Bestimmung von  $y$  wurde schon das constante Glied von  $\frac{h}{h_0}$  vollständig verwandt, und es bleibt daher nur noch

$$y \delta \frac{h}{h_0} \frac{2f'e}{1-e^2} \sin \gamma$$

zu berücksichtigen übrig, in welchem Ausdruck überdies die Constante, die der Ausdruck von  $\delta \frac{h}{h_0}$  enthält, wegzulassen ist, eben weil sie schon zur Bestimmung von  $y$  verwandt worden ist. Setzt man zur Abkürzung

$$K = 2y \frac{f'e}{1-e^2} \sin \gamma$$

so ist mit der eben erklärten Beschränkung das Product

$$-K \delta \frac{h}{h_0}$$

zu berechnen. Da man

$$K = 2 (6,67152) \sin \gamma$$

findet, wo die in ( ) eingeschlossene Zahl der Logarithmus des numerischen Werths des Coefficienten ist, und der Ausdruck von  $\delta \frac{h}{h_0}$  im Art. 69 gegeben ist, so findet man leicht die folgenden einzig merklichen Glieder des Products.

$\gamma, g, g'$	$-\frac{K\delta^h}{\sin h_0}$	$\gamma, g, g'$	$-\frac{K\delta^h}{\sin h_0}$	$\gamma, g, g'$	$-\frac{K\delta^h}{\sin h_0}$
<u>1.</u>		<u>2.</u>		<u>2.</u>	
-1,1,0	+0,028	-1,0,0	-0,00003	-1,0,-3	+0,004
-1,2,0	+0.004	1,0,0	+0.00003	-1,1,-3	+0.010
1,1,0	-0.028	-1,0,-1	-0.00005	-1,2,-3	-0.028
1,2,0	-0.004	-1,1,-1	-0.00074	1,0,-3	-0.004
-1,-1,-1	+0.004	-1,2,-1	+0.005	-1,3,-3	-0.004
-1,0,-1	+0.00240	1,0,-1	+0.00005	1,1,-3	-0.010
-1,1,-1	+0.00468	1,1,-1	+0.004	1,2,-3	+0.028
1,-1,-1	-0.00083	1,2,-1	-0.005	1,3,-3	+0.004
1,0,-1	-0.00240	-1,0,-2	+0.0443	-1,2,-4	-0.004
1,1,-1	-0.002	-1,1,-2	+0.1558	1,2,-4	+0.004
-1,0,-2	+0.0004	-1,2,-2	-0.436	<u>11.</u>	
-1,1,-2	+0.0004	1,0,-2	-0.0443	-1,3,-4	-0.004
1,0,-2	-0.0004	-1,3,-2	-0.016	1,3,-4	+0.004
		1,1,-2	-0.156		
		1,2,-2	+0.436		
		1,3,-2	+0.016		

Es ist jetzt

$$V = T - K\delta \frac{h}{h_0}$$

die Function, von welcher je drei mit einander bei der Integration in Verbindung tretende Coefficienten im Art. 90 mit  $A_0, A_{-1}, A_1$  bezeichnet wurden. Die Coefficienten von  $T$ , in so weit sie aus den beiden ersten Theilen  $T^{(1)}$  und  $T^{(2)}$  folgen, befinden sich im Art. 76, und die Coefficienten von  $T^{(2)}$ , die merklich sind, enthält der Art. 58. Um vollständig zu sein, muss man auch die Wirkung der Planeten betrachten, die die hier in den numerischen Entwicklungen festgesetzte Grenze um ein Weniges übersteigt. Ich finde hiefür

$\gamma, g, g'$	$T$ sin
<u>2.</u>	
0,1,-2	-0,003
-1,2,-2	+0.002
1,0,-2	+0.0037
0,2,-2	+0.018
-1,3,-2	-0.006
1,1,-2	-0.018

deren Ableitung ich am Schlusse dieser Abhandlung geben werde.

Stellt man nun die verschiedenen Theile, aus welchen  $V$  besteht, zusammen, wobei der Coefficient von 1,0,0 in der Abth. 1. übergangen werden muss, weil er schon zur Bestimmung von  $y$  gedient hat, und führt die Integration nach den Ausdrücken (30) aus, so bekommt man den folgenden Werth von  $W_0$ , dem ich sogleich die Differentialquotienten, die davon gebraucht werden, hinzugefügt habe.

$\gamma, g, g'$	$W_0$ cos	$\left(\frac{dW_0}{dy}\right)$ sin	$\left(\frac{d^2W_0}{dy^2}\right)$ cos	$\left(\frac{d^3W_0}{dy^3}\right)$ sin	$\left(\frac{d^4W_0}{dy^4}\right)$ cos
1.					
0,0,0	+2939'993				
-1,1,0	-1122.984		+1122'984		-1122'98
-2,2,0	-1.499		+5.996		-23.98
-3,3,0	-0.004.4		+0.037		-0.33
0,1,0	+269.609				
-1,2,0	-54.664	-54'664	+54.664	+54'66	-54.66
-2,3,0	-0.100	-0.200	+0.400	+0.80	-1.60
1,0,0	-310.321	+310.321	+310.321	-310.32	-310.32
2,-1,0	-30.803	+61.606	+123.212	-246.42	-492.84
3,-2,0	-0.064.7	+0.185	+0.555	-1.67	-5.01
0,2,0	+10.023				
-1,3,0	-3.633	-3.633	+3.633	+3.63	-3.63
-2,4,0	-0.007	-0.014	+0.028	+0.06	-0.11
1,1,0	-5.124	+5.124	+5.124	-5.12	-5.12
2,0,0	-8.511	+17.022	+34.044	-68.09	-136.18
3,-1,0	-1.267.4	+3.802	+11.407	-34.22	-102.66
4,-2,0	-0.003.0	+0.012	+0.048	-0.19	-0.77
0,3,0	+0.546				
-1,4,0	-0.252	-0.252	+0.252	+0.25	-0.25
1,2,0	-0.165	+0.165	+0.165	-0.17	-0.17
2,1,0	-0.137	+0.274	+0.548	-1.10	-2.19
3,0,0	-0.350.3	+1.051	+3.153	-9.46	-28.38
4,-1,0	-0.061.8	+0.247	+0.989	-3.96	-15.84
0,4,0	+0.031				
-1,5,0	-0.017	-0.017	+0.017	+0.02	-0.02
1,3,0	-0.007	+0.007	+0.007	-0.01	-0.01
2,2,0	-0.004	+0.008	+0.016	-0.03	-0.06
3,1,0	-0.005.8	+0.017	+0.052	-0.16	-0.47
4,0,0	-0.017.1	+0.068	+0.274	-1.10	-4.40
5,-1,0	-0.003.3	+0.017	+0.083	-0.42	-2.08
0,-3,-1	+0.018				
-1,-2,-1	-0.005	-0.005	+0.005	+0.01	-0.01
-2,-1,-1	-0.004	-0.008	+0.016	+0.03	-0.06
-3,0,-1	-0.091.9	-0.276	+0.827	+2.48	-7.44
-4,1,-1	-0.001.7	-0.007	+0.027	+0.11	-0.43
1,-4,-1	-0.008	+0.008	+0.008	-0.01	-0.01

4.					
0, -2, -1	+0.281				
-1, -1, -1	-0.157	-0.157	+0.157	+0.16	-0.16
-2, 0, -1	-2.234	-4.468	+8.936	+17.87	-35.74
-3, 1, -1	-0.035.6	-0.107	+0.320	+0.96	-2.88
1, -3, -1	-0.094	+0.094	+0.094	-0.09	-0.09
0, -1, -1	+7.523				
-1, 0, -1	-81.437	-81.437	+81.437	+81.44	-81.44
-2, 1, -1	-0.866	-1.732	+3.464	+6.93	-13.86
-3, 2, -1	-0.003.2	-0.010	+0.029	+0.09	-0.27
1, -2, -1	-1.491	+1.491	+1.491	-1.49	-1.49
2, -3, -1	-0.003	+0.006	+0.012	-0.02	-0.05
0, 0, -1	{ +11.8233				
	{ +11.8225				
-1, 1, -1	-31.5798	-31.5798	+31.580	+31.58	-31.58
-2, 2, -1	-0.0788	-0.1576	+0.315	+0.63	-1.26
-3, 3, -1	-0.0002.7	-0.0008	+0.002	+0.01	-0.03
1, -1, -1	-24.6285	+24.6285	+24.629	-24.63	-24.63
2, -2, -1	-0.0409	+0.0818	+0.164	-0.33	-0.66
3, -3, -1	-0.0004.1	+0.0003	+0.001	0.00	-0.01
0, 1, -1	+13.372				
-1, 2, -1	-2.873	-2.873	+2.873	+2.87	-2.87
-2, 3, -1	-0.007	-0.014	+0.028	+0.06	-0.11
1, 0, -1	+97.102	-97.102	-97.102	+97.10	+97.10
2, -1, -1	-0.676	+1.352	+2.704	-5.41	-10.82
3, -2, -1	-0.001.7	+0.005	+0.015	-0.05	-0.15
0, 2, -1	+0.631				
-1, 3, -1	-0.240	-0.240	+0.240	+0.24	-0.24
1, 1, -1	-0.348	+0.348	+0.348	-0.35	-0.35
2, 0, -1	+2.664	-5.328	-10.656	+21.31	+42.62
3, -1, -1	-0.027.8	+0.083	+0.250	-0.75	-2.25
0, 3, -1	+0.037				
-1, 4, -1	-0.049	-0.049	+0.049	+0.02	-0.02
1, 2, -1	-0.041	+0.041	+0.041	-0.04	-0.04
2, 1, -1	-0.010	+0.020	+0.040	-0.08	-0.16
3, 0, -1	+0.109.6	-0.329	-0.986	+2.96	+8.88
4, -1, -1	-0.001.4	+0.006	+0.022	-0.09	-0.35
0, -2, -2	+0.005				
-1, -1, -2	-0.002	-0.002	+0.002	0.00	0.00
-2, 0, -2	-0.031	-0.062	+0.124	+0.25	-0.50
-3, 1, -2	-0.001.0	-0.003	+0.009	+0.03	-0.09
1, -3, -2	-0.002	+0.002	+0.002	0.00	0.00
0, -1, -2	+0.210				
-1, 0, -2	-1.134	-1.134	+1.134	+1.13	-1.13
-2, 1, -2	-0.023	-0.046	+0.092	+0.18	-0.37
1, -2, -2	-0.042	+0.042	+0.042	-0.04	-0.04
0, 0, -2	{ +0.4334				
	{ +0.4344				
-1, 1, -2	-0.8476	-0.8476	+0.848	+0.85	-0.85
-2, 2, -2	-0.0026	-0.0052	+0.010	+0.02	-0.04
1, -1, -2	-0.5719	+0.5719	+0.572	-0.57	-0.57
2, -2, -2	-0.0012	+0.0024	+0.005	-0.01	-0.02

1.					
0,1,-2	+0,438				
-1,2,-2	-0.096	-0,096	+0,096	+0,10	-0,10
4,0,-2	+1.495	-1.495	-1.495	+1.50	+1.50
2,-1,-2	-0.016	+0.032	+0.064	-0.13	-0.26
0,2,-2	+0.021				
-1,3,-2	-0.008	-0.008	+0.008	+0.01	-0.01
1,1,-2	-0.014	+0.014	+0.014	-0.01	-0.01
2,0,-2	+0.041	-0.082	-0.164	+0.33	+0.66
3,-1,-2	-0.000.6	+0.002	+0.005	-0.02	-0.06
0,-1,-3	+0.006				
-1,0,-3	-0.018	-0.018	+0.018	+0.02	-0.02
1,-2,-3	-0.001	+0.001	+0.001	0.00	0.00
0,0,-3	{ +0.027				
	{ +0.022				
-1,1,-3	-0.019	-0.019	+0.019	+0.02	-0.02
1,-1,-3	-0.015	+0.015	+0.015	-0.02	-0.02
0,1,-3	+0.012				
-1,2,-3	-0.001	-0.001	+0.001	0.00	0.00
1,0,-3	+0.025	-0.025	-0.025	+0.03	+0.03
2.					
0,0,0	{ +0.01714				
	{ +0.01448				
-1,1,0	+0.00248	+0.00248	-0.002		
-2,2,0	-0.00015	-0.00030	0.000		
1,-1,0	+0.00037	-0.00037	0.000		
0,1,0	+0.037				
-1,2,0	-0.006	-0.006	+0.006	+0.01	-0.01
1,0,0	-2.531	+2.531	+2.531	-2.53	-2.53
0,2,0	+0.009				
-1,3,0	-0.002	-0.002	+0.002	0.00	0.00
1,1,0	-0.017	+0.047	+0.017	-0.02	-0.02
2,0,0	-0.069	+0.138	+0.276	-0.55	-1.10
0,-1,-1	-0.012				
-1,0,-1	+0.070	+0.070	-0.070	-0.07	+0.07
-2,1,-1	+0.001	+0.002	-0.004	-0.01	+0.02
-3,2,-1	+0.000.7	+0.002	-0.006	-0.02	+0.06
1,-2,-1	+0.005	-0.005	-0.005	+0.01	+0.01
0,0,-1	{ +1.2006				
	{ +0.2017				
-1,1,-1	+0.0411	+0.0411	-0.041	-0.04	+0.04
-2,2,-1	+0.0179	+0.0358	-0.072	-0.14	+0.28
-3,3,-1	-0.0086.9	-0.0261	+0.078	+0.23	-0.69
1,-1,-1	+0.0731	-0.0731	-0.073	+0.07	+0.07
2,-2,-1	+0.0001	-0.0002	0.000	0.00	0.00
0,1,-1	+0.079				
-1,2,-1	+0.653	+0.653	-0.653	-0.65	+0.65
-2,3,-1	-0.211	-0.422	+0.844	+1.69	-3.38
-3,4,-1	-0.001.0	-0.003	+0.009	+0.03	-0.08
1,0,-1	-18.621	+18.621	+18.621	-18.62	-18.62
2,-1,-1	+0.002	-0.004	-0.008	+0.02	+0.04

2.					
0,2,-1	+30.921				
-1,3,-1	-7.701	-7.701	+7.701	+7.70	-7.70
-2,4,-1	-0.024	-0.048	+0.096	+0.19	-0.38
1,1,-1	-55.873	+55.873	+55.873	-55.87	-55.87
2,0,-1	-0.511	+1.022	+2.044	-4.09	-8.18
0,3,-1	+2.215				
-1,4,-1	-0.863	-0.863	+0.863	+0.86	-0.86
-2,5,-1	-0.002	-0.004	+0.008	+0.02	-0.04
1,2,-1	-1.282	+1.282	+1.282	-1.28	-1.28
2,1,-1	-1.533	+3.066	+6.132	-12.26	-24.52
3,0,-1	-0.021.0	+0.063	+0.189	-0.57	-1.71
0,4,-1	+0.155				
-1,5,-1	-0.076	-0.076	+0.076	+0.08	-0.08
1,3,-1	-0.054	+0.054	+0.054	-0.05	-0.05
2,2,-1	-0.035	+0.070	+0.140	-0.28	-0.56
3,1,-1	-0.063.1	+0.189	+0.568	-1.70	-5.10
4,0,-1	-0.001.0	+0.004	+0.016	-0.06	-0.24
0,5,-1	+0.011				
-1,6,-1	-0.006	-0.006	+0.006		
1,4,-1	-0.003	+0.003	+0.003		
2,3,-1	-0.001	+0.002	+0.004		
3,2,-1	-0.001.5	+0.005	+0.014		
4,1,-1	-0.003.1	+0.012	+0.050		
0,-2,-2	-0.010				
-1,-1,-2	+0.003	+0.003	-0.003		
-2,0,-2	+0.037	+0.074	-0.148		
-3,1,-2	+0.018.0	+0.054	-0.162		
-4,2,-2	-0.008.6	-0.034	+0.138		
-5,3,-2	+0.001.8	+0.009	-0.045		
1,-3,-2	+0.006	-0.006	-0.006		
0,-1,-2	-0.136				
-1,0,-2	+1.777	+1.777	-1.777	-1.78	+0.78
-2,1,-2	+0.416	+0.832	-1.664	-3.33	+6.66
-3,2,-2	-0.176.4	-0.529	+1.588	+4.76	-14.28
-4,3,-2	+0.032.8	+0.134	-0.525	-2.10	+8.40
1,-2,-2	+0.064	-0.064	-0.064	+0.06	+0.06
0,0,-2	{ -5.7871 -5.7924				
-1,1,-2	+15.9607	+15.9607	-15.961	-15.96	+15.96
-2,2,-2	-4.2869	-8.5738	+17.148	+34.30	-68.60
-3,3,-2	+0.6722.2	+2.0167	-6.050	-18.15	+54.45
-4,4,-2	+0.0027.0	+0.0108	-0.043	-0.17	+0.68
1,-1,-2	-2.2115	+2.2115	+2.212	-2.21	-2.21
2,-2,-2	+0.0017	-0.0034	-0.007	+0.01	+0.03
0,1,-2	+491.422				
-1,2,-2	-156.273	-156.273	+156.273	+156.27	-156.27
-2,3,-2	+16.338	+32.676	-65.352	-130.70	+261.40
-3,4,-2	+0.055.2	+0.166	-0.497	-1.49	+4.47
1,0,-2	+3491.070	-3491.070	-3491.070	+3491.07	+3491.07
2,-1,-2	-0.061	+0.122	+0.244	-0.49	-0.98



BERECHNUNG DER IN DEN MONDTAFELN ANGEWANDTEN STÖRUNGEN. 361

2.					
0,2,-2	-2775,038				
-1,3,-2	+595,624	+595,624	-595,624	-595,624	+595,624
-2,4,-2	+1,342	+2,684	-5,368	-10,74	+21,48
-3,5,-2	+0,003,8	+0,011	-0,034	-0,10	+0,30
1,1,-2	+6068,983	-6068,983	-6068,983	+6068,98	+6068,98
2,0,-2	+95,760	-191,520	-383,040	+766,08	+1532,16
3,-1,-2	-0,002,5	+0,008	+0,023	-0,07	-0,21
0,3,-2	-149,783				
-1,4,-2	+48,904	+48,904	-48,904	-48,90	+48,90
-2,5,-2	+0,091	+0,182	-0,364	-0,73	+1,46
1,2,-2	+103,566	-103,566	-103,566	+103,57	+103,57
2,1,-2	+166,470	-332,940	-665,880	+1331,76	+2663,52
3,0,-2	+3,940,0	-11,820	-35,460	+106,38	+319,14
0,4,-2	-8,131				
-1,5,-2	+3,326	+3,326	-3,326	-3,33	+3,33
-2,6,-2	+0,006	+0,012	-0,024	-0,05	+0,10
1,3,-2	+3,243	-3,243	-3,243	+3,24	+3,24
2,2,-2	+2,841	-5,682	-11,364	+22,73	+45,46
3,1,-2	+6,849,5	-20,549	-61,646	+184,94	+554,82
4,0,-2	+0,192,1	-0,768	-3,074	+12,30	+49,20
0,5,-2	-0,461				
-1,6,-2	+0,217	+0,217	-0,217	-0,22	+0,22
1,4,-2	+0,132	-0,132	-0,132	+0,13	+0,13
2,3,-2	+0,087	-0,174	-0,348	+0,70	+1,40
3,2,-2	+0,116,9	-0,351	-1,052	+3,16	+9,48
4,1,-2	+0,334,0	-1,336	-5,344	+21,38	+85,52
5,0,-2	+0,010,3	-0,052	-0,258	+1,29	+6,45
0,6,-2	-0,028				
-1,7,-2	+0,015	+0,015	-0,015	-0,02	+0,02
1,5,-2	+0,006	-0,006	-0,006	+0,01	+0,01
2,4,-2	+0,004	-0,008	-0,016	+0,03	+0,06
3,3,-2	+0,003,7	-0,011	-0,033	+0,10	+0,30
4,2,-2	+0,005,7	-0,023	-0,091	+0,36	+1,46
5,1,-2	+0,017,9	-0,090	-0,450	+2,25	+11,25
6,0,-2	+0,000,6	-0,004	-0,022	+0,13	+0,79
0,-1,-3	-0,014				
-1,0,-3	+0,061	+0,061	-0,061		
-2,1,-3	+0,024	+0,048	-0,096		
-3,2,-3	-0,010,7	-0,032	+0,096		
-4,3,-3	+0,002,2	+0,009	-0,035		
1,-2,-3	+0,006	-0,006	-0,006		
0,0,-3	{ -1,256				
	{ -1,293				
-1,1,-3	+0,891	+0,891	-0,891	-0,89	+0,89
-2,2,-3	-0,260	-0,520	+1,040	+2,08	-4,16
-3,3,-3	+0,044,0	+0,132	-0,396	-1,19	+3,57
1,-1,-3	-0,072	+0,072	+0,072	-0,07	-0,07

2.					
0,1,-3	+29.157				
-1,2,-3	-9.483	-9.483	+9.483	+9.48	-9.48
-2,3,-3	+1.068	+2.136	-4.272	-8.54	+17.08
-3,4,-3	+0.004.0	+0.012	-0.036	-0.11	+0.33
1,0,-3	+128.094	-128.094	-128.094	+128.09	+128.09
2,-1,-3	-0.002	+0.004	+0.008	-0.02	-0.04
0,2,-3	-179.736				
-1,3,-3	+38.944	+38.944	-38.944	-38.94	+38.94
-2,4,-3	+0.096	+0.192	-0.384	-0.77	+1.54
1,1,-3	+402.117	-402.117	-402.117	+402.12	+402.12
2,0,-3	+3.514	-7.028	-14.056	+28.11	+56.22
0,3,-3	-10.364				
-1,4,-3	+3.510	+3.510	-3.510	-3.51	+3.51
-2,5,-3	+0.007	+0.014	-0.028	-0.06	+0.12
1,2,-3	+7.027	-7.027	-7.027	+7.03	+7.03
2,1,-3	+11.030	-22.060	-44.120	+88.24	+176.48
3,0,-3	+0.144.5	-0.433	-1.301	+3.90	+11.70
0,4,-3	-0.606				
-1,5,-3	+0.260	+0.260	-0.260	-0.26	+0.26
1,3,-3	+0.235	-0.235	-0.235	+0.24	+0.24
2,2,-3	+0.493	-0.386	-0.772	+1.54	+3.08
3,1,-3	+0.433.8	-1.361	-4.084	+12.25	+36.75
4,0,-3	+0.007.0	-0.028	-0.112	+0.45	+1.80
0,5,-3	-0.037				
-1,6,-3	+0.018	+0.018	-0.018	-0.02	
1,4,-3	+0.011	-0.011	-0.011	+0.01	
2,3,-3	+0.006	-0.012	-0.024	+0.05	
3,2,-3	+0.008.0	-0.024	-0.072	+0.22	
4,1,-3	+0.022.1	-0.088	-0.354	+1.42	
0,0,-4	{ -0.026				
	-0.059				
-1,1,-4	+0.036	+0.036	-0.036		
-2,2,-4	-0.011	-0.022	+0.044		
-3,3,-4	+0.001.9	+0.006	-0.017		
1,-1,-4	-0.002	+0.002	+0.002		
0,1,-4	+1.226				
-1,2,-4	-0.401	-0.401	+0.401	+0.40	-0.40
-2,3,-4	+0.047	+0.094	-0.188	-0.38	+0.76
1,0,-4	+3.758	-3.758	-3.758	+3.76	+3.76
0,2,-4	-7.967				
-1,3,-4	+1.728	+1.728	-1.728	-1.73	+1.73
-2,4,-4	+0.005	+0.010	-0.020	-0.04	+0.08
1,1,-4	+18.500	-18.500	-18.500	+18.50	+18.50
2,0,-4	+0.103	-0.206	-0.412	+0.82	+1.64
0,3,-4	-0.483				
-1,4,-4	+0.168	+0.168	-0.168	-0.17	+0.17
1,2,-4	+0.325	-0.325	-0.325	+0.33	+0.33
2,1,-4	+0.507	-1.014	-2.028	+4.06	+8.12
3,0,-4	+0.004.2	-0.013	-0.038	+0.11	+0.33

BERECHNUNG DER IN DEN MONDTAFELN ANGEWANDTEN STÖRUNGEN. 363

<u>2.</u>				
0,4,-4	-0,030			
-1,5,-4	+0.043	+0,043	-0,013	
1,3,-4	+0.042	-0.042	-0.042	
2,2,-4	+0.009	-0.018	-0.036	
3,1,-4	+0.020.9	-0.063	-0.188	
<hr/>				
0,1,-5	+0.048			
-1,2,-5	-0.043	-0.043	+0.043	
-2,3,-5	+0.002	+0.004	-0.008	
1,0,-5	+0.098	-0.098	-0.098	
<hr/>				
0,2,-5	-0.296			
-1,3,-5	+0.064	+0.064	-0.064	
1,1,-5	+0.731	-0.731	-0.731	
2,0,-5	+0.003	-0.006	-0.042	
<hr/>				
0,3,-5	-0.049			
-1,4,-5	+0.007	+0.007	-0.007	
1,2,-5	+0.014	-0.014	-0.014	
2,1,-5	+0.020	-0.040	-0.080	
<hr/>				
<u>41.</u>				
0,2,-2	+0.004			
-1,3,-2	0.000	0.000		
1,1,-2	-0.004	+0.004		
<hr/>				
0,3,-2	+0.040			
-1,4,-2	-0.005	-0.005		
1,2,-2	-0.005	+0.005		
<hr/>				
0,1,-3	+0.007			
-1,2,-3	-0.003	-0.003		
-2,3,-3	+0.004	+0.002		
1,0,-3	+0.005	-0.005		
<hr/>				
0,2,-3	-0.032			
-1,3,-3	+0.026	+0.026	-0.026	
-2,4,-3	-0.006	-0.012	+0.024	
1,1,-3	+0.010	-0.010	-0.010	
<hr/>				
0,3,-3	+0.429			
-1,4,-3	-0.210	-0.210	+0.210	
-2,5,-3	-0.002	-0.004	+0.008	
1,2,-3	-0.237	+0.237	+0.237	
<hr/>				
0,4,-3	+0.054			
-1,5,-3	-0.064	-0.064	+0.064	
1,3,-3	+0.030	-0.030	-0.030	
2,2,-3	-0.007	+0.014	+0.028	
<hr/>				
0,5,-3	+0.044			
-1,6,-3	-0.040	-0.040	+0.040	
1,4,-3	0.000	0.000	0.000	
2,3,-3	+0.004	-0.004	-0.002	
<hr/>				
0,0,-4	+0.023			
-1,1,-4	+0.008	+0.008	-0.004	
-2,2,-4	0.000	0.000	0.000	
-3,3,-4	-0.004.7	-0.005	+0.015	
-4,4,-4	+0.000.6	+0.002	-0.040	
1,-1,-4	+0.004	-0.004	-0.004	

14.					
0,1,-4	+0.254				
-1,2,-4	-0.004	-0.004	+0.004		
-2,3,-4	-0.044	-0.082	+0.164		
-3,4,-4	+0.042.5	+0.038	-0.143		
1,0,-4	+0.439	-0.439	-0.439		
0,2,-4	+0.248				
-1,3,-4	-1.484	-1.484	+1.484	+1.48	-1.48
-2,4,-4	+0.304	+0.608	-1.216	-2.43	+4.86
-3,5,-4	+0.003.4	+0.009	-0.028	-0.08	+0.24
1,1,-4	+3.365	-3.365	-3.365	+3.37	+3.37
2,0,-4	+0.012	-0.024	-0.048	+0.10	+0.20
0,3,-4	-25.312				
-1,4,-4	+11.072	+11.072	-11.072	-11.07	+11.07
-2,5,-4	+0.075	+0.150	-0.300	-0.60	+1.20
1,2,-4	+15.886	-15.886	-15.886	+15.89	+15.89
2,1,-4	+0.092	-0.184	-0.368	+0.74	+1.48
0,4,-4	-2.822				
-1,5,-4	+2.751	+2.751	-2.751	-2.75	+2.75
-2,6,-4	+0.044	+0.022	-0.044	-0.09	+0.18
1,3,-4	-1.209	+1.209	+1.209	-1.21	-1.21
2,2,-4	+0.436	-0.872	-1.744	+3.49	+6.98
3,1,-4	+0.003.8	-0.044	-0.034	+0.10	+0.30
0,5,-4	-0.493				
-1,6,-4	+0.406	+0.406	-0.406		
-2,7,-4	+0.004	+0.002	-0.004		
1,4,-4	+0.044	-0.044	-0.044		
2,3,-4	-0.033	+0.066	+0.132		
3,2,-4	+0.017.9	-0.054	-0.161		
0,6,-4	-0.064				
-1,7,-4	+0.046	+0.046	-0.046		
1,5,-4	+0.008	-0.008	-0.008		
2,4,-4	0.000	0.000	0.000		
3,3,-4	-0.004.4	+0.004	+0.012		
4,2,-4	+0.000.9	-0.004	-0.016		
0,7,-4	-0.004				
-1,8,-4	+0.003	+0.003			
1,6,-4	+0.004	-0.004			
0,1,-5	+0.017				
-1,2,-5	+0.003	+0.003			
-2,3,-5	-0.004	-0.008			
-3,4,-5	+0.004.4	+0.004			
1,0,-5	+0.020	-0.020			
0,2,-5	+0.033				
-1,3,-5	-0.161	-0.161	+0.161		
-2,4,-5	+0.034	+0.068	-0.136		
1,1,-5	+0.364	-0.364	-0.364		
0,3,-5	-2.881				
-1,4,-5	+1.246	+1.246	-1.246	-1.25	+1.25
-2,5,-5	+0.040	+0.020	-0.040	-0.08	+0.16
1,2,-5	+1.856	-1.856	-1.856	+1.86	+1.86
2,1,-5	+0.040	-0.020	-0.040	+0.08	+0.16

BERECHNUNG DER IN DEN MONDTAFELN ANGEWANDTEN STÖRUNGEN. 365

14.					
0,4,-5	-0,372				
-1,5,-5	+0.368	+0,368	-0,368	-0,37	+0,37
-2,6,-5	+0.002	+0.004	-0.008	-0.02	+0.04
1,3,-5	-0.155	+0.155	+0.155	-0.16	-0.16
2,2,-5	+0.051	-0.102	-0.204	+0.41	+0.82
0,5,-5	-0.070				
-1,6,-5	+0.059	+0.059	-0.059		
1,4,-5	+0.003	-0.003	-0.003		
2,3,-5	-0.004	+0.008	+0.016		
3,2,-5	+0.002.1	-0.006	-0.019		
0,6,-5	-0.007				
-1,7,-5	+0.006	+0.006			
1,5,-5	+0.001	-0.001			
0,2,-6	+0.006				
-1,3,-6	-0.011	-0.011			
-2,4,-6	+0.002	+0.004			
1,1,-6	+0.021	-0.021			
0,3,-6	-0.204				
-1,4,-6	+0.086	+0.086	-0.086		
-2,5,-6	+0.001	+0.002	-0.004		
1,2,-6	+0.134	-0.134	-0.134		
2,1,-6	+0.001	-0.002	-0.004		
0,4,-6	-0.030				
-1,5,-6	+0.029	+0.029	-0.029		
1,3,-6	-0.011	+0.011	+0.011		
2,2,-6	+0.004	-0.008	-0.016		
0,5,-6	-0.006				
-1,6,-6	+0.005	+0.005	-0.005		
1,4,-6	+0.001	-0.001	-0.001		
0,3,-7	-0.009				
-1,4,-7	+0.005	+0.005			
1,2,-7	+0.007	-0.007			
0,4,-7	-0.001				
-1,5,-7	+0.001	+0.001			
1,3,-7	-0.001	+0.001			
15.					
0,4,-5	+0.006				
-1,5,-5	-0.005	-0.005			
1,3,-5	-0.001	+0.001			
0,5,-5	+0.002				
-1,6,-5	-0.003	-0.003			
1,4,-5	0.000	0.000			
0,3,-6	-0.010				
-1,4,-6	-0.012	-0.012			
-2,5,-6	+0.004	+0.008			
1,2,-6	+0.012	-0.012			
0,4,-6	-0.225				
-1,5,-6	+0.159	+0.159	-0.159		
-2,6,-6	+0.002	+0.004	-0.008		
1,3,-6	+0.070	-0.070	-0.070		

15.					
0,5,-6	-0,064				
-1,6,-6	+0,084	+0,084	-0,084		
-2,7,-6	+0,004	+0,002	-0,004		
1,4,-6	-0,006	+0,006	+0,006		
2,3,-6	+0,002	-0,004	-0,008		
0,6,-6	-0,027				
-1,7,-6	+0,027	+0,027	-0,027		
1,5,-6	+0,009	-0,009	-0,009		
0,7,-6	-0,005				
-1,8,-6	+0,005	+0,005			
1,6,-6	+0,002	-0,002			
0,3,-7	-0,002				
-1,4,-7	-0,004	-0,004			
-2,5,-7	+0,004	+0,002			
1,2,-7	+0,004	-0,004			
0,4,-7	-0,038				
-1,5,-7	+0,026	+0,026			
1,3,-7	+0,042	-0,042			
0,5,-7	-0,042				
-1,6,-7	+0,046	+0,046			
1,4,-7	0,000	0,000			
0,6,-7	-0,006				
-1,7,-7	+0,005	+0,005			
1,5,-7	+0,002	-0,002			

Unter den Gliedern dieser Tafel bilden die folgenden :

$$+2939,993 - 310,321 \cos \gamma - 8,511 \cos 2\gamma - 0,350 \cos 3\gamma - 0,017 \cos 4\gamma$$

die Constante, die dem Integral hinzugefügt werden musste. Die beiden ersten Coefficienten derselben sind durch die in Art. 92 angegebenen Bedingungen bestimmt, und es ist also in Bezeichnungen des Art. 92

$$b = +2939,993; \quad \xi = -310,321$$

Die übrigen Coefficienten dieser Constante sind, gleichwie alle übrigen von  $2\gamma$ ,  $3\gamma$ , etc. abhängenden, durch den Satz des Art. 35 berechnet worden.

Ebenso wie die übrigen Coefficienten bekommt man auch die Coefficienten dieser Constante von Annäherung zu Annäherung genauer, nachdem man in jeder Annäherung die beiden eben angezogenen Bedingungen zu Grunde gelegt hat. Die Bestimmung derselben kann aber nur dann erst erfolgen, wenn alle noch zum Ausdruck von  $\frac{d\delta x}{dt}$  kommenden Producte berechnet sind; ich habe oben schon die genauen Werthe angesetzt, obgleich die noch zu  $\frac{d\delta x}{dt}$  hinzukommenden Producte erst weiter unten gegeben werden.

In dieser Tafel sind ferner bei den Argumenten, die schon in dieser ersten Integration einen kleinen Divisor erhalten haben, und für die Länge bei der zweiten Integration wieder denselben kleinen Divisor erhalten werden, die also schliesslich das Quadrat des kleinen Divisors enthalten, zwei Zahlenangaben angesetzt. Die obere dieser ist aus den vorhergehenden Entwicklungen und Rechnungen entsprungen, die untere wird in dem folgenden Paragraphen erklärt werden.

Zu mehrerer Deutlichkeit will ich von dem Integrationsverfahren, welches hier angewandt worden ist, ein ausführliches Beispiel anführen. Man hat aus den Ausdrücken (30) gesehen, dass hiebei immer je drei Glieder in Betracht kommen, in deren Argumenten die Indices von  $g$  und  $g'$  dieselben sind, hingegen  $\gamma$  die Indices  $-1, 0, +1$  annimmt. Als Beispiel werde ich nun aus meiner Rechnung die drei Glieder der ersten Abtheilung ausheben, die die Indices  $-1, 0, -1; 0, 0, -1; 1, 0, -1$  haben. Für diese steht die Rechnung wie folgt:

	-1, 0, -1	0, 0, -1	1, 0, -1
Aus Art. 76 . . . . .	-5",44952	+0",76614	+8",15705
additional Gl. s. Art. 105	+210		-210
	-5.44742		+8.15495
logg. . . . .	0.7361909	9.884308n	0.9114213n
logg. ( $\beta+y$ ); $\beta$ ; ( $\beta-y$ )	8.8254153n	8.877592n	8.9241664n
	1.9107756n	1.006716	1.9872549
$l''$ . . . . .	7.7962		7.9715n
$l$ . . . . .	9.88112		9.95760n
	-81",428	+10",1558	+97",108
	-0.009	+0.7605	-0.006
		+0.9070	
$\Pi_{-1}; \Pi_0; \Pi_1$ . . . . .	-81.437	+11.8233	+97.102
$\eta^{(2)}$ . . . . .	0.34900n		0.42547
$\eta^{(3)}$ . . . . .	8.9633n		9.0398
$\eta^{(4)}$ . . . . .	7.656n		7.727

Die Abkürzungen, die ich hier angewandt habe, sind die folgenden. Die mit  $l''$  bezeichnete Zeile enthält die Producte  $\frac{l''}{\beta^2-y^2} A_{-1}$  und  $\frac{l''}{\beta^2-y^2} A_1$ , und die mit  $l$  bezeichnete die Producte  $\frac{l}{\beta} \Pi_{-1}$  und  $\frac{l}{\beta} \Pi_1$ , worauf die Zahlen folgen, die zufolge der Gleichungen (30) die Werthe von  $\Pi_{-1}; \Pi_0; \Pi_1$  geben. Hierauf folgen die Logarithmen der Producte.

dieser Coefficienten mit  $\eta^{(2)}$ ;  $\eta^{(3)}$ ;  $\eta^{(4)}$ , die zufolge des Satzes des Art. 35 die Coefficienten der Argumente  $-2,0,-1$ ;  $-3,0,-1$ ;  $-4,0,-1$ ; und der Argumente  $2,0,-1$ ;  $3,0,-1$ ;  $4,0,-1$  geben. Die im Art. 35 mit  $\theta^{(2)}$ ,  $\theta^{(3)}$ , etc. bezeichneten Multiplicatoren sind in diesem Beispiel unmerklich, und überhaupt fast unmerklich. Ich habe mir hier eine kleine Abkürzung erlaubt, die nichts zu bedeuten hat. Anstatt die vollen Werthe von  $\Pi_{-1}$  und  $\Pi_1$  mit  $\eta^{(2)}$ , etc. zu multipliciren, habe ich bloß den Haupttheil derselben, nemlich  $\frac{A_{-1}}{\beta+y}$  und  $\frac{A_1}{\beta-y}$  damit multiplicirt. Ein einziger Coefficient kommt vor, wo diese Abkürzung nicht zulässig ist, nemlich der vom Argument  $-1,0,-2$  der Abtheilung 2, hier ist das erste Glied  $= +1,957$  und das zweite  $= -0,180$ ; in diesem Coefficienten ist die Summe dieser beiden Glieder zur Multiplication mit  $\eta^{(2)}$  und  $\eta^{(3)}$  verwandt worden. Man sieht aus dieser Darstellung, welche ungemein grosse Abkürzung der Rechnung der Satz des Art. 35 gewährt; ohne diesen hätte man alle von  $2\gamma$ ,  $3\gamma$ , etc. abhängenden Glieder in der ganzen Rechnung mit durchführen müssen, während derselbe es möglich macht, diese bis auf den Punkt, wo wir jetzt ange- langt sind, gänzlich zu übergehen, und die nunmehrige Berücksichtigung derselben auf die einfachste Rechenoperation hinführt, die man sich denken kann.

## 107.

Verwandelt man nun in der Tafel des vor. Art.  $\gamma$  in  $g$ , oder mit anderen Worten, addirt man alle Coefficienten einer jeden Abtheilung derselben, so bekommt man die folgenden Werthe von  $\overline{W}_0$ ,  $\left(\frac{d\overline{W}_0}{d\gamma}\right)$ , etc.

$g, g'$	$\overline{W}_0$ cos	$\left(\frac{d\overline{W}_0}{d\gamma}\right)$ sin	$\left(\frac{d^2\overline{W}_0}{d\gamma^2}\right)$ cos	$\left(\frac{d^3\overline{W}_0}{d\gamma^3}\right)$ sin	$\left(\frac{d^4\overline{W}_0}{d\gamma^4}\right)$ cos
1.					
0,0	+1815,506		+1129,047		-1147,29
1,0	-126.344	+317,248	+489.152	-502,95	-864.43
2,0	-8.522	+22.343	+54.284	-103.93	-248.47
3,0	-0.420	+1.485	+5.107	-14.44	-46.83
4,0	-0.023	+0.100	+0.449	-1.70	-7.04



BERECHNUNG DER IN DEN MONDTAFELN ANGEWANDTEN STÖRUNGEN. 369

1.					
-3,-1	-0,093	-0,288	+0,883	+2,62	-7,95
-2,-1	-2,240	-4,638	+9,507	+18,90	-38,87
-1,-1	-76,277	-81,682	+86,433	+86,95	-97,41
0,-1	-44,5059	-7,0274	+56,691	+7,26	-58,17
1,-1	+106,916	-98,632	-91,482	+94,57	+83,15
2,-1	+2,679	-5,137	-9,812	+20,45	+39,78
3,-1	+0,105	-0,311	-0,894	+2,80	+8,34
-2,-2	-0,031	-0,065	+0,137	+0,28	-0,59
-1,-2	-0,989	-1,138	+1,268	+1,27	-1,54
0,-2	-0,9889	-0,2785	+1,435	+0,29	-1,48
1,-2	+1,821	-1,559	-1,335	+1,47	+1,14
2,-2	+0,039	-0,074	-0,137	+0,31	+0,58
-1,-3	-0,013	-0,017	+0,019	+0,02	-0,02
0,-3	-0,012	-0,004	+0,034	0,00	-0,04
1,-3	+0,036	-0,026	-0,024	+0,03	+0,03
2.					
0,0	+0,01718	+0,00181	-0,002		
1,0	-2,500	+2,525	+2,537	-2,52	-2,54
2,0	-0,079	+0,153	+0,295	-0,57	-1,12
-1,-1	+0,065	+0,069	-0,085	-0,09	+0,16
0,-1	+1,3252	-0,0225	-0,108	+0,12	-0,30
1,-1	-18,099	+18,845	+18,813	-17,53	-21,39
2,-1	-33,188	+49,146	+65,714	-52,07	-72,31
3,-1	-1,486	+3,544	+8,474	-13,23	-28,41
4,-1	-0,074	+0,241	+0,854	-2,01	-6,03
5,-1	-0,004	+0,016	+0,077		
-2,-2	+0,046	+0,100	-0,226		
-1,-2	+1,977	+2,147	-2,442	-2,39	+2,62
0,-2	+4,3468	+11,6225	-2,701	-2,18	+0,31
1,-2	+3842,549	-3614,379	-3400,402	+3514,66	+3599,69
2,-2	+3986,672	-5662,176	-7053,026	+6228,53	+8218,33
3,-2	+173,182	-399,240	-854,174	+1492,08	+3136,59
4,-2	+8,327	-26,904	-82,677	+219,83	+656,15
5,-2	+0,436	-1,828	-7,351	+26,44	+103,20
6,-2	+0,025	-0,127	-0,633	+2,86	+13,89
-1,-3	+0,068	+0,080	-0,102		
0,-3	-0,690	+0,575	-0,175	-0,07	+0,23
1,-3	+148,838	-135,425	-122,911	+128,90	+135,98
2,-3	+264,935	-370,009	-455,501	+390,52	+498,82
3,-3	+11,355	-25,996	-55,986	+95,60	+198,84
4,-3	+0,543	-1,750	-5,463	+14,22	+42,13
5,-3	+0,028	-0,117	-0,479	+1,68	
0,-4	-0,034	+0,022	-0,007		
1,-4	+4,630	-4,065	-3,545	+3,78	+4,12
2,-4	+12,369	-16,968	-20,660	+17,55	+21,95
3,-4	+0,521	-1,184	-2,559	+4,33	+8,95
4,-4	+0,025	-0,080	-0,249		
1,-5	+0,135	-0,107	-0,098		
2,-5	+0,502	-0,673	-0,807		
3,-5	+0,022	-0,047	-0,101		

11.					
2,-2	0,000	+0,004			
3,-2	0.000	0.000			
1,-3	+0.010	+0.006			
2,-3	-0.002	+0.002	-0,042		
3,-3	-0.020	+0.023	+0.455		
4,-3	+0.013	-0.080	+0.062		
5,-3	+0.002	-0.041	+0.008		
0,-4	+0.034	+0.004	-0.004		
1,-4	+0.664	-0.484	-0.387		
2,-4	+2.448	-4.256	-3.173	+2,44	+7,49
3,-4	+1.813	-4.848	-27.626	+4.96	+29.64
4,-4	-0.829	+3.099	-3.364	-0.46	+9.00
5,-4	-0.087	+0.406	-0.453		
6,-4	-0.008	+0.038	-0.058		
7,-4	0.000	+0.002			
1,-5	+0.037	-0.024			
2,-5	+0.270	-0.457	-0.339		
3,-5	+0.244	-0.610	-3.182	+0.64	+3.43
4,-5	-0.106	+0.425	-0.425	-0.14	+1.07
5,-5	-0.040	+0.058	-0.065		
6,-5	0.000	+0.005			
2,-6	+0.048	-0.028			
3,-6	+0.024	-0.048	-0.228		
4,-6	-0.008	+0.032	-0.034		
5,-6	0.000	+0.004	-0.006		
3,-7	+0.003	-0.002			
4,-7	-0.004	+0.002			
15.					
4,-5	0.000	-0.004			
5,-5	-0.004	-0.003			
3,-6	-0.006	-0.016			
4,-6	+0.006	+0.093	-0.237		
5,-6	+0.047	+0.088	-0.090		
6,-6	+0.009	+0.048	-0.036		
7,-6	+0.002	+0.003			
3,-7	-0.004	0.000			
4,-7	0.000	+0.014			
5,-7	+0.004	+0.016			
6,-7	+0.004	+0.003			

Wir kommen jetzt zu der Integration, die  $\delta P$  und  $\delta Q$  giebt, und nach den Ausdrücken (35) ausgeführt werden muss. Als Vorbereitung hierzu bedarf es der numerischen Werthe der Divisoren  $\beta + \alpha$  und  $\beta - \alpha$ , deren Product die in den (35) enthaltenen Divisoren giebt. Diese numerischen Werthe sind in der folgenden Tafel zusammengestellt.

$i, i'$	$\beta + \alpha$	$\beta - \alpha$	$i, i'$	$\beta + \alpha$	$\beta - \alpha$
<b>1.</b>			<b>4.</b>		
1,0	1.00405	0.99595	-1,1	-0.912	-0.920
2,0	2.0041	4.9960	0,1	+0.87600	+0.079504
-1,-1	-1.0714	-1.0795	1,1	1.088	1.080
0,-1	-0.071390	-0.079486	0,0	0.0121	0.00407
1,-1	+0.9286	+0.9205	<b>5.</b>		
-1,-2	-1.149	-1.155	0,2	0.188	0.180
0,-2	-0.1468	-0.1549	1,2	1.188	1.180
1,-2	+0.8532	+0.8451	<b>12.</b>		
<b>2.</b>			1,-2	0.895	0.887
0,0	0.02109	0.01300	2,-2	1.895	1.887
0,-1	-0.05434	-0.06244	3,-3	2.82	2.81
1,-1	+0.9457	+0.9376	<b>13.</b>		
-1,-2	-1.130	-1.138	0,-4	-0.289	-0.297
0,-2	-0.12978	-0.13788	1,-4	+0.7112	+0.7032
1,-2	+0.87022	+0.86212	2,-5	1.64	1.63
0,-3	-0.2052	-0.2133	<b>18.</b>		
1,-3	+0.7948	+0.7867	3,0	3.038	3.030
1,-4	0.719	0.711	<b>19.</b>		
2,-4	1.719	1.711	0,4	0.322	0.314
<b>11.</b>			<b>6.</b>		
2,-4	1.736	1.728	0,0	0.0126	0.00447
3,-4	2.736	2.728	0,-1	-0.6267	-0.07096
<b>3.</b>			1,-1	+0.9371	+0.9290
2,2	2.18	2.17	0,-2	-0.138	-0.146
0,1	0.1046	0.0965	1,-2	+0.862	+0.854
1,1	1.105	1.097	<b>7.</b>		
0,0	0.029208	0.021112	2,-3	1.80	1.80
1,0	1.0292	1.021	3,-3	2.80	2.80
0,-1	-0.04623	-0.05433	<b>8.</b>		
1,-1	+0.95377	+0.94567	0,2	0.172	0.164
2,-2	1.88	1.87	1,2	1.172	1.164
<b>4.</b>			0,1	0.0961	0.0880
-1,4	-0.686	-0.694	1,1	1.096	1.088
0,4	+0.3139	+0.3058	0,0	0.0207	0.0126
1,4	1.31	1.31	<b>9.</b>		
-1,3	-0.762	-0.770	2,-1	1.96	1.95
0,3	+0.23847	+0.23037	3,-1	2.96	2.95
1,3	1.238	1.230	<b>10.</b>		
-1,2	-0.8370	-0.8451	0,-3	-0.222	-0.230
0,2	+0.163038	+0.154942	1,-3	+0.778	+0.770
1,2	1.1630	1.1549			

Zu den Zahlenwerthen von  $B$  und  $C$  des Art. 82 kommen noch die von  $B^{(3)}$  und  $C^{(3)}$  der Artt. 63 und 64, sowie die folgenden Glieder hinzu,

$$B = -0,0006 \cos(2g' + 2\omega')$$

$$C = -0.0006 \sin(2g' + 2\omega')$$

die von den Planeten herrühren, und weiter unten erklärt werden. Die Integration wird nun nach den Ausdrücken (35) ausgeführt, wobei das constante Glied in  $B$  übergangen werden muss, weil es schon zur Bestimmung von  $\alpha$  gedient hat. Die Rechnung, welche ohne Schwierigkeiten ist, giebt die folgenden Resultate.

$g, g'$	$\delta P$ sin	Diff.	$\delta Q$ cos	Diff.	$g, g'$	$\delta P$ sin	Diff.	$\delta Q$ cos	Diff.
1.					2.				
0,0			+34,788	-88	1,-4	-0,045	-1	+0,042	+1
1,0	-10,550	-6	+2.633	-3	2,-4	+0.117	+2	-0.121	+2
2,0	-0.195	-3	+0.133	+5	11.				
3,0	-0.007	+2	+0.006	-2	2,-4	-0.024	0	+0.020	0
-2,-1	+0.005	+2	+0.003	+1	3,-4	+0.393	-4	-0.395	+4
-1,-1	+0.215	+2	+0.068	+3	3,-5	+0.047	-1	-0.046	0
0,-1	-48.717	-4	+0.465	-2	3.				
1,-1	-0.421	+3	+0.174	+8	2,2	-0.018	0	+0.018	0
2,-1	-0.009	+2	+0.008	-2	0,1	-0.222	+4	+0.221	+22
-1,-2	+0.007	0	+0.003	0	1,1	+0.362	+2	-0.367	+3
0,-2	-0.601	+4	+0.044	0	2,1	-0.818	+5	+0.818	-5
1,-2	-0.012	-1	+0.007	0	3,1	-0.025	0	+0.025	0
2.					0,0	-26.038	+21	+25.762	-3
0,0	+0.004	-2	-0.004	+1	1,0	+12.848	0	-12.824	+4
0,-1	-0.084	-5	-0.020	+8	2,0	-36.964	-1	+36.956	+4
1,-1	+0.071	+1	-0.096	-1	3,0	-1.392	+7	+1.392	-7
2,-1	-0.529	0	+0.515	+1	4,0	-0.057	-1	+0.057	+1
3,-1	-0.025	+1	+0.028	-4	0,-1	+0.176	-5	-0.175	+4
-1,-2	-0.009	+6	-0.014	+7	1,-1	+0.304	+3	-0.304	-3
0,-2	-4.834	+5	+4.895	-8	2,-1	-1.015	-6	+1.017	+4
1,-2	-15.845	+3	+14.530	+4	3,-1	-0.048	0	+0.047	+1
2,-2	+39.627	+1	-40.581	+1	2,-2	-0.026	+1	+0.026	-1
3,-2	+1.460	-1	-1.470	+1	4.				
4,-2	+0.061	+1	-0.060	-1	-1,4	-0.045	0	+0.045	0
0,-3	-0.178	-8	+0.178	-11	0,4	-0.586	-14	+0.600	0
1,-3	-1.020	+1	+0.931	-2	1,4	+0.008	0	-0.008	0
2,-3	+2.583	+5	-2.675	-5					
3,-3	+0.105	+2	-0.106	-1					

<b>4.</b>					<b>19.</b>				
-1,3	-0,334	-3	+0,338	-5	0,4	+0,049	+44	-0,022	-38
0,3	-19.357	+40	+19.424	+17	<b>6.</b>				
1,3	+0.309	+5	-0.346	+1	0,0	-0.147	-16	+0.043	+6
-2,2	-0.032	+1	+0.028	0	0,-1	+1.322	+37	-0.170	+3
-1,2	-4.756	+1	+4.657	0	1,-1	+0.644	+26	-0.134	-35
0,2	-484.181	+1	+485.923	-4	2,-1	-0.007	0	-0.006	+6
1,2	+5.650	-14	-5.660	+13	0,-2	+0.025	+3	-0.044	+10
2,2	+0.094	+1	-0.094	-1	1,-2	+0.028	-4	+0.006	0
-1,1	+0.075	+1	-0.076	0	<b>7.</b>				
0,1	+9.865	+48	-9.894	-64	2,-3	-0.037	-9	+0.036	+10
1,1	+0.040	-4	-0.031	-5	3,-3	+0.072	+1	-0.073	-4
0,0	+0.136	+9	-0.135	-12	<b>8.</b>				
<b>5.</b>					0,2	+0.042	-	-0.042	-
0,2	+0.043	-3	-0.044	+2	1,2	-0.013	-	+0.043	-
1,2	+0.003	-	-0.002	-	0,4	+0.537	+12	-0.535	-14
2,2	-0.056	+1	+0.056	-1	1,4	-0.324	-2	+0.332	-8
<b>12.</b>					0,0	-0.003	-13	+0.003	+14
2,-2	+0.086	+2	-0.086	-2	<b>9.</b>				
3,-2	-0.372	0	+0.370	0	2,-1	+0.030	+3	-0.032	-1
3,-3	-0.027	-3	+0.028	+2	3,-1	-0.068	-1	+0.069	0
<b>13.</b>					<b>10.</b>				
0,-4	+0.404	+13	+0.399	+17	0,-3	-0.185	-10	-0.198	-6
1,-4	+0.774	+4	+0.778	+2	1,-3	-0.349	-6	-0.324	-8
2,-4	+0.544	-1	+0.520	0					
2,-5	+0.070	-25	+0.067	+3					
<b>18.</b>									
3,0	+0.004	+9	-0.004	-9					

Die in den »Diff.« überschriebenen Columnen enthaltenen Zahlen sind die Unterschiede zwischen den nebenstehenden Werthen, und den der Rechnung zu Grunde gelegten, im Art. 66 angegebenen Werthen. Diese Unterschiede sind alle befriedigend klein. Die dem Werthe von  $\delta Q$  hinzugefügte Constante ist so bestimmt worden, dass der Coefficient des in den weiter unten zu berechnenden Breitenstörungen mit  $\sin(g + \omega)$  multiplicirten Gliedes gleich Null ist. Wenn wie hier ein sehr genäherter Werth dieser Constante gegeben ist, so ist es ein Leichtes, die Verbesserung desselben so zu bestimmen, dass die eben ausgesprochene Bedingung erfüllt ist. Den genähereten Werth dieser Constante haben die vorhergehenden Annäherungen gegeben.

110.

Durch das unter der Bezeichnung  $X$  im Art. 85 gegebene Differential, und durch die Integrationsformel (37), wo wieder das constante Glied

weggelassen werden muss, weil es schon zur Bestimmung von  $\eta$  verwandt worden ist, bekommt man für  $\delta\delta K$  die folgenden Coefficienten.

$g, g'$	$\frac{\delta\delta K}{\sin}$
<u>1.</u> 0, -1	-0,046
<u>2.</u> 0, -2 1, -2 2, -2	-0.046 -0.013 +0.031
<u>3.</u> 0, 0	-0.198
<u>4.</u> 0, 3 0, 2 0, 1	-0.030 -0.598 +0.028
<u>13.</u> 1, -4 2, -4	+0.011 -0.029

womit alle ersten Integrationen ausgeführt sind.

**§ 7. Anderweitige, zur Prüfung dienende, Berechnung der Glieder der Längenstörungen, die einen kleinen Divisor im Quadrat bekommen.**

111.

Unter allen im Vorhergehenden berechneten Gliedern werden selbstverständlich diejenigen im Resultat die wenigste Genauigkeit besitzen, die das Quadrat eines kleinen Divisors erhalten. Denn um ihnen gleiche Genauigkeit wie den übrigen zu geben muss man sie im Differential mit mehr Decimalstellen berechnen, und bei dieser Berechnung kommen wieder höhere Decimalen der übrigen Störungen in Betracht, und können hier eine merkliche Wirkung ausüben, während dieselben Decimalen in den anderen Gliedern nur Unmerkliches zuwege bringen. Diese Glieder kommen nur in den Längenstörungen vor, wenn man wie hier die Störungen der mittleren Anomalie (oder Länge) berechnet, und sie

hängen in der Mondtheorie von den Argumenten ab, in welchen entweder bloß der Index von  $g$  Null ist, oder ausserdem auch der von  $g'$  Null ist. Im Vorhergehenden bekommt das Glied der Abtheilung 2., welches das Argument  $0,0,0$  hat, das Quadrat des kleinsten Divisor, und dieser ist zufolge des Art. 104 =  $0,0170 \dots$ , hierauf folgen diese die das Argument  $0,0,\overline{-1}$  haben, für welche der Divisor selbst nahe =  $\frac{1}{13}$  ist, dann kommen die mit dem Argument  $0,0,\overline{-2}$ , wo der Divisor nahe =  $\frac{2}{13}$  ist, u. s. w. Um in die Berechnung dieser Glieder die möglichste Sicherheit zu legen, ist es sehr wünschenswerth, sie ausser dem im Vorhergehenden angewandten Verfahren durch ein anderes berechnen zu können, bei welchem der Divisor sich vergrössert, und folglich die höheren Decimalen des Differentials geringeren Einfluss auf das Resultat ausüben. Ich werde im Folgenden ein solches Verfahren entwickeln und anwenden, wodurch der Divisor  $\beta^2$  in  $\beta \frac{\beta}{e'u}$  und  $\beta \frac{\beta}{e'u^2}$  verwandelt wird, und daher eine weit grössere Genauigkeit im Resultat erlangt wird.

Dieses Verfahren lässt sich freilich nicht ohne einige Mühe anwenden, allein ich habe diese nicht gescheut, weil dadurch grössere Sicherheit im Resultat erlangt, und die Genauigkeit, die die im Vorhergehenden dargelegten Entwicklungen und Rechnungen besitzen, in ein helleres Licht gestellt wird.

112.

Erheben wir von den Gleichungen

$$\mathcal{X} = -1 - \frac{h_0}{h} + 2 \frac{h}{h_0} - \frac{3e_0}{1-e_0^2} \frac{h}{h_0} \{e \cos(\chi - n_0 y t - \pi_0) - e_0\}$$

$$Y = \frac{2}{1-e_0^2} \frac{h}{h_0} \{e \cos(\chi - n_0 y t - \pi_0) - e_0\}$$

$$\Psi = \frac{2}{1-e_0^2} \frac{h}{h_0} e \sin(\chi - n_0 y t - \pi_0)$$

des Art. 88 die beiden letzten ins Quadrat addiren, so ergibt sich eine Gleichung, die sich leicht wie folgt stellen lässt,

$$\frac{e_0}{1-e_0^2} \left(\frac{h}{h_0}\right)^2 e \cos(\chi - n_0 y t - \pi_0) = -\frac{1}{2}(1-e_0^2)(Y^2 + \Psi^2) + \frac{e^2}{2(1-e_0^2)} \left(\frac{h}{h_0}\right)^2 + \frac{e_0^2}{2(1-e_0^2)} \left(\frac{h}{h_0}\right)^2$$

eliminiert man hieraus  $e \cos(\chi - n_0 y t - \pi_0)$  mittelst der ersten, so bekommt man

$$\frac{h}{h_0} \mathcal{X} = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \frac{1-e_0^2}{1-e_0^2} \left(\frac{h}{h_0}\right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{h}{h_0}\right)^2 + \frac{3}{8}(1-e_0^2)(Y^2 + \Psi^2)$$

Es ist aber

$$\frac{1-e^2}{1-e_0^2} \left(\frac{h}{h_0}\right)^2 = \frac{a_0}{a}$$

und setzen wir daher  $\frac{a_0}{a} = 1 + \delta \frac{a_0}{a}$ , so wird

$$\mathcal{Z} = \frac{1}{2} \delta \frac{a_0}{a} + \left\{ \frac{1}{2} \delta \frac{h}{h_0} - \mathcal{Z}' \right\} \delta \frac{h}{h_0} + \frac{1}{2} (1+e_0^2) \{ T^2 + \Psi^2 \}$$

wo mit Ausnahme des ersten Gliedes alle Glieder rechter Hand Größen der zweiten Ordnung in Bezug auf die störenden Kräfte sind. Nun ist aber

$$\delta \frac{a_0}{a} = -2a_0 \int n \left( \frac{d\Omega}{dg} \right) dt$$

und

$$n \left( \frac{d\Omega}{dg} \right) = \left( \frac{d\Omega}{dv} \right) dv + \left( \frac{d\Omega}{dr} \right) dr$$

Es ist ferner das vollständige Differential von  $\Omega$ , wenn wir nur auf die störende Kraft der Sonne Rücksicht nehmen,

$$d\Omega = \left( \frac{d\Omega}{dv} \right) dv + \left( \frac{d\Omega}{dr} \right) dr + \left( \frac{d\Omega}{dv'} \right) dv' + \left( \frac{d\Omega}{dr'} \right) dr'$$

und hiemit geht der obige Ausdruck für  $\mathcal{Z}$  in den folgenden über.

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} = & -3a_0 \Omega + \left\{ \frac{1}{2} \delta \frac{h}{h_0} - \mathcal{Z}' \right\} \delta \frac{h}{h_0} + \frac{1}{2} (1-e_0^2) \{ T^2 + \Psi^2 \} \\ & + 3a_0 \int \left\{ \left( \frac{d\Omega}{dv} \right) dv' + \left( \frac{d\Omega}{dr'} \right) dr' \right\} \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck besteht, wie man sieht, aus zwei von einander wesentlich verschiedenen Theilen. Der erste dieser ist vom Integralzeichen befreit, und giebt daher in den Längenstörungen nur Glieder, die mit der ersten Potenz der Integrationsdivisoren behaftet sind. Der zweite Theil giebt zwar wieder in den Längenstörungen Glieder, die das Quadrat dieser Divisoren erhalten, aber er hängt von den Differentialen der Sonnenbewegung ab, und diese sind mit  $n'$  multiplicirt, während die Differentiale der Mondbewegung mit  $n$  multiplicirt sind. Nun ist aber nahe  $n' : n = 1 : 13$ , und es sind daher die Zähler der hieraus entstehenden Glieder nahe 13 Mal kleiner, wie die der im Vorhergehenden angewandten Ausdrücke.

Das erste der unter dem Integralzeichen stehenden Glieder dieses Ausdrucks kann von diesem Zeichen befreit, und auf übrigens bekannte Functionen hingeführt werden.



Da hier

$$\omega - \omega' = 2K, \quad \omega + \omega' = 2N$$

gesetzt werden darf, so erhält man leicht

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\Omega}{d\omega}\right) &= \left(\frac{d\Omega}{d\nu}\right) = \frac{1}{2} \left(\frac{d\Omega}{dK}\right) + \frac{1}{2} \left(\frac{d\Omega}{dN}\right) \dots\dots\dots (A) \\ \left(\frac{d\Omega}{d\omega'}\right) &= \left(\frac{d\Omega}{d\nu'}\right) = -\frac{1}{2} \left(\frac{d\Omega}{dK}\right) + \frac{1}{2} \left(\frac{d\Omega}{dN}\right) \end{aligned}$$

und hiemit

$$\left(\frac{d\Omega}{d\nu'}\right) = -\left(\frac{d\Omega}{d\nu}\right) + \left(\frac{d\Omega}{dN}\right) \dots\dots\dots (B)$$

Mit Weglassung der kleinen mit  $dp'$  und  $dq'$  multiplicirten Glieder, die hier keine Wirkung äussern, ergibt sich aus dem Art. 13, dass

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dt} &= -n\alpha Q - h \left(\frac{d\Omega}{dQ}\right) \cos 2\frac{1}{2}J - \frac{1}{2}hP \left(\frac{d\Omega}{dK}\right) \\ \frac{dQ}{dt} &= n\alpha P + h \left(\frac{d\Omega}{dP}\right) \cos 2\frac{1}{2}J - \frac{1}{2}hQ \left(\frac{d\Omega}{dK}\right) \end{aligned}$$

ist, ferner ist

$$P^2 + Q^2 = \frac{1}{2} \sin 2\frac{1}{2}J$$

woraus

$$PdP + QdQ = \sin JdJ$$

folgt, hiemit geben die vorstehenden Gleichungen

$$\frac{\sin J}{h} \frac{dJ}{dt} = \left\{ P \left(\frac{d\Omega}{dP}\right) - Q \left(\frac{d\Omega}{dQ}\right) \right\} \cos 2\frac{1}{2}J - \left(\frac{d\Omega}{dK}\right) \sin 2\frac{1}{2}J$$

Aus den, die Relationen zwischen  $P$  und  $Q$  einerseits, und  $J$  und  $N$  andernseits ausdrückenden, Gleichungen (11) folgt aber, dass

$$P \left(\frac{d\Omega}{dP}\right) - Q \left(\frac{d\Omega}{dQ}\right) = \left(\frac{d\Omega}{dN}\right)$$

ist, es wird daher

$$\frac{\sin J}{h} \frac{dJ}{dt} = \left(\frac{d\Omega}{dN}\right) \cos 2\frac{1}{2}J - \left(\frac{d\Omega}{dK}\right) \sin 2\frac{1}{2}J$$

Die Gleichung (A) giebt ferner

$$2 \sin 2\frac{1}{2}J \left(\frac{d\Omega}{d\nu}\right) = \left(\frac{d\Omega}{dN}\right) \sin 2\frac{1}{2}J + \left(\frac{d\Omega}{dK}\right) \sin 2\frac{1}{2}J$$

und hiemit wird (B)

$$\left(\frac{d\Omega}{d\nu'}\right) = -\left(\frac{d\Omega}{d\nu}\right) \cos J + \frac{\sin J}{h} \frac{dJ}{dt}$$

Bedenkt man nun, dass zufolge des Vorhergehenden

$$d \frac{1}{h} = \left(\frac{d\Omega}{d\nu}\right) dt$$

ist, so wird das Integral der vorstehenden Gleichung

$$\int \left(\frac{d\Omega}{d\nu'}\right) dt = -\frac{\cos J}{h} + k$$

wo  $k$  die dem Integral hinzugefügte Constante ist. Vermittelst dieser Gleichung ergibt sich durch partielle Integration

$$\int \left( \frac{d\Omega}{dv'} \right) dv' = - \left( \frac{\cos J}{h} - k \right) \frac{dv'}{dt} + \int \left( \frac{\cos J}{h} - k \right) \frac{d^2v'}{dt^2}$$

wo  $k$  willkürlich bleibt, da  $\int k \frac{d^2v'}{dt^2} = k \frac{dv'}{dt}$  ist. Da  $d^2v'$  von der Ordnung  $e'$  ist, so zeigt die vorstehende Gleichung, dass die grössten Glieder des Integrals linker Hand vom Integrationszeichen befreit sind. Substituieren wir nun diesen Ausdruck in die Gleichung, die im vor. Art. abgeleitet wurde, und setzen  $k = \frac{\cos J_0}{h_0}$ , so erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} = & - 3a_0 \Omega + \left\{ \frac{1}{2} \delta \frac{h}{h_0} - \mathcal{Z}' \right\} \delta \frac{h}{h_0} + \frac{1}{3} (1 - e_0^2) \{ T^2 + \mathcal{Y}^2 \} \\ & - 3a_0 \left\{ \frac{\cos J}{h} - \frac{\cos J_0}{h_0} \right\} \frac{dv'}{dt} \\ & + 3a_0 \int \left\{ \left\{ \frac{\cos J}{h} - \frac{\cos J_0}{h_0} \right\} \frac{d^2v'}{dt^2} + \left( \frac{d\Omega}{dr'} \right) dr' \right\} \end{aligned}$$

wo die Glieder unter dem Integralzeichen von der Ordnung  $u^2 e'$  und  $u e'$  sind, wenn wie immer  $u = \frac{n'}{n}$  ist.

## 114.

Da wir für die Substitution in die eben abgeleitete Gleichung nur die elliptischen Werthe der Differentiale der Sonnenkoordinaten brauchen, so wird

$$\begin{aligned} dv' = n' \left( \frac{a'}{r'} \right)^2 \sqrt{1 - e'^2} dt, \quad d^2v' = -2n'^2 e' \left( \frac{a'}{r'} \right)^3 \sin f' dt \\ dr' = n' e' \frac{a' \sin f'}{\sqrt{1 - e'^2}} dt \end{aligned}$$

Bedenken wir noch, dass für die Glieder von  $\Omega$ , welche hier in Betracht kommen,

$$r' \left( \frac{d\Omega}{dr'} \right) = - 3\Omega$$

ist, und nehmen auch auf die Gleichung  $h_0 = \frac{a_0 n_0}{\sqrt{1 - e_0^2}}$  Bedacht, so bekommen wir schliesslich

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} = & - 3a_0 \Omega + \left\{ \frac{1}{2} \delta \frac{h}{h_0} - \mathcal{Z}' \right\} \delta \frac{h}{h_0} + \frac{1}{3} (1 - e^2) \{ T^2 + \mathcal{Y}^2 \} \\ & - 3u \sqrt{1 - e^2} \cdot \sqrt{1 - e'^2} \cdot \left( \frac{a'}{r'} \right)^2 \left\{ \cos J - \cos J_0 + \cos J \delta \frac{h_0}{h} \right\} + Z \end{aligned}$$

wo

$$\frac{dZ}{ndt} = -9e'ua\Omega \left( \frac{a'}{r'} \right) \frac{\sin f'}{\sqrt{1 - e'^2}} - 6e'u^2 \sqrt{1 - e^2} \left\{ \cos J - \cos J_0 + \cos J \delta \frac{h_0}{h} \right\} \left( \frac{a'}{r'} \right)^3 \sin f'$$

ist. In Bezug auf  $\Omega$  ist hier noch eine Bemerkung zu machen. Das erste Glied in der Entwicklung dieser Function, nemlich

$$\Omega = \frac{m'}{1+m} \frac{1}{r'}$$

ist im Vorhergehenden immer weggelassen worden, weil nur Differentiale von  $\Omega$  in Bezug auf die Mondcoordinaten vorkamen, die in diesem Gliede nicht enthalten sind. Hier, wo  $\Omega$  selbst vorkommt, scheint es, als müsse dieses Glied mit berücksichtigt werden, aber es lässt sich leicht zeigen, dass es auch hier ohne Wirkung ist. Berücksichtigen wir bloß dieses Glied, so wird

$$\left(\frac{d\Omega}{dv'}\right) = 0, \quad \left(\frac{d\Omega}{dr'}\right) = -\frac{m'}{1+m} \frac{1}{r'^2}$$

und substituiren wir diese Ausdrücke in den Ausdruck für  $\bar{\mathcal{E}}$  des Art. 112, so ergibt sich

$$\bar{\mathcal{E}} = -3a \frac{m'}{1+m} \frac{1}{r'} - 3a \frac{m'}{1+m} \int \frac{dr'}{r'^2} = 0$$

Wir können also hier von der oben gegebenen Entwicklung von  $a\Omega$  ohne Weiteres Gebrauch machen.

115.

Wenn man gleichwie im Art. 43 unter  $\bar{\Omega}$  den Ausdruck von  $\Omega$  versteht, in welchem  $\bar{r}$  statt  $r$  substituirt worden ist, so wird

$$a\Omega = a\bar{\Omega} + a\bar{\Omega} (2\nu + \nu^2)$$

und  $a\bar{\Omega}$  wird aus  $a\Omega_0$ , in welchem nur die elliptischen Werthe der darin enthaltenen Functionen gesetzt worden ist, durch den Ausdruck (20) erhalten, nachdem darin  $a\Omega_0$  statt  $T_0$  gesetzt worden ist. Die Factoren, mit welchen die Coefficienten von  $a\Omega_0$  multiplicirt werden müssen, um die im angeführten Ausdruck vorkommenden Differentialquotienten zu erhalten, sind dieselben wie für  $T_0$ , und in den Artt. 47 u. 48 angegeben, nur müssen, da  $T_0$  von Sinussen und  $\Omega_0$  von Cosinussen abhängt, die Factoren, welche  $R$  und  $V$  geben, das entgegengesetzte Zeichen bekommen; endlich müssen die Columnen, die in  $T_0$  und den Differentialquotienten davon Sinusse enthielten, hier Cosinusse, und die, welche dort Cosinusse enthielten, hier Sinusse bekommen.

Nach diesen Bemerkungen ist es leicht, aus den im Art. 55 gegebenen Coefficienten von  $a\Omega_0$ , und den im Art. 56 gegebenen Werthen der Factoren für  $R, Y, S, V, Z$  die folgende Tafel herzustellen.

$g, g'$	$-3a\Omega_0$ cos	$R$ sin	$Y$ cos	$S$ cos	$V$ sin	$Z$ cos
<u>1.</u>						
0,0	-874.052		+237.38	+2644"		+2622"
1,0	+95.504		-25.93	-289		-286
2,0	+1.310		-0.36	-4		-4
3,0	+0.036		-0.01			
4,0	+0.004					
-3,-1	+0.004					
-2,-1	+0.033		-0.04			
-1,-1	+2.406		-0.65	-7		-7
0,-1	-44.0273		+11.96	+133		+132
1,-1	+2.406		-0.65	-7		-7
2,-1	+0.033		-0.01			
3,-1	+0.004					
-2,-2	+0.004					
-1,-2	+0.061		-0.02			
0,-2	-1.1089		+0.30	+3		+3
1,-2	+0.061		-0.02			
2,-2	+0.004					
-1,-3	+0.002					
0,-3	-0.027					
1,-3	+0.002					
<u>2.</u>						
-1,-1	-0.004					
0,-1	+0.1664	+0.04	-0.04			
1,-1	-3.632	-0.33	+0.33	+4		+4
2,-1	+21.919	+1.97	-1.97	-22		-22
3,-1	+1.204	+0.11	-0.11	-1		-1
4,-1	+0.066	+0.01	-0.01			
5,-1	+0.004					
-2,-2	+0.004					
-1,-2	+0.127	+0.04	-0.04			
0,-2	-19.8074	-1.78	+1.78	+20		+20
1,-2	+432.236	+38.90	-38.90	-437	-4"	-432
2,-2	-2608.866	-234.74	+234.74	+2635	+21	+2604
3,-2	-143.284	-12.89	+12.89	+145	+1	+143
4,-2	-7.864	-0.71	+0.71	+8		+8
5,-2	-0.449	-0.04	+0.04			
6,-2	-0.027					
-1,-3	+0.007					
0,-3	-1.164	-0.40	+0.40			
1,-3	+25.406	+2.29	-2.29	-26		-25
2,-3	-153.344	-13.80	+13.80	+155	+1	+153
3,-3	-8.422	-0.76	+0.76	+9		+8
4,-3	-0.462	-0.04	+0.04			
5,-3	-0.026					

BERECHNUNG DER IN DEN MONDTAFELN ANGEWANDTEN STÖRUNGEN. 381

<b>2.</b>						
0,-4	-0,047					
1,-4	+1.036	+0,09	-0,09			
2,-4	-6.253	-0.56	+0.56	+6"		+6"
3,-4	-0.343	-0.03	+0.03			
4,-4	-0.049					
1,-5	+0.036					
2,-5	-0.218					
3,-5	-0.012					
2,-6	-0.007					
<b>3.</b>						
2,2	-0.007	+0.15	-0.15			
0,1	-0.0020	+0.04	-0.04			
1,1	+0.044	-0.98	+0.98	-11	-11"	+11
2,1	-0.266	+5.91	-5.91	+65	+65	-65
3,1	-0.045	+0.33	-0.33	+4	+4	-4
-1,0	+0.001					
0,0	-0.08011	+1.78	-1.78	+20	+20	-20
1,0	+1.748	-38.85	+38.85	-431	-430	+429
2,0	-10.551	+234.52	-234.52	+2601	+2596	-2591
3,0	-0.579	+12.88	-12.88	+143	+143	-142
4,0	-0.032	+0.71	-0.71	+8	+8	-8
0,-1	-0.0020	+0.04	-0.04			
1,-1	+0.044	-0.98	+0.98	-11	-11	+11
2,-1	-0.266	+5.91	-5.91	+65	+65	-65
3,-1	-0.045	+0.33	-0.33	+4	+4	-4
2,-2	-0.007	+0.15	-0.15			
<b>4.</b>						
0,4	-0.026	+0.57	-0.57	+6	+6	-6
-1,3	+0.034	-0.76	+0.76	-9	-8	+8
0,3	-0.627	+13.99	-13.94	+157	+156	-154
1,3	+0.034	-0.76	+0.76	-9	-8	+8
-2,2	+0.008	-0.18	+0.18	-2	-2	+2
-1,2	+0.583	-13.01	+12.96	-146	-145	+143
0,2	-10.6672	+238.07	-237.11	+2673	+2647	-2619
1,2	+0.583	-13.01	+12.96	-146	-145	+143
2,2	+0.008	-0.18	+0.18	-2	-2	+2
-1,4	-0.005	+0.11	-0.11			
0,1	+0.0896	-2.00	+1.99	-23	-22	+22
1,1	-0.005	+0.11	-0.11			
<b>5.</b>						
1,2	+0.002	-0.09	+0.09			
2,2	-0.011	+0.47	-0.47	+16	+16	-16
3,2	-0.001	+0.03	-0.03			
<b>6.</b>						
1,1	-0.001					
0,0	+0.00737					
1,0	-0.054		+0.09			
2,0	+0.001					

6.						
-1,-1	-0,013					
0,-1	+0.4389	+0,02	-0,22			
1,-1	-3.210	-0.44	+1.64			
2,-1	+0.087		-0.04			
3,-1	+0.004					
0,-2	+0.0221					
1,-2	-0.162		+0.08			
2,-2	+0.004					
0,-3	+0.001					
1,-3	-0.006					
7.						
1,-2	+0.002					
2,-2	-0.022					
3,-2	+0.089					
4,-2	+0.007					
0,-3	+0.004					
1,-3	-0.116					
2,-3	+1.325	+0.18	-0.18			
3,-3	-5.296	-0.74	+0.74			
4,-3	-0.438	-0.06	+0.06			
5,-3	-0.030					
1,-4	-0.010					
2,-4	+0.111					
3,-4	-0.445	-0.06	+0.06			
4,-4	-0.037					
2,-5	+0.006					
3,-5	-0.024					
8.						
0,1	+0.0054	-0.12	+0.12			
1,1	-0.039	+0.87	-0.86			
2,1	+0.004					
0,0	+0.00009					
1,0	-0.004					
9.						
3,-1	-0.032	+0.74	-0.74			
10.						
1,-3	-0.033	-0.74	-0.73			

Die meisten der Zahlen dieser Tafel haben aus der Tafel für  $T_0$  des Art. 56 entnommen werden können, da in  $T_0$  die Glieder, welche den Index 0 für  $\gamma$  haben,  $= +3ia\Omega_0$  sind.

116.

Auf dieselbe Art, wie oben, bekommt man nun die folgenden Producte.

Für  $-3a\Omega$

$g, g'$	$S$ cos	$(\frac{dS}{dg}) n\delta z$ cos	$L$ cos	$V$ sin	$(\frac{dV}{dg}) n\delta z$ sin	$M$ sin
1.	⋮					
0,0	+2644"	-22"	+2692"			
1,0	-289	-57	-346			
2,0	-4	-5	-9			
-1,-1	-7	-3	-10			
0,-1	+133	-4	+129			
1,-1	-7	-3	-10			
2.						
2,-1	-22	-8	-30			
0,-2	+20	+3	+23			
1,-2	-437	+2	-435	-4"		-4"
2,-2	+2635	-2	+2633	+21"		+21"
3,-2	+145	-2	+143			
4,-2	+8		+8			
1,-3	-26		-26			
2,-3	+153	+8	+163			
3,-3	+9		+9			
11.						
2,-4		-5	-5			
3,-4		+55	+55			
4,-4		+32	+32			
5,-4		+3	+3			
3.						
2,1	+65	-8	+57	+65	-8"	+57
0,0	+20		+20	+20		+20
1,0	-431	-1	-432	-430	+1	-429
2,0	+2601	+1	+2602	+2596	-2	+2594
3,0	+143	+1	+144	+143	-1	+142
4,0	+8		+8	+8		+8
2,-1	+65	+8	+73	+65	+8	+73
4.						
0,3	+157	-3	+154	+156	-1	+155
-2,2	-2		-2	-2		-2
-1,2	-146	+1	-145	-145	+1	-144
0,2	+2673	-22	+2654	+2647	-22	+2625
1,2	-146	-58	-204	-145	-58	-203
2,2	-2	-5	-7	-2	-5	-7
0,1	-23		-23	-22		-22
12.						
3,-2		+54	+54		+54	+54
4,-2		+32	+32		+32	+32

$g, g'$	$Z$ cos	$\left(\frac{dZ}{dg}\right) n dz$ cos	$O$ cos
<u>1.</u>			
0,0	+2622"	-22"	+2600"
1,0	-286	-57	-343
2,0	-4	-5	-9
-1,-1	-7	-3	-10
0,-1	+132	-4	+128
1,-1	-7	-3	-10
<u>2.</u>			
2,-1	-22	-8	-30
0,-2	+20	+3	+23
1,-2	-432	+2	-430
2,-2	+2604	-2	+2602
3,-2	+143	-2	+144
4,-2	+8		+8
1,-3	-25		-25
2,-3	+153	+8	+164
3,-3	+8		+8
<u>11.</u>			
2,-4		-5	-5
3,-4		+55	+55
4,-4		+32	+32
5,-4		+3	+3
<u>3.</u>			
2,1	-65	+8	-57
0,0	-20		-20
1,0	+429	-1	+428
2,0	-2594	+2	-2589
3,0	-142	+1	-144
4,0	-8		-8
2,-1	-65	-8	-73
<u>4.</u>			
0,3	-154	+1	-153
-2,2	+2		+2
-1,2	+143	-1	+142
0,2	-2649	+22	-2597
1,2	+143	+58	+204
2,2	+2	+5	+7
0,1	+22		+22
<u>12.</u>			
3,-2		-54	-54
4,-2		-32	-32



$g, g'$	$R$ sin	$\left(\frac{dR}{dg}\right) n\delta z$ sin	$\frac{1}{2}\left(\frac{d^2R}{dg^2}\right)(n\delta z)^2$ sin	$\frac{1}{2}L\delta P$ sin	$M\delta Q$ sin	$H$ sin
<b>1.</b>						
1,0		+5,52		-0,07	-0,07	+5,38
2,0		+0.39		+0.10	+0.16	+0.65
3,0		+0.03				+0.03
-2,-1		-0.02				-0.02
-1,-1		-0.21	+0,02	-0.02		-0.21
0,-1		-0.05	+0.02	-0.33	-0.03	-0.39
1,-1		+0.29	+0.02	-0.03		+0.28
2,-1		+0.02				+0.02
0,-2		+0.01		-0.01		0.00
<b>2.</b>						
0,-1	+0,01					+0.01
1,-1	-0.33	+0.07		-0.02	+0.01	-0.27
2,-1	+1.97	+0.76		+0.17	+0.01	+2.91
3,-1	+0.11	+0.14		+0.01		+0.26
0,-2	-1.78	-0.03	+0.05	-0.11	-0.14	-2.01
1,-2	+38.90	-0.04	+0.10	-0.30	-0.44	+38.22
2,-2	-234.74	+0.12	+0.15	+1.68	+2.81	-229.98
3,-2	-12.89	-0.01	+0.07	+0.06	+0.20	-12.57
4,-2	-0.71					-0.71
0,-3	-0.10					-0.10
1,-3	+2.29	-0.02		+0.02	-0.02	+2.27
2,-3	-13.80	-0.74	+0.01	-0.04	+0.20	-14.37
3,-3	-0.76	-0.19		-0.01		-0.96
2,-4	-0.56	-0.04				-0.60
<b>11.</b>						
3,-3		+0.07	+0.02			+0.09
4,-3		+0.05	+0.01			+0.06
2,-4		+0.47				+0.47
3,-4		-4.88		-0.04	+0.06	-4.86
4,-4		-2.86		+0.15	+0.04	-2.67
5,-4		-0.30				-0.30
3,-5		-0.54	-0.02			-0.53
4,-5		-0.36	-0.01			-0.37
<b>3.</b>						
0,1	+0.04					+0.04
1,1	-0.98	-0.07		-0.02		-1.07
2,1	+5.94	-0.76		+0.14	-0.02	+5.24
3,1	+0.33	-0.14		+0.04		+0.20
0,0	+1.78	+0.14		-0.21	+0.03	+1.74
1,0	-38.85	+0.06	-0.05	+0.34	+0.12	-38.38
2,0	+234.52	-0.05	-0.14	-1.65	-0.24	+229.44
3,0	+12.88	-0.07	-0.07	-0.14	+0.03	+12.66
4,0	+0.71					+0.71

<u>3.</u>						
0,-1	+0.04					+0.04
1,-1	-0.98	+0.02		+0.04		-0.92
2,-1	+5.91	+0.74		-0.22	-0.02	+6.41
3,-1	+0.33	+0.19		-0.04		+0.51
<u>4.</u>						
0,4	+0.57					+0.57
-1,3	-0.76	-0.01				-0.77
0,3	+13.99	-0.22	+0.04	-0.05	-0.02	+13.71
1,3	-0.76	-0.35	+0.02	+0.02		-1.07
-2,2	-0.18			-0.08		-0.26
-1,2	-13.04	+0.23		+0.27	+0.05	-12.46
0,2	+238.07	-2.02		-3.34	-0.27	+232.44
1,2	-13.04	-5.28		+0.27	+0.10	-17.92
2,2	-0.18	-0.38		+0.02	+0.03	-0.51
-1,1	+0.11	+0.02		+0.04		+0.14
0,1	-2.00	-0.03	-0.04	-0.17		-2.21
1,1	+0.11	-0.12	-0.02	-0.04		-0.04
<u>5.</u>						
1,-2	-0.09			+0.28	-0.57	-0.38
2,-2	+0.47			-1.65	+3.29	+2.11
3,-2	+0.03			-0.06	+0.12	+0.09
<u>12.</u>						
2,-2		-0.47		-0.10	+0.04	-0.56
3,-2		+4.98		-0.04	+0.13	+5.07
4,-2		+2.86		-0.02	-0.25	+2.59
<u>13.</u>						
0,-4		-0.11	-0.05	+0.04	-0.02	-0.17
1,-4		-0.03	-0.05	-0.34	-0.11	-0.53
2,-4		+0.05	-0.04	+1.67	+0.28	+1.99
3,-4		+0.08		+0.10		+0.18
<u>19.</u>						
0,4				-1.56	+3.11	+1.55

$g, g'$	$Y$ cos	$\left(\frac{dY}{dg}\right) n\delta z$ cos	$\frac{1}{2}\left(\frac{d^2Y}{dg^2}\right)(n\delta z)^2$ cos	$\frac{1}{2}O\delta Q$ cos	$N$ cos
<u>1.</u>					
0,0	+237.38	-2.02		-1.79	+233.57
1,0	-25.93	-5.25		+0.35	-30.83
2,0	-0.36	-0.38		-0.07	-0.81
3,0	-0.10	-0.03			-0.13
-2,-1	-0.04	-0.02			-0.03
-1,-1	-0.65	-0.15	+0.02		-0.78
0,-1	+11.96	-0.23		-0.12	+11.61
1,-1	-0.65	-0.31	-0.02		-0.98
2,-1	-0.04	-0.02			-0.03
0,-2	+0.30	-0.04			+0.29

<u>2.</u>					
0,-1	-0,04				-0,04
1,-1	+0.33	-0,07			+0.26
2,-1	-1.97	-0.76		-0,04	-2.74
3,-1	-0.11	-0.14			-0.25
0,-2	+1.78	+0.25	+0,05	-0.07	+2.01
1,-2	-38.90	+0.09		+0.44	-38.37
2,-2	+234.74	-0.42	-0.13	-1.90	+232.29
3,-2	+12.89	-0.12	-0.07	-0.09	+12.61
4,-2	+0.71				+0.71
0,-3	+0.10				+0.10
1,-3	-2.29	+0.03		+0.02	-2.24
2,-3	+13.80	+0.73	-0.01	-0.13	+14.39
3,-3	+0.76	+0.18			+0.94
2,-4	+0.56	+0.04			+0.60
<u>11.</u>					
3,-3		-0.07	-0.02		-0.09
4,-3		-0.05	-0.01		-0.06
2,-4		-0.47			-0.47
3,-4		+4.88		+0.03	+4.91
4,-4		+2.86		-0.15	+2.71
5,-4		+0.30			+0.30
3,-5		+0.51	+0.02		+0.53
4,-5		+0.36	+0.01		+0.37
<u>3.</u>					
0,1	-0.04				-0.04
1,1	+0.98	+0.07		-0.04	+1.04
2,1	-5.91	+0.76		+0.04	-5.11
3,1	-0.33	+0.14			-0.19
0,0	-1.78	-0.14		+0.17	-1.75
1,0	+38.85	-0.06	+0.05	-0.41	+38.43
2,0	-234.52	+0.05	+0.14	+1.65	-232.68
3,0	-12.88	+0.07	+0.07	+0.05	-12.69
4,0	-0.71				-0.71
0,-1	-0.04				-0.04
1,-1	+0.98	-0.02		-0.04	+0.95
2,-1	-5.91	-0.74		+0.09	-6.56
3,-1	-0.33	-0.19			-0.52
<u>4.</u>					
0,4	-0.57				-0.57
-1,3	+0.76	+0.04		-0.04	+0.76
0,3	-13.94	+0.22	-0.01	+0.20	-13.53
1,3	+0.76	+0.35	-0.02	-0.01	+1.08
-2,2	+0.18			+0.08	+0.26
-1,2	+12.96	-0.03		-0.25	+12.68
0,2	-237.11	+2.02		+3.11	-231.98
1,2	+12.96	+5.28		-0.30	+17.94
2,2	+0.18	+0.38		-0.02	+0.54

4.					
-1,1	-0,11	-0,02			-0,13
0,1	+1.99	+0.03	+0,01	+0,02	+2.05
1,1	-0.11	+0.12	+0.02		+0.03
5.					
1,2	+0.09			+0.29	+0.38
2,2	-0.47			-1.64	-2.11
3,2	-0.03			-0.06	-0.09
12.					
2,-2		+0.47		+0.08	+0.55
3,-2		-4.98		-0.09	-5.07
4,-2		-2.86		+0.26	-2.60
13.					
0,-4		-0.11	-0.05	+0.01	-0.15
1,-4		-0.03	-0.05	-0.33	-0.44
2,-4		+0.25	-0.01	+1.66	+1.90
3,-4		+0.06		+0.10	+0.16
19.					
0,4				-1.52	-1.52

$g, g'$	$-3a\Omega_0$ COS	$-3a\left(\frac{d\Omega}{dg}\right)n\delta z$ COS	$-3a\left(\frac{d^2\Omega}{dg^2}\right)(n\delta z)^2$ COS	$-3a\left(\frac{d^3\Omega}{dg^3}\right)(n\delta z)^3$ COS	$H\delta P$ COS	$N\delta Q$ COS	$-3a\bar{\Omega}$ COS
4.							
0,0	-874,052	+22,617	+0,005	-0,015	-0,317	-0,280	-852,042
1,0	+95.504	+57.452	+0.003	-0.026	+0.059	+0.056	+153.048
2,0	+1.310	+4.267	+0.002	-0.010	-0.012	-0.012	+5.545
3,0	+0.036	+0.283	-0.001				+0.318
4,0	+0.001	+0.018					+0.019
-3,-1	+0.001	+0.011	-0.004				+0.008
-2,-1	+0.033	+0.131	-0.042				+0.122
-1,-1	+2.406	+1.949	-0.194	-0.002	+0.001	+0.001	+4.161
0,-1	-44.0273	+2.6304	-0.0098	-0.0029	-0.0234	-0.0211	-44.4541
1,-1	+2.406	+3.151	+0.196	-0.001	+0.001	+0.001	+5.754
2,-1	+0.033	+0.297	+0.054				+0.384
3,-1	+0.001	+0.018	+0.006				+0.025
-2,-2	+0.001	+0.002	-0.001				+0.002
-1,-2	+0.061	+0.068	-0.010				+0.119
0,-2	-1.1089	+0.1163	-0.0020	+0.0002	-0.0007	-0.0007	-0.9958
1,-2	+0.061	+0.088	+0.010				+0.159
2,-2	+0.001	+0.008	+0.003				+0.012
-1,-3	+0.002	+0.003					+0.005
0,-3	-0.027	+0.006					-0.021
1,-3	+0.002	+0.003					+0.005

BERECHNUNG DER IN DEN MONDTAFELN ANGEWANDTEN STÖRUNGEN. 369

2.							
0,0		-0,00057	-0,00065	-0,00045			-0,00437
1,0		+0.014	-0.004				+0.010
2,0		+0.024	-0.012				+0.012
3,0		+0.004	-0.003				+0.004
-1,-1	-0,004		-0.004				-0.005
0,-1	+0.1664	-0.1016	-0.0320	-0.0030	+0,0002	0,0000	+0.0300
1,-1	-3.632	+0.737	+0.009	-0.005	-0.005		-2.896
2,-1	+21.919	+8.383	+0.048	-0.006	+0.027	-0.001	+30.370
3,-1	+1.204	+1.628	+0.020	-0.002	+0.004		+2.851
4,-1	+0.066	+0.140	+0.002				+0.208
5,-1	+0.004	+0.011					+0.015
-2,-2	+0.004	+0.003	-0.006				-0.002
-1,-2	+0.127	+0.030	-0.070		+0.004	+0.004	+0.089
0,-2	-19.8074	-0.6948	-0.6977	-0.0004	-0.0193	-0.0135	-21.2334
1,-2	+432.236	-0.034	-0.053		+0.064	+0.073	+432.286
2,-2	-2608.866	+1.680	+1.455		-0.288	-0.301	-2606.320
3,-2	-143.284	+0.632	+0.790		-0.023	-0.011	-141.896
4,-2	-7.864	+0.094	+0.103				-7.667
5,-2	-0.449	+0.007	+0.010				-0.432
6,-2	-0.027						-0.027
-1,-3	+0.007	+0.003	-0.007				+0.003
0,-3	-1.164	+0.022	-0.059	+0.002			-1.199
1,-3	+25.406	-0.240	-0.017	+0.004	+0.008	+0.004	+25.165
2,-3	-153.344	-8.170	+0.140	+0.006	-0.047	-0.021	-161.436
3,-3	-8.422	-2.050	+0.095	+0.004	-0.004		-10.374
4,-3	-0.462	-0.176	+0.012				-0.626
5,-3	-0.026	-0.014					-0.040
0,-4	-0.047	+0.004	-0.003				-0.046
1,-4	+1.036	-0.014	-0.005				+1.017
2,-4	-6.253	-0.572	-0.006		-0.002		-6.833
3,-4	-0.343	-0.155	-0.001				-0.499
4,-4	-0.019	-0.013					-0.032
1,-5	+0.036						+0.036
2,-5	-0.218	-0.026					-0.244
3,-5	-0.012	-0.007					-0.019
41.							
2,-2		-0.003					-0.003
3,-2		+0.028	-0.001				+0.027
4,-2		+0.001					+0.004
1,-3		+0.004	-0.001				+0.003
2,-3		-0.119	+0.021				-0.098
3,-3		+0.780	+0.197				+0.977
4,-3		+0.586	+0.132				+0.718
5,-3		+0.071	+0.027				+0.098

<u>44.</u>							
0,-4		-0,003	-0,004				-0,004
1,-4		-0.023	-0.005	+0,005			-0.023
2,-4		+5.202	-0.004	+0.012	-0,002	+0,002	+5.210
3,-4		-54.159	+0.033	+0.024	-0.049	+0.006	-54.115
4,-4		-31.673	+0.034	+0.049	+0.019	-0.026	-31.627
5,-4		-3.328	+0.008	+0.006	+0.004	-0.004	-3.314
6,-4		-0.277					-0.277
7,-4		-0.049					-0.049
<hr/>							
1,-5		-0.004					-0.004
2,-5		+0.542	-0.040				+0.532
3,-5		-5.527	-0.184	+0.003			-5.708
4,-5		-4.026	-0.138	+0.003	+0.002	-0.003	-4.162
5,-5		-0.438	-0.033				-0.471
6,-5		-0.037	-0.003				-0.040
<hr/>							
2,-6		+0.036					+0.036
3,-6		-0.348	-0.022				-0.370
4,-6		-0.308	-0.048				-0.326
5,-6		-0.033	-0.003				-0.036
<hr/>							
3,-7		-0.049					-0.049
4,-7		-0.047					-0.047
<hr/>							
<u>45.</u>							
4,-5		+0.007	+0.014	+0.002			+0.023
5,-5		+0.042	+0.018	+0.002			+0.032
<hr/>							
3,-6		+0.020	+0.037				+0.057
4,-6		-0.344	-0.584				-0.925
5,-6		-0.472	-0.655				-1.117
6,-6		-0.174	-0.236				-0.440
7,-6		-0.024	-0.035				-0.069
<hr/>							
3,-7		+0.005	+0.003				+0.008
4,-7		-0.050	-0.087	-0.002			-0.139
5,-7		-0.082	-0.144	-0.002			-0.198
6,-7		-0.033	-0.045				-0.078

Bei der nun auszuführenden Multiplication von  $-3a\sqrt{2}$  mit  $2v+v^2$  braucht man im Product nur auf die Glieder Rücksicht zu nehmen, in welchen der Index  $i=0$  ist. Man erhält hierauf

$g, g'$	$-3a\sqrt{2} (2\nu + \nu^2)$ cos	$-3a\sqrt{2}$ cos	$-3a\Omega$ cos
<b>1.</b>			
0,0	+25"812	-852"042	-826"230
0,-1	+2.0488	-41.4544	-39.4053
0,-2	+0.0791	-0.9958	-0.9167
0,-3	+0.005	-0.021	-0.016
<b>2.</b>			
0,0	-0.00164	-0.00137	-0.00301
0,-1	-0.1394	+0.0300	-0.1094
0,-2	-0.6850	-21.2334	-21.9184
0,-3	+0.044	-1.199	-1.185
0,-4	+0.002	-0.046	-0.044

und addirt man hierzu die bez. Coefficienten von  $-3a\sqrt{2}$ , die im vor. Art. enthalten sind, und die ich ausgehoben und hier wieder angeführt habe, so bekommt man die erforderlichen Coefficienten von  $-3a\Omega$ , die die letzte Columnne angiebt.

Diese sind die Coefficienten des ersten Gliedes des im Art. 114 erhaltenen Ausdrucks für  $\mathcal{Z}$ . Das erste Glied von  $dZ$  ergibt sich aus dem vorstehenden, wenn man dasselbe mit  $3e'u \left(\frac{a}{r}\right) \frac{\sin f'}{\sqrt{1-e'^2}}$  multiplicirt. Nun ist

$$e' \left(\frac{a}{r}\right) \frac{\sin f'}{\sqrt{1-e'^2}} = \left(e' - \frac{3}{8} e'^3 - \frac{1}{64} e'^5\right) \sin g' + \left(\frac{3}{2} e'^2 - \frac{11}{12} e'^4\right) \sin 2g' + \left(\frac{17}{8} e'^3 - \frac{331}{128} e'^5\right) \sin 3g' + \frac{71}{24} e'^4 \sin 4g' + \frac{523}{128} e'^5 \sin 5g' + \dots$$

verwandelt man diesen Ausdruck in Zahlen, und multiplicirt mit dem Factor  $3u$ , so wird

$$3e'u \left(\frac{a}{r}\right) \frac{\sin f'}{\sqrt{1-e'^2}} = 2(7,278746) \sin g' + 2(5,67980) \sin 2g' + 2(4,0563) \sin 3g' + 2(2,425) \sin 4g' + \dots$$

und multiplicirt man den obigen Ausdruck von  $-3a\Omega$  hiemit, so ergibt sich

$g, g'$	sin
<b>1.</b>	
0,-1	+3"13976
0,-2	+0.15393
0,-3	+0.0055
<b>2.</b>	
0,0	-0.001258
0,-1	-0.04170
0,-2	-0.00203
0,-3	+0.0415
0,-4	+0.003

Diese Tafel giebt die Coefficienten des ersten Gliedes von  $\delta Z$ .

Es ist .

$$\cos J = \cos J_0 - 2 \sin \frac{1}{2} J_0 \delta Q - \frac{1}{2} \delta P^2 - \frac{1}{2} \delta Q^2$$

und die numerischen Werthe der Coefficienten dieses Ausdrucks giebt die folgende Tafel.

$g, g'$	$-2 \sin \frac{1}{2} J_0 \delta Q$ cos	$-\frac{1}{2} \delta P^2$ cos	$-\frac{1}{2} \delta Q^2$ cos	$\cos J - \cos J_0$ cos
<b>1.</b>				
0,0	-3,416	-0,294	-0,299	-3,700
1,0	-0.236	+0.005	+0.005	-0.236
2,0	-0.012	-0.002	-0.002	-0.016
-1,-1	-0.006			-0.006
0,-1	-0.0416	-0.0416	-0.0418	-0.0650
1,-1	-0.016			-0.016
0,-2	-0.0039	+0.0027	-0.0002	-0.0044
<b>2.</b>				
0,0	+0.00027	-0.00004		+0.00026
0,-1	+0.0044	-0.0002	+0.0003	+0.0042
1,-1	+0.009	-0.002		+0.007
2,-1	-0.046	+0.005		-0.041
3,-1	-0.002			-0.002
0,-2	-0.4380	-0.0310	-0.0313	-0.5003
1,-2	-1.302	+0.045	+0.043	-1.274
2,-2	+3.637	-0.043	-0.036	+3.558
3,-2	+0.132	-0.002	-0.002	+0.128
4,-2	+0.005			+0.005
0,-3	-0.015	-0.004	-0.004	-0.017
1,-3	-0.083	+0.002		-0.081
2,-3	+0.240	-0.007	-0.002	+0.231
3,-3	+0.010			+0.010
1,-4	-0.004			-0.004
2,-4	+0.011			+0.011
<b>4.</b>				
2,-4	-0.002			-0.002
3,-4	+0.035	-0.002	+0.001	+0.034
<b>3.</b>				
2,1	+0.073			+0.073
0,0	-2.313			-2.313
1,0	+1.154			+1.154
2,0	-3.319			-3.319
3,0	-0.124			-0.124
2,-1	-0.092			-0.092



4.				
0,3	-1,746			-1,746
-1,2	-0.418			-0.418
0,2	-43.634			-43.634
1,2	+0.507			+0.507
0,1	+0.893			+0.893

Da ausserdem  $\log \cos J_0 = 9.9982456$  ist, so wird der Logarithmus des in Theilen des Kreisradius ausgedrückten constanten Gliedes in

$$\cos J = 9.9982378$$

Nach der Multiplication des Ausdrucks von  $\delta \frac{h_0}{k}$  des Art. 69 mit dem vorstehenden Ausdruck von  $\cos J$  bekommt man die Coefficienten der zweiten Columne der nachstehenden Tafel.

$g, g'$	$\cos J \delta \frac{h_0}{k}$ cos	$\cos J - \cos J_0$ cos	Summe cos
1.			
0,0	-962,846	-3,700	-966,546
0,-1	-4.1564	-0.0650	-4.2214
0,-2	-0.1466	-0.0014	-0.1480
0,-3	-0.013		-0.013
2.			
0,-0	+0.06450	+0.00026	+0.06476
0,-1	+0.1125	+0.0012	+0.1137
0,-2	-93.0458	-0.5003	-93.5461
0,-3	-3.055	-0.017	-3.072
0,-4	-0.091		-0.091

Multiplicirt man nun die Function, die die letzte Columne dieser Tafel giebt, mit  $-3u \sqrt{1-e^2} \cdot \sqrt{1-e^2} \left(\frac{a'}{r'}\right)^2$ , so bekommt man das vorletzte Glied des obigen Ausdrucks für  $\mathcal{Z}$ , und multiplicirt man dieselbe Function mit  $-6e'u^2 \sqrt{1-e^2} \left(\frac{a'}{r'}\right)^3 \sin f'$ , so bekommt man das zweite Glied des Ausdrucks für  $dZ$ . Es ist aber

$$\begin{aligned} \left(\frac{a'}{r'}\right)^2 &= \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} + \left(2e' + \frac{3}{4} e'^3 + \frac{65}{96} e'^5\right) \cos g' + \left(\frac{5}{2} e'^2 + \frac{1}{3} e'^4\right) \cos 2g' \\ &+ \left(\frac{13}{4} e'^3 - \frac{25}{64} e'^5\right) \cos 3g' + \frac{103}{24} e'^4 \cos 4g' + \frac{1097}{192} e'^5 \cos 5g' + \dots \\ 2e' \left(\frac{a'}{r'}\right)^3 \sin f' &= -\frac{d \cdot \left(\frac{a'}{r'}\right)^2}{dg} \sqrt{1-e^2} \end{aligned}$$

und in Zahlen

$$\begin{aligned}
 -3u\sqrt{1-e^2}\sqrt{1-e'^2}\left(\frac{a'}{r}\right)^2 &= -(9.3540575) - 2(7.5794543)\cos g' \\
 &\quad - 2(5.904444)\cos 2g' - 2(4.2401)\cos 3g' - 2(2.587)\cos 4g' \\
 -6e'u^2\sqrt{1-e'^2}\left(\frac{a'}{r}\right)^3 \sin f' &= -2(6.4567430)\sin g' - 2(5.079763)\sin 2g' \\
 &\quad - 2(3.5948)\sin 3g' - 2(2.066)\sin 4g'
 \end{aligned}$$

und daher erhält man

$g, g'$	cos
1.	
0, -1	+8,2899
0, -2	+0.2034
0, -3	+0.007
2.	
0, 0	-0.00764
0, -1	+0.3293
0, -2	+21.1492
0, -3	+1.049
0, -4	+0.040

für das vorletzte Glied von  $\mathcal{Z}$ , und

$g, g'$	sin
1.	
0, -1	-0,55338
0, -2	-0.02444
0, -3	-0.0009
2.	
0, 0	+0.001092
0, -1	+0.02684
0, -2	+0.00094
0, -3	-0.0268
0, -4	-0.002

für das letzte Glied in  $dZ$ .

119.

Um die Differenz  $\frac{1}{2}\delta\frac{h}{h_0} - \mathcal{Z}$  zu bilden, bemerke ich, dass die Coefficienten von  $\delta\frac{h}{h_0}$  im Art. 69 gegeben, und in der Columnne für  $W_0$  des Art. 106 die Coefficienten, die den Argumenten angehören, deren erster Index = 0 ist, die Coefficienten von  $\mathcal{Z}$  sind. Hiemit ergibt sich zuerst

$g, g'$	$\frac{1}{2} \delta \frac{h}{h_0} - \mathcal{E}$ cos	$g, g'$	$\frac{1}{2} \delta \frac{h}{h_0} - \mathcal{E}$ cos	$g, g'$	$\frac{1}{2} \delta \frac{h}{h_0} - \mathcal{E}$ cos
<b>1.</b>		<b>2.</b>		<b>2.</b>	
0,0	-2453,127	4,-4	-0,836	4,-5	-0,029
1,0	-240.284	2,-1	-25.763	2,-5	+0.247
2,0	-9.179	3,-1	-1.953	3,-5	+0.016
3,0	-0.509	4,-1	-0.144	<b>11.</b>	
-2,-1	-0.257	-1,-2	+0.088	2,-2	-0.004
-1,-1	-6.618	0,-2	+52.984	3,-2	-0.008
0,-1	-9.587	1,-2	-325.426	4,-3	-0.005
1,-1	-11.587	2,-2	+2310.364	2,-3	+0.024
2,-1	-0.574	3,-2	+132.950	3,-3	-0.353
3,-1	-0.033	4,-2	+7.433	4,-3	-0.056
-1,-2	-0.183	5,-2	+0.430	0,-4	-0.042
0,-2	-0.354	-1,-3	+0.010	1,-4	-0.135
1,-2	-0.377	0,-3	+2.810	2,-4	-0.043
2,-2	-0.019	1,-3	-18.729	3,-4	+20.793
0,-3	-0.002	2,-3	+149.652	4,-4	+2.842
1,-3	-0.009	3,-3	+9.166	5,-4	+0.473
<b>2.</b>		4,-3	+0.553	1,-5	-0.009
0,0	-0.050	0,-4	+0.072	2,-5	-0.003
1,0	-0.032	1,-4	-0.769	3,-5	+2.363
-1,-1	+0.011	2,-4	+6.634	4,-5	+0.370
0,-1	-1.254	3,-4	+0.426	5,-5	+0.067
				3,-6	+0.165

und hieraus durch die Multiplication mit  $\delta \frac{h}{h_0}$ ,

$g, g'$	$\left\{ \frac{1}{2} \delta \frac{h}{h_0} - \mathcal{E} \right\} \delta \frac{h}{h_0}$ cos
<b>1.</b>	
0,-1	-0,6960
0,-2	-0.0272
0,-3	0.000
<b>2.</b>	
0,0	+0.00016
0,-1	-0.0164
0,-2	-1.0850
0,-3	-0.046
0,-4	-0.002

welches die Coefficienten des zweiten Gliedes in  $\mathcal{E}$  sind.

120.

Setzen wir wieder, wie im Art. 90, in Bezug auf irgend zwei Glieder im Ausdruck von  $W_0$ , in welchen der zweite und dritte Index dieselben sind,

$$W_0 = II_{-1} \cos(-\gamma + n\beta t + \theta) + II_1 \cos(\gamma + n\beta t + \theta)$$

Da das dritte hiezu gehörige Glied hier nicht in Betracht kommt, so wird, wie dort abgeleitet wurde,

$$fY = (\Pi_{-1} + \Pi_1) \cos(n\beta t + \theta)$$

$$f''\Psi = (\Pi_{-1} - \Pi_1) \sin(n\beta t + \theta)$$

es ist also leicht, aus der Tafel für  $W_0$  des Art. 106 die folgenden Coefficienten zu erhalten.

$g, g'$	$fY$ cos	$f''\Psi$ sin	$g, g'$	$fY$ cos	$f''\Psi$ sin
<u>1.</u>			<u>2.</u>		
0,0	-340,324		-1,-3	-0,072	+0,072
1,0	-1128.108	-1117,860	0,-3	+128.155	-128.033
2,0	-54.829	-54.499	1,-3	+403.008	-401.226
3,0	-3.640	-3.626	2,-3	-2.456	-16.510
4,0	-0.252	-0.252	3,-3	+39.179	+38.709
-3,-1	-0.094	+0.094	4,-3	+3.521	+3.499
-2,-1	-1.496	+1.486	5,-3	+0.260	+0.260
-1,-1	-24.785	+24.471	0,-4	+3.758	-3.758
0,-1	+15.665	-178.539	1,-4	+18.536	-18.464
1,-1	-31.928	-31.232	2,-4	-0.076	-0.726
2,-1	-2.884	-2.862	3,-4	+1.740	+1.716
3,-1	-0.240	-0.240	4,-4	+0.168	+0.168
-2,-2	-0.042	+0.042	0,-5	+0.098	-0.098
-1,-2	-0.574	+0.570	1,-5	+0.731	-0.731
0,-2	+0.361	-2.629	2,-5	+0.004	-0.027
1,-2	-0.862	-0.834	<u>11.</u>		
2,-2	-0.096	-0.096	1,-2	-0.004	+0.004
-1,-3	-0.045	+0.045	2,-2	-0.005	+0.005
0,-3	+0.007	-0.043	0,-3	+0.005	-0.005
1,-3	-0.049	-0.049	1,-3	+0.010	-0.010
<u>2.</u>			2,-3	-0.240	+0.234
0,0	-2.531	+2.531	3,-3	+0.056	-0.004
1,0	-0.045	+0.049	4,-3	-0.210	-0.210
-1,-1	+0.073	-0.073	5,-3	-0.064	-0.064
0,-1	-18.551	+18.691	0,-4	+0.439	-0.439
1,-1	-55.832	+55.914	1,-4	+3.373	-3.357
2,-1	-0.629	+1.935	2,-4	+15.885	-15.887
3,-1	-7.755	-7.647	3,-4	-2.693	-0.276
4,-1	-0.866	-0.860	4,-4	+11.086	+11.058
-2,-2	+0.064	-0.064	5,-4	+2.759	+2.743
-1,-2	-2.219	+2.225	6,-4	+0.407	+0.405
0,-2	+3492.847	-3489.293	1,-5	+0.364	-0.364
1,-2	+6084.944	-6053.022	2,-5	+1.859	-1.853
2,-2	-52.707	-259.839	3,-5	-0.316	-0.006
3,-2	+598.867	+592.381	4,-5	+1.249	+1.243
4,-2	+49.036	+48.772	5,-5	+0.369	+0.367
5,-2	+3.332	+3.320			
6,-2	+0.217	+0.217			

und hiemit ergeben sich die folgenden Quadrate

$g, g'$	$\frac{2}{3}(1-e^2)T^2$ cos	$\frac{2}{3}(1-e^3)\Psi^2$ cos	Summe cos
<u>1.</u>			
0,-1	+4,6818	+4,6670	+9,3488
0,-2	+0.1735	+0.1431	+0.3166
0,-3	+0.006	+0.005	+0.011
<u>2.</u>			
0,0	-0.00156	+0.01676	+0.01520
0,-1	-0.1163	+1.3690	+1.2527
0,-2	-16.3837	+12.4539	-3.9298
0,-3	-1.142	-0.039	-1.181
0,-4	-0.060	+0.003	-0.057

womit alle Glieder von  $\mathcal{E}$  und  $dZ$  berechnet sind.

121.

Addirt man nun die beiden Glieder von  $dZ$ , dividirt mit den bezüglichen Werthen von  $\beta$ , die im Art. 104 gegeben sind, und kehrt die Zeichen um, so bekommt man

$g, g'$	$Z$ cos
<u>1.</u>	
0,-1	+34,2847
0,-2	+0.8583
0,-3	+0.020
<u>2.</u>	
0,0	+0,00974
0,-1	-0.2545
0,-2	-0.0084
0,-3	+0.070
0,-4	+0.004

und da die im Vorhergehenden entwickelten Glieder von  $\mathcal{E}$  durch die Addition den folgenden Werth von  $\mathcal{E}-Z$  geben, so erhält man den nebenstehenden Werth von  $\mathcal{E}$ , dem ich die Unterschiede mit dem vorher berechneten hinzufüge,

$g, g'$	$\bar{Z}-Z$ cos	$\bar{E}$	Untersch. cos
4.			
0, -1	-22",4622	+11",8225	+0",0008
0, -2	-0.4239	+0.4344	-0.0013
0, -3	+0.002	+0.022	+0.005
2.			
0, 0	+0.00474	+0.01448	+0.00266
0, -1	+1.4562	+1.2017	-0.0011
0, -2	-5.7837	-5.7921	+0.0050
0, -3	-1.363	-1.293	+0.037
0, -4	-0.063	-0.059	+0.033

In Betracht der gänzlich verschiedenen Methoden, nach welchen diese beiden Werthe von  $\bar{E}$  berechnet worden sind, und der vielen Glieder, aus welchen jeder Coefficient besteht, halte ich die obigen Unterschiede für befriedigend klein. Die hier berechneten Coefficienten von  $\bar{E}$  sind in der Tafel für  $W_0$ , etc. des Art. 107 die untere Angabe derjenigen Coefficienten, für welche zwei Werthe angesetzt sind. Da die hier berechneten aus dem Grunde, weil sie minder kleine Divisoren erhalten haben, für die genaueren zu erachten sind, so habe ich diese bei der Berechnung von  $\bar{W}_0$  aus  $W_0$  angewandt.

### § 8. Berechnung der Störungen der Länge und des Radius Vectors, aus den im Vorhergehenden erhaltenen Werthen.

#### Prüfung der ganzen Berechnung dieser Störungen.

122.

Es sind nun die Ausdrücke (5) und (8), nemlich die folgenden,

$$\frac{d\delta x}{dt} = \bar{W} + \left(\frac{\nu}{1+\nu}\right)^2 \frac{h_0}{h} - \frac{y}{\sqrt{1-e^2}} \frac{\bar{r}^2}{a^2}$$

$$- 2 \frac{d\nu}{ndt} = \frac{d\bar{W}}{nds} - \frac{y}{\sqrt{1-e^2}} \frac{d\bar{r}^2}{a^2 nds} (1+\nu)$$

zu berechnen, in welchen

$$\begin{aligned} \bar{W} &= \bar{W}_0 + \left(\frac{d\bar{W}_0}{dy}\right) n\delta z + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2\bar{W}_0}{dy^2}\right) (n\delta z)^2 + \frac{1}{6} \left(\frac{d^3\bar{W}_0}{dy^3}\right) (n\delta z)^3 \\ \frac{r^2}{a^2} &= \frac{r_0^2}{a^2} + \left(\frac{d \cdot r_0^2}{a^2 dy}\right) n\delta z + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2 \cdot r_0^2}{a^2 dy^2}\right) (n\delta z)^2 + \frac{1}{6} \left(\frac{d^3 \cdot r_0^2}{a^2 dy^3}\right) (n\delta z)^3 \\ \frac{d\bar{W}}{ndz} &= \left(\frac{d\bar{W}_0}{dy}\right) + \left(\frac{d^2\bar{W}_0}{dy^2}\right) n\delta z + \frac{1}{2} \left(\frac{d^3\bar{W}_0}{dy^3}\right) (n\delta z)^2 + \frac{1}{6} \left(\frac{d^4\bar{W}_0}{dy^4}\right) (n\delta z)^3 + \dots \\ \frac{d \cdot r^2}{a^2 ndz} &= \left(\frac{d \cdot r_0^2}{a^2 dy}\right) + \left(\frac{d^2 \cdot r_0^2}{a^2 dy^2}\right) n\delta z + \frac{1}{2} \left(\frac{d^3 \cdot r_0^2}{a^2 dy^3}\right) (n\delta z)^2 + \dots \end{aligned}$$

ist. Die Factors dieser Producte sind im Vorhergehenden enthalten, und daraus hat sich ergeben

$g, g'$	$\left(\frac{d\bar{W}_0}{dy}\right) n\delta z$ cos	$\frac{1}{2} \left(\frac{d^2\bar{W}_0}{dy^2}\right) (n\delta z)^2$ cos	$\frac{1}{6} \left(\frac{d^3\bar{W}_0}{dy^3}\right) (n\delta z)^3$ cos	$\bar{W} - \bar{W}_0$ cos
<b>1.</b>				
0,0	-68'904	+0'184	+0'008	-68'712
1,0	-83.067	+0.187	+0.042	-82.868
2,0	-4.417	+0.031	+0.004	-4.382
3,0	-0.240	+0.003		-0.237
4,0	-0.017			-0.017
-3,-1	+0.003	+0.003		+0.006
-2,-1	-0.052	+0.032		-0.020
-1,-1	-2.329	+0.123		-2.206
0,-1	-6.2340	+0.0289	+0.0014	-6.2037
1,-1	-5.620	-0.104		-5.724
2,-1	-0.439	-0.037		-0.476
3,-1	-0.030	-0.004		-0.034
-2,-2	+0.022			+0.022
-1,-2	+0.048	+0.006		+0.054
0,-2	-0.1414	-0.0004		-0.1418
1,-2	-0.029	-0.007		-0.036
2,-2	+0.017	-0.002		+0.015
-1,-3	-0.001			-0.001
0,-3	-0.008			-0.008
1,-3	-0.004			-0.004
<b>2.</b>				
0,0	-0.02669	+0.00038	+0.00010	-0.02621
1,0	-0.058	+0.006		-0.052
2,0	-0.032	+0.011		-0.021
-1,-1	-0.051	+0.005		-0.046
0,-1	-2.1221	+0.0261	+0.0014	-2.0946
1,-1	-7.938	+0.028	+0.002	-7.908
2,-1	-10.711	-0.003	+0.002	-10.712
3,-1	-2.114	-0.004		-2.118
4,-1	-0.166			-0.166
-2,-2	+0.011	+0.004		+0.015
-1,-2	+0.218	+0.042		+0.260
0,-2	+3.0349	+0.2608	-0.0004	+3.2956
1,-2	+0.451	-0.286		+0.165
2,-2	-4.640	-0.982		-5.622
3,-2	-2.161	-0.480		-2.641
4,-2	-0.258	-0.066		-0.324
5,-2	-0.023	-0.006		-0.029

<u>2.</u>				
-1,-3	+0.054	+0.003		+0.057
0,-3	+1.663	+0.011		+1.674
1,-3	+7.278	-0.062	-0.001	+7.215
2,-3	+10.956	-0.130	-0.002	+10.824
3,-3	+2.606	-0.068	-0.001	+2.537
4,-3	+0.185	-0.007		+0.178
5,-3	+0.043			+0.043
0,-4	+0.089	+0.001		+0.090
1,-4	+0.401	+0.005		+0.406
2,-4	+0.840	+0.007		+0.847
3,-4	+0.249	-0.004		+0.248
4,-4	+0.046			+0.046
1,-5	+0.045			+0.045
2,-5	+0.036			+0.036
3,-5	+0.009			+0.009
<u>11.</u>				
2,-2	-0.049			-0.049
3,-2	-0.045			-0.045
1,-3	+0.026			+0.026
2,-3	-0.406	-0.079		-0.485
3,-3	-1.228	-0.174		-1.402
4,-3	-0.657	-0.098		-0.755
5,-3	-0.074	-0.020		-0.094
0,-4	-0.038	-0.003		-0.041
1,-4	-0.502	-0.034	-0.002	-0.535
2,-4	+38.518	-0.175	-0.007	+38.336
3,-4	+79.989	-0.204	-0.011	+79.777
4,-4	+34.220	-0.087	-0.006	+34.127
5,-4	+3.206	-0.016	-0.002	+3.188
6,-4	+0.245			+0.245
7,-4	+0.047			+0.047
1,-5	-0.044	-0.003		-0.044
2,-5	+3.142	+0.051		+3.193
3,-5	+8.800	+0.148		+8.948
4,-5	+4.597	+0.097		+4.694
5,-5	+0.447	+0.024		+0.471
6,-5	+0.034	+0.001		+0.035
2,-6	+0.164	+0.006		+0.170
3,-6	+0.597	+0.019		+0.616
4,-6	+0.369	+0.042		+0.381
5,-6	+0.039	+0.001		+0.040
3,-7	+0.031			+0.031
4,-7	+0.024			+0.024
<u>15.</u>				
3,-5	-0.004	-0.004		-0.008
4,-5	-0.016	-0.014		-0.030
5,-5	-0.015	-0.013		+0.028



15.				
2,-6	+0,042	-0,006		+0,006
3,-6	+0.322	+0.191		+0.513
4,-6	+0.802	+0.597		+1.399
5,-6	+0.603	+0.497		+1.100
6,-6	+0.171	+0.162		+0.333
7,-6	+0.022	+0.023		+0.045
3,-7	+0.042	+0.023		+0.065
4,-7	+0.125	+0.093		+0.218
5,-7	+0.109	+0.087		+0.196
6,-7	+0.034	+0.031		+0.065

$g, g'$	$\left(\frac{d^2 W_0}{dy^2}\right) n \delta z$	$\frac{1}{2} \left(\frac{d^2 W_0}{dy^2}\right) (n \delta z)^2$	$\frac{1}{6} \left(\frac{d^2 W_0}{dy^2}\right) (n \delta z)^3$	$\frac{dW}{ndz} - \left(\frac{dW_0}{dy}\right)$
	sin	sin	sin	sin
1.				
4,0	+62,227	-0,077	-0,012	+62,138
2,0	+8.452	-0.041	-0.004	+8.407
3,0	+0.780	-0.008		+0.772
4,0	+0.070	-0.001		+0.069
-3,-1	-0.011	+0.008		-0.003
-2,-1	-0.123	+0.055		-0.068
-1,-1	-1.258	+0.197		-1.064
0,-1	+3.1503	+0.2805	-0.0004	+3.4304
1,-1	+4.890	+0.208		+5.098
2,-1	+0.774	+0.060		+0.834
3,-1	+0.084	+0.009		+0.090
-2,-2	+0.023	+0.004		+0.024
-1,-2	+0.081	+0.007		+0.088
0,-2	+0.1047	+0.0150		+0.1197
1,-2	+0.005	+0.012		+0.017
2,-2	-0.014	+0.003		-0.011
-1,-3	-0.004			-0.004
0,-3	0.000			0.000
1,-3	+0.002			+0.002
2.				
0,0	+0.00075	-0.00292	+0.00004	-0.00213
1,0	+0.041	-0.006		+0.035
2,0	+0.036	-0.009		+0.027
-1,-1	-0.089	+0.008		-0.081
0,-1	-0.1464	+0.0452	+0.0002	-0.1010
1,-1	+7.269	+0.065	-0.002	+7.332
2,-1	+13.138	+0.039	-0.002	+13.175
3,-1	+3.168	+0.010		+3.178
4,-1	+0.369	-0.001		+0.368

<u>2.</u>				
-2,-2	+0.042	+0.011		+0.053
-1,-2	+0.412	+0.097		+0.509
0,-2	+4.6777	+0.6589	-0.0007	+5.3359
1,-2	+26.582	+1.457	-0.002	+28.037
2,-2	+17.884	+1.503	-0.002	+19.385
3,-2	+3.680	+0.654		+4.334
4,-2	+0.527	+0.130		+0.657
5,-2	+0.057	+0.018		+0.075
<hr/>				
-1,-3	+0.104	+0.006		+0.110
0,-3	+0.540	+0.043		+0.583
1,-3	-4.395	+0.130	+0.004	-4.264
2,-3	-11.892	+0.170	+0.002	-11.720
3,-3	-3.628	+0.085	+0.004	-3.542
4,-3	-0.425	+0.016		-0.409
5,-3	-0.039			-0.039
<hr/>				
0,-4	+0.038	+0.004		+0.039
1,-4	-0.228			-0.228
2,-4	-0.894	-0.002		-0.896
3,-4	-0.307			-0.307
4,-4	-0.034			-0.034
<hr/>				
1,-5	-0.009			-0.009
2,-5	-0.044			-0.044
3,-5	-0.011			-0.011
<hr/>				
<u>11.</u>				
2,-2	+0.045			+0.045
3,-2	+0.053			+0.053
<hr/>				
1,-3	-0.042	+0.017		-0.025
2,-3	+0.371	+0.089		+0.460
3,-3	+1.518	+0.164		+1.682
4,-3	+0.929	+0.103		+1.032
5,-3	+0.143	+0.029		+0.172
<hr/>				
0,-4	-0.009	-0.006		-0.015
1,-4	+0.377	-0.033		+0.344
2,-4	-35.897	-0.016	+0.003	-35.910
3,-4	-93.647	+0.052	+0.008	-93.587
4,-4	-46.248	+0.057	+0.008	-46.183
5,-4	-6.362	+0.023	+0.003	-6.336
6,-4	-0.664			-0.664
7,-4	-0.055			-0.055
<hr/>				
1,-5	+0.040	-0.017		+0.023
2,-5	-2.859	-0.085		-2.944
3,-5	-10.244	-0.158		-10.402
4,-5	-6.099	-0.102		-6.201
5,-5	-0.870	-0.030		-0.900
6,-5	-0.091	-0.002		-0.093
<hr/>				
2,-6	-0.146	-0.006		-0.152
3,-6	-0.694	-0.045		-0.709
4,-6	-0.485	-0.042		-0.497
5,-6	-0.070	-0.002		-0.072

14.			
3,-7	-0,037		-0,037
4,-7	-0.028		-0.028
15.			
3,-5	+0.004	+0,004	+0.008
4,-5	+0.022	+0.012	+0.034
5,-5	+0.022	+0.013	+0.035
2,-6	-0.012	+0.002	-0.010
3,-6	-0.296	-0.200	-0.496
4,-6	-1.121	-0.558	-1.679
5,-6	-0.942	-0.489	-1.431
6,-6	-0.294	-0.193	-0.487
7,-6	-0.043	-0.040	-0.083
3,-7	-0.035	-0.027	-0.062
4,-7	-0.173	-0.089	-0.262
5,-7	-0.165	-0.085	-0.250
6,-7	-0.055	-0.037	-0.092

123.

Die Function  $\left(\frac{v}{1+v}\right)^2$  kann leicht in eine nach den Potenzen von  $w$  fortschreitende Reihe entwickelt werden. Man findet

$$\left(\frac{v}{1+v}\right)^2 = w^2 - w^3 + \frac{7}{12}w^4 + \dots$$

woraus diese Grösse leicht zu berechnen ist. Multiplicirt man sie hierauf mit  $\delta \frac{h_0}{h}$  und addirt, so ergibt sich  $\left(\frac{v}{1+v}\right)^2 \frac{h_0}{h}$ . Auf diese Art ergab sich der Inhalt der folgenden Tafel.

$g, g'$	$\left(\frac{v}{1+v}\right)^2$ COS	$\left(\frac{v}{1+v}\right)^2 \delta \frac{h_0}{h}$ COS	$\left(\frac{v}{1+v}\right)^2 \frac{h_0}{h}$ COS
1.			
0,0	+25,440	-0,100	+25,340
1,0	+15.643	-0.040	+15.603
2,0	+1.063	-0.010	+1.053
3,0	+0.057		+0.057
-2,-1	+0.027	-0.001	+0.026
-1,-1	+0.034		+0.034
0,-1	+1.1339	-0.0034	+1.1305
1,-1	+1.758	-0.006	+1.752
2,-1	+0.074	+0.001	+0.075
3,-1	+0.003		+0.003
-2,-2	+0.005		+0.005
-1,-2	+0.017		+0.017
0,-2	+0.0270	+0.0001	+0.0271
1,-2	+0.045		+0.045
2,-2	+0.010		+0.010

1.			
0,-3	+0.003		+0.003
1,-3	+0.002		+0.002
2.			
0,0	+0.00631	-0.00004	+0.00630
1,0	-0.046		-0.046
2,0	-0.004		-0.004
-1,-1	+0.025		+0.025
0,-1	+0.5487	-0.0029	+0.5458
1,-1	-0.047	+0.006	-0.041
2,-1	-0.754	+0.002	-0.752
3,-1	-0.345		-0.345
4,-1	-0.021		-0.021
-2,-2	-0.004		-0.004
-1,-2	-0.048	-0.003	-0.051
0,-2	+0.0569	+0.0003	+0.0572
1,-2	+27.603	-0.114	+27.489
2,-2	+19.802	+0.005	+19.807
3,-2	+0.399	+0.026	+0.425
4,-2	-0.010	+0.002	-0.008
5,-2	-0.003		-0.003
-1,-3	-0.024		-0.024
0,-3	-0.403	+0.003	-0.400
1,-3	+0.666	-0.001	+0.665
2,-3	+1.789	+0.006	+1.795
3,-3	+0.442	+0.004	+0.446
4,-3	+0.026		+0.026
0,-4	-0.022		-0.022
1,-4	+0.004		+0.004
2,-4	+0.085	-0.001	+0.084
3,-4	+0.037		+0.037
1,-5	+0.003		+0.003
2,-5	+0.004		+0.004
11.			
2,-2	-0.013		-0.013
3,-2	-0.008		-0.008
1,-3	-0.002		-0.002
2,-3	-0.147	+0.002	-0.145
3,-3	-0.288	+0.002	-0.286
4,-3	-0.156	-0.002	-0.158
5,-3	-0.020		-0.020
0,-4	+0.017		+0.017
1,-4	+0.536	-0.040	+0.526
2,-4	+11.343	-0.082	+11.261
3,-4	+16.020	-0.029	+15.991
4,-4	+6.532	+0.043	+6.545
5,-4	+0.557		+0.557
6,-4	+0.039		+0.039
1,-5	+0.038		+0.038
2,-5	+0.964	-0.008	+0.956
3,-5	+1.814	-0.006	+1.808
4,-5	+0.921	+0.003	+0.924
5,-5	+0.088		+0.088

<u>14.</u>			
2,-6	+0,054		+0,054
3,-6	+0.126		+0.126
4,-6	+0.074		+0.074
5,-6	+0.007		+0.007
3,-7	+0.006		+0.006
4,-7	+0.005		+0.005
<u>15.</u>			
3,-5	-0.004		-0.004
4,-5	-0.011		-0.011
5,-5	-0.009		-0.009
2,-6	+0.012	-0,004	+0.008
3,-6	+0.247	-0.043	+0.234
4,-6	+0.522	+0.009	+0.531
5,-6	+0.388	+0.030	+0.418
6,-6	+0.114	+0.046	+0.130
7,-6	+0.013		+0.013
3,-7	+0.030		+0.030
4,-7	+0.080	+0.001	+0.081
5,-7	+0.068	+0.006	+0.074
6,-7	+0.021	+0.002	+0.023

124.

Aus dem Art. 103 ergibt sich

$$y = 1761,486$$

und da

$$\begin{aligned} \left(\frac{r_0}{a}\right)^2 &= (0.0019591) \\ &- (9.0404451) \cos g \\ &- (7.17769) \cos 2g \\ &- (5.6159) \cos 3g \\ &- (4.179) \cos 4g \\ &- \text{etc.} \end{aligned}$$

ist, wo die Logarithmen statt der Coefficienten selbst angesetzt sind, so bekommt man leicht

$g, g'$	$-\frac{y}{\sqrt{1-e^2}} \left(\frac{r_0}{a}\right)^2$ cos	$-\frac{y}{\sqrt{1-e^2}} \frac{d \cdot r_0^3}{a^2 dg^2} n dz$ cos	$-\frac{y}{2\sqrt{1-e^2}} \frac{d^2 \cdot r_0^3}{a^2 dg^2} (n dz)^2$ cos	$-\frac{y}{\sqrt{1-e^2}} \left(\frac{\bar{r}}{a}\right)^2$ cos
<u>1.</u>				
0,0	-1772,123		-0,011	-1772,134
1,0	+193.633	+0,002	-0.029	+193.606
2,0	+2.656		-0.013	+2.643
3,0	+0.073	-0.002		+0.071
4,0	+0.003			+0.003

<u>1.</u>				
-3,-1		-0.004		-0.004
-2,-1		-0.043		-0.043
-1,-1		-0.310	-0.004	-0.314
0,-1		-0.0180	-0.0044	-0.0194
1,-1		+0.310	-0.004	+0.309
2,-1		+0.064		+0.064
3,-1		+0.004		+0.004
-1,-2		-0.003		-0.003
0,-2		-0.0006		-0.0006
1,-2		+0.003		+0.003
<u>2.</u>				
0,0		+0.00146	-0.00002	+0.00144
-1,-1		-0.002		-0.002
0,-1		+0.0133	-0.0037	+0.0096
1,-1		+0.013	-0.002	+0.011
2,-1		-0.013	-0.004	-0.017
3,-1		-0.011	-0.002	-0.013
-2,-2		-0.004		-0.004
-1,-2		-0.039		-0.039
0,-2		-2.1253	-0.0004	-2.1257
1,-2		-1.028		-1.028
2,-2		+2.069		+2.069
3,-2		+1.064		+1.064
4,-2		+0.058		+0.058
5,-2		+0.003		+0.003
-1,-3		-0.002		-0.002
0,-3		-0.095	+0.003	-0.092
1,-3		-0.074	+0.002	-0.072
2,-3		+0.094	+0.003	+0.094
3,-3		+0.076	+0.002	+0.078
4,-3		+0.004		+0.004
0,-4		-0.003		-0.003
1,-4		-0.004		-0.004
2,-4		+0.003		+0.003
3,-4		+0.004		+0.004
<u>11.</u>				
1,-4		-0.014	+0.011	-0.003
2,-4		-0.017	+0.011	-0.006
3,-4		+0.009	+0.014	+0.023
4,-4		+0.017	+0.011	+0.028
5,-4		+0.005	+0.003	+0.008
1,-5		-0.004	+0.004	0.000
2,-5		-0.002	+0.004	-0.004
3,-5		+0.004	+0.004	+0.002
4,-5		+0.002	+0.004	+0.003

$g, g'$	$\frac{y}{\sqrt{1-e^2}} \frac{d \cdot r_0^2}{a^2 dg} \sin$	$\frac{y}{\sqrt{1-e^2}} \frac{d^2 \cdot r_0^2}{a^2 dg^2} ndz \sin$	$\frac{y}{2\sqrt{1-e^2}} \frac{d^2 \cdot r_0^2}{a^2 dg^2} (ndz)^2 \sin$
<u>1.</u>			
1,0	-193,633	+0,002	+0,029
2,0	-5,342		+0,014
3,0	-0,219	+0,002	
4,0	-0,011		
-3,-1		-0,002	
-2,-1		-0,051	
-1,-1		-0,342	-0,004
0,-1		-0,0868	-0,0003
1,-1		-0,344	+0,004
2,-1		-0,069	
3,-1		-0,003	
-1,-2		-0,003	
0,-2		-0,0014	
1,-2		-0,003	
<u>2.</u>			
0,0		+0,00116	-0,00002
-1,-1		-0,002	
0,-1		+0,0136	-0,0038
1,-1		+0,009	-0,002
2,-1		+0,013	+0,004
3,-1		+0,011	+0,002
-2,-2		-0,006	
-1,-2		-0,098	
0,-2		-2,1511	-0,0004
1,-2		-0,989	
2,-2		-2,125	
3,-2		-1,123	
4,-2		-0,090	
5,-2		-0,006	
-1,-3		-0,004	
0,-3		-0,097	+0,003
1,-3		-0,072	+0,002
2,-3		-0,095	-0,003
3,-3		-0,078	-0,002
4,-3		-0,006	
0,-4		-0,003	
1,-4		-0,004	
2,-4		-0,003	
3,-4		-0,004	

11.			
1,-4		-0.014	+0.014
2,-4		-0.017	+0.014
3,-4		-0.019	-0.008
4,-4		-0.017	-0.011
5,-4		-0.005	-0.003
1,-5		-0.001	+0.001
2,-5		-0.002	+0.001
3,-5		-0.001	-0.001
4,-5		-0.002	-0.001

$g, g'$	$\frac{y}{\sqrt{1-e^2}} \frac{d.\bar{r}^2}{a^2 n dx}$ sin	$\frac{y}{\sqrt{1-e^2}} \frac{d.\bar{r}^2}{a^2 n dx} \nu$ sin	$\frac{y}{\sqrt{1-e^2}} \frac{d.\bar{r}^2}{a^2 n dx} (1+\nu)$ sin
1.			
1,0	-193.602	+1.256	-192.346
2,0	-5.298	-0.012	-5.310
3,0	-0.217	-0.003	-0.220
4,0	-0.011		-0.011
-3,-1	-0.002		-0.002
-2,-1	-0.051	+0.018	-0.033
-1,-1	-0.343	+0.014	-0.299
0,-1	-0.0874	-0.0417	-0.1288
1,-1	-0.310	-0.010	-0.320
2,-1	-0.069	+0.024	-0.045
3,-1	-0.003		-0.003
-1,-2	-0.003		-0.003
0,-2	-0.0014	-0.0004	-0.0018
1,-2	-0.003		-0.003
2.			
0,0	+0.00114	+0.00057	+0.00171
-1,-1	-0.002		-0.002
0,-1	+0.0098	+0.0048	+0.0146
1,-1	+0.007	+0.007	+0.014
2,-1	+0.017	-0.009	+0.008
3,-1	+0.013	-0.009	+0.004
-2,-2	-0.006	-0.001	-0.007
-1,-2	-0.098	-0.052	-0.150
0,-2	-2.1545	-0.9777	-3.1292
1,-2	-0.989	-0.683	-1.672
2,-2	-2.125	+0.954	-1.171
3,-2	-1.123	+0.742	-0.381
4,-2	-0.090	+0.052	-0.038
5,-2	-0.006	+0.004	-0.002



<u>2.</u>			
-1,-3	-0,004	-0,002	-0,006
0,-3	-0.094	-0.044	-0.135
1,-3	-0.070	-0.049	-0.119
2,-3	-0.098	+0.042	-0.056
3,-3	-0.080	+0.052	-0.028
4,-3	-0.006	+0.003	-0.003
<hr/>			
0,-4	-0.003	-0.001	-0.004
1,-4	-0.004	-0.002	-0.006
2,-4	-0.003	+0.004	-0.002
3,-4	-0.004	+0.002	-0.002
<hr/>			
<u>11.</u>			
1,-4	-0.003	+0.006	+0.003
2,-4	-0.006	+0.005	-0.004
3,-4	-0.027	+0.047	-0.040
4,-4	-0.028	+0.022	-0.006
5,-4	-0.008	+0.007	-0.004
<hr/>			
2,-5	-0.004	-0.004	-0.002
3,-5	-0.002		-0.002
4,-5	-0.003	+0.004	-0.002

womit alle Vorbereitungen zu den letzten Integrationen ausgeführt sind.

125.

Addirt man nun nach Maassgabe der im Art. 122 angegebenen Ausdrücke die vorstehend erhaltenen Glieder, und führt die Integrationen aus, die hier blos in der Division mit den Werthen von  $\beta$  des Art. 104 und in Umtauschung des Sinus- und Cosinuszeichen mit einander bestehen, so bekommt man die Zahlenwerthe der folgenden mit  $n\delta z$  und  $\nu$  überschriebenen Columnen.

$g, g'$	$n\delta z$ sin	Diff.	$\nu$ cos	Red. cos	$w$ cos	Diff.
<u>1.</u>						
0,0	0t		-1336,350	-12,472	-1348,822	-18
1,0	0		+93.520	-7.622	+85.898	-17
2,0	-4,604	-5	+6.353	-0.523	+5.830	0
3,0	-0.176	-1	+0.340	-0.029	+0.344	0
4,0	-0.009	-2	+0.020		+0.020	0

1.						
-3,-1	+0.029	+1	+0.048		+0.048	-2
-2,-1	+1.097	-9	+1.142	-0.047	+1.125	-2
-1,-1	+73.234	+24	+38.609	-0.022	+38.587	+3
0,-1	+657.468	+52	+24.695	-0.553	+24.142	+4
1,-1	+111.681	+7	-50.756	-0.855	-51.611	-21
2,-1	+1.215	0	-1.130	-0.033	-1.163	0
3,-1	+0.026	-1	-0.039	-0.001	-0.040	-1
-2,-2	+0.002	+5	+0.040	-0.003	+0.007	-2
-1,-2	+0.800	-5	+0.457	-0.009	+0.448	+2
0,-2	+7.349	+11	+0.532	-0.014	+0.548	-3
1,-2	+2.159	-25	-0.910	-0.023	-0.933	+7
2,-2	+0.035	+1	-0.027	-0.005	-0.032	+2
-1,-3	+0.011	-4	+0.008		+0.008	-4
0,-3	+0.075	+13	+0.009	-0.002	+0.007	0
1,-3	+0.044	+9	-0.018	-0.001	-0.019	-4
2.						
0,0	-0.094	-36	+0.044	-0.003	+0.038	-12
1,0	-2.524	+48	+1.259	+0.008	+1.267	-33
2,0	-0.052	+2	+0.045	+0.002	+0.047	-2
-1,-1	-0.040	-52	+0.007	-0.013	-0.006	-26
0,-1	+3.665	+34	+0.933	-0.262	+0.671	+5
1,-1	-27.620	-31	+13.908	+0.019	+13.927	+24
2,-1	-23.006	+2	+16.051	+0.375	+16.426	-3
3,-1	-1.337	+2	+1.144	+0.156	+1.300	-3
4,-1	-0.066	0	+0.078	+0.044	+0.089	0
-2,-2	-0.026	+1	-0.035	+0.002	-0.033	+4
-1,-2	-1.893	+12	-1.105	+0.032	-1.073	-5
0,-2	-41.648	+18	-51.667	+0.059	-51.608	-11
1,-2	+4466.992	+24	-2071.195	-13.398	-2084.593	-14
2,-2	+2144.995	+19	-1512.178	-9.571	-1521.749	-12
3,-2	+60.020	-2	-68.958	-0.127	-69.085	+2
4,-2	+2.083	-2	-3.399	+0.013	-3.386	-5
5,-2	+0.084	0	-0.181	+0.002	-0.179	-2
6,-2	+0.004	-	-0.011		-0.011	-
-1,-3	-0.082	-21	-0.076	+0.012	-0.064	-2
0,-3	-2.352	+34	-2.445	+0.203	-2.242	+24
1,-3	+198.103	+29	-88.404	-0.312	-88.716	-5
2,-3	+155.047	+14	-106.600	-0.858	-107.458	-6
3,-3	+5.166	+5	-5.297	-0.207	-5.504	-2
4,-3	+0.198	+5	-0.285	-0.013	-0.298	-4
5,-3	+0.009	-	-0.017		-0.017	-
0,-4	-0.109	-145	-0.100	+0.011	-0.089	-13
1,-4	+7.035	-15	-3.005	-0.001	-3.006	+13
2,-4	+7.738	-1	-5.208	-0.041	-5.249	+1
3,-4	+0.287	+1	-0.275	-0.019	-0.294	+2
4,-4	+0.011	-1	-0.016		-0.016	0
1,-5	+0.240	-1	-0.091		-0.091	-5
2,-5	+0.329	-3	-0.219	-0.002	-0.221	+2
3,-5	+0.012	-5	-0.011	-0.001	-0.012	+3

BERECHNUNG DER IN DEN MONDTAFELN ANGEWANDTEN STÖRUNGEN. 444

11.						
2,-2	-0,033	+2	+0,042	+0,007	+0,019	-1
3,-2	-0.018	+2	+0.009	+0.004	+0.013	-1
1,-3	+0.042	-4	-0.012	+0.004	-0.008	-8
2,-3	-0.350	-3	+0.428	+0.075	+0.203	0
3,-3	-0.608	-2	+0.304	+0.138	+0.442	0
4,-3	-0.236	0	+0.125	+0.073	+0.198	-3
5,-3	-0.023	-1	+0.017	+0.009	+0.026	-1
0,-4	-0.026	+4	+0.024	-0.009	+0.012	-1
1,-4	+0.886	-2	-0.094	-0.264	-0.358	-1
2,-4	+30.040	+6	-11.594	-5.528	-17.122	-1
3,-4	+35.723	+1	-18.046	-7.807	-26.823	0
4,-4	+10.683	-2	-5.773	-3.186	-8.959	0
5,-4	+0.775	-2	-0.627	-0.275	-0.902	+1
6,-4	+0.048	0	-0.055	-0.020	-0.075	+1
7,-4	+0.003	-1	-0.004		-0.004	-1
1,-5	+0.047	-1	+0.002	-0.021	-0.019	-1
2,-5	+2.666	-5	-1.027	-0.474	-1.501	-1
3,-5	+4.140	0	-2.073	-0.885	-2.958	-2
4,-5	+1.508	-1	-0.790	-0.446	-1.236	0
5,-5	+0.118	-1	-0.091	-0.042	-0.133	+1
6,-5	+0.006	0	-0.008		-0.008	-2
2,-6	+0.151	+2	-0.057	-0.026	-0.083	-2
3,-6	+0.296	-1	-0.147	-0.062	-0.209	+2
4,-6	+0.125	0	-0.065	-0.037	-0.102	0
5,-6	+0.010	0	-0.008	-0.004	-0.012	+1
3,-7	+0.016	-2	-0.008	-0.003	-0.011	+1
4,-7	+0.008	0	-0.004	-0.003	-0.007	0
15.						
3,-5	-0.004	+1	+0.002	+0.002	+0.004	-3
4,-5	-0.011	+1	+0.004	+0.004	+0.008	+1
5,-5	-0.008	+3	+0.004	+0.003	+0.007	-1
2,-6	+0.009	+3	-0.003	-0.004	-0.007	+4
3,-6	+0.285	+3	-0.099	-0.082	-0.181	-1
4,-6	+0.538	+2	-0.224	-0.176	-0.397	0
5,-6	+0.334	0	-0.146	-0.130	-0.276	-1
6,-6	+0.084	0	-0.042	-0.037	-0.079	0
7,-6	+0.009	0	-0.006	-0.005	-0.011	0
3,-7	+0.037	0	-0.013	-0.010	-0.023	0
4,-7	+0.085	0	-0.035	-0.028	-0.063	0
5,-7	+0.061	+1	-0.026	-0.023	-0.049	0
6,-7	+0.016	-1	-0.008	-0.007	-0.015	0

Die in der »Red.« überschriebenen Columne enthaltenen Zahlen geben den Unterschied zwischen  $\nu$  und  $w$ , und sind nach der Formel

$$w = \nu - \frac{1}{2} w^2 - \frac{1}{6} w^3 - \frac{1}{24} w^4$$

berechnet. Die »Diff.« überschriebenen Columnen geben die Unterschiede zwischen den nebenstehenden Resultaten der hier durchgeführten Rechnung und den derselben zu Grunde gelegten in Art. 66 angeführten Störungen, die den Mondtafeln zu Grunde gelegt worden sind. Die Geringsfügigkeit dieser Unterschiede, die grössten Theils nur in Tausendtheilen der Secunde bestehen, und blos bei den Coefficienten, die kleine Divisoren erhalten, und daher schwieriger zu berechnen sind, einige Hunderttheile der Secunde betragen, zeigt dass die von mir berechneten Störungscoefficienten in der That den Differentialgleichungen der Bewegung des Mondes gnügen, und davon die richtigen Integrale sind. Durch nochmalige Ausführung einer Annäherung würde man nur dann eine noch grössere Genauigkeit erlangen können, wenn man allenthalben eine Decimale mehr in Rechnung zöge wie hier geschehen ist, ich bin aber der Ansicht, dass die hier erlangte Genauigkeit bei dem jetzigen Zustande der Beobachtungskunst hinreichend ist. Ein einziger Coefficient weicht 0".145 von dem zu Grunde gelegten ab, und es kann vielleicht sein, dass hiebei ein kleiner Rechnungsfehler vorgekommen ist, obgleich die Untersuchung, die ich darüber angestellt habe, mir keinen gezeigt hat. Ausserdem beträgt der grösste Unterschied zwischen den der Rechnung zu Grunde gelegten, und den daraus erhaltenen Coefficienten nur 0".052; bei einigen wenigen Coefficienten gehen die Unterschiede auf Hunderttheile von Secunden, bei den meisten erreichen sie kein Hunderttheil.

126.

Es ist noch zu erklären, wie das constante Glied in  $\nu$  berechnet worden ist. Es dient dazu die Gleichung (19), die auf folgende Art umgestellt werden kann. Aus der strengen Gleichung, woraus diese abgeleitet worden ist, folgt zuerst

$$\frac{h_0}{h} = \left( 1 + \frac{d\delta z}{dt} + \frac{y}{\sqrt{1-e^2}} \frac{\bar{r}^2}{a^2} \right) (1 + \nu)^2$$

und aus dem Art. 122, oder der Gleichung (5), bekommt man

$$\frac{d\delta z}{dt} + \frac{y}{\sqrt{1-e^2}} \frac{\bar{r}^2}{a^2} = \bar{W} + \left( \frac{\nu}{1+\nu} \right)^2 \frac{h_0}{h}$$

und hiemit ergibt sich

$$(40) \dots \delta \frac{h_0}{h} = \bar{W} + \left( \frac{\nu}{1+\nu} \right)^2 \frac{h_0}{h} + 2\nu + \nu^2 + \left( \bar{W} + \left( \frac{\nu}{1+\nu} \right)^2 \frac{h_0}{h} \right) (2\nu + \nu^2)$$

Um hieraus  $\delta \frac{h_0}{h}$  zu eliminiren bemerke ich, dass zufolge der Gleichung (25)

$$W_0 = \mathcal{X} + \mathcal{Y} \left( \frac{e_0}{a_0} \cos \varphi_0 + \frac{3}{2} e_0 \right) + \mathcal{Y} \frac{e_0}{a_0} \sin \varphi_0$$

und, dass dem Integral welches  $W_0$  gegeben hat, die Constante

$$b + \xi \cos \gamma$$

hinzugefügt worden ist. Da nun  $\frac{e_0}{a_0} \cos \varphi_0 + \frac{3}{2} e_0 = f \cos \gamma$  ist, so ergibt sich, dass dem Element  $\mathcal{X}$  die Constante  $b$ , und dem Element  $\mathcal{Y}$  die Constante  $\frac{\xi}{f}$  hinzugefügt worden ist. Da nun zufolge des Art. 88

$$\mathcal{X} + \frac{3}{2} e_0 \mathcal{Y} = 2 \delta \frac{h}{h_0} - \frac{h_0}{h} - 1 = 2 \delta \frac{h}{h_0} - \delta \frac{h_0}{h}$$

ist, so wird mit bloßer Rücksicht auf das in dieser Gleichung enthaltene constante Glied

$$\begin{aligned} b + \frac{3}{2} e \frac{\xi}{f} &= 2 \delta \frac{h}{h_0} - \delta \frac{h_0}{h} \\ &= -3 \delta \frac{h_0}{h} + 2 \left( \delta \frac{h_0}{h} \right)^2 - 2 \left( \delta \frac{h_0}{h} \right)^3 + \dots \end{aligned}$$

oder

$$\delta \frac{h_0}{h} = -\frac{1}{3} b - \frac{1}{2} \frac{e \xi}{f} + \frac{2}{3} \left( \delta \frac{h_0}{h} \right)^2 - \frac{2}{3} \left( \delta \frac{h_0}{h} \right)^3$$

und es giebt daher die Gleichung (40) zur Bestimmung des constanten Gliedes in  $\nu$  den Ausdruck

$$\begin{aligned} 2\nu &= -\frac{1}{3} b - \frac{e \xi}{2f} - \left( \bar{W} + \left( \frac{\nu}{1+\nu} \right)^2 \frac{h_0}{h} \right) \\ &\quad - \nu^2 - \left( \bar{W} + \left( \frac{\nu}{1+\nu} \right)^2 \frac{h_0}{h} \right) (2\nu + \nu^2) + \frac{2}{3} \left( \delta \frac{h_0}{h} \right)^2 - \frac{2}{3} \left( \delta \frac{h_0}{h} \right)^3 \dots \quad (41) \end{aligned}$$

Da

$$\nu^2 = w^2 + w^3 + \frac{7}{12} w^4$$

so findet man leicht aus Art. 67 das constante Glied in

$$\nu^2 = + 24,699$$

Die Function  $\bar{W} + \left( \frac{\nu}{1+\nu} \right)^2 \frac{h_0}{h}$  ergibt sich aus den Angaben der Artt. 107, 122, 123, und kommt übrigens auch bei der Integration in Betracht, die  $n dz$  gegeben hat. Multiplicirt man diese Function mit  $2\nu + \nu^2$ , so findet man das constante Glied wie folgt:

$(\bar{W} + \left(\frac{\nu}{1+\nu}\right)^2 \frac{h_0}{h}) (2\nu + \nu^2)$		
1.	1.	0,0, in 1.
0,0	0,0	-22,751
1,0	1,0	- 95
-1,-1	-1,-1	- 15
0,-1	0,-1	- 6
1,-1	1,-1	- 25
<u>2.</u>	<u>2.</u>	
1,-1	1,-1	- 2
2,-1	2,-1	- 3
0,-2	0,-2	- 2
1,-2	1,-2	-38.615
2,-2	2,-2	-29.149
3,-2	3,-2	- 57
1,-3	1,-3	- 67
2,-3	2,-3	- 142
<u>11.</u>	<u>11.</u>	
2,-4	2,-4	- 2
3,-4	3,-4	- 5
		-90,936

und hiemit stehen die einzelnen Theile der Constante, in der Reihenfolge wie sie in dem Ausdruck (41) angeführt sind, wie folgt:

$$\begin{aligned}
 & -979,998 \\
 & +8.528 \\
 & -1772.134 \\
 & -24.699 \\
 & +90.936 \\
 & +4.595 \\
 & +0.072 \\
 \hline
 2\nu & = -2672,700 \\
 \nu & = -1336,350
 \end{aligned}$$

mit der vorstehenden Tafel übereinstimmend.

Wenn man das constante Glied in  $\nu$  als bekannt betrachtet, so dient der Ausdruck (40), um das constante Glied in  $\delta \frac{h_0}{h}$  zu berechnen. Mit dem eben gefundenen Werthe des constanten Gliedes von  $\nu$  ergibt sich

$$\delta \frac{h_0}{h} = -966,803$$

mit der Angabe des Art. 69, die aus der vorhergehenden Annäherung hat berechnet werden müssen, hinreichend übereinstimmend.

127.

Der Vollständigkeit wegen muss ich die Berechnung der Constante der Parallaxe angeben, die ich genau nach den bez. Entwicklungen der »*Fundamenta etc.*« ausgeführt habe. Nennt man die Aequatoreal-Horizontalparallaxe  $p$ , so ist

$$\log. \text{nat.} \sin p = \log. \text{nat.} \frac{D}{a_0} - \log. \text{nat.} \frac{1 - e_0^2}{1 + e_0 \cos f} - w$$

und das constante Glied dieses Ausdrucks giebt die Constante im Ausdruck von  $\log. \text{nat.} p$ . Es bezeichnet hier  $D$  den Aequatoreal-Halbmesser der Erde, und  $a_0$  wie immer die mittlere grosse Halbachse der Mondbahn, die aber der Gleichung

$$a_0^3 n_0^2 = k^2 (1 + m)$$

entsprechen muss, in welcher  $n_0$  die Bewegung der mittleren Anomalie des Mondes bedeutet. Nimmt man einstweilen für  $D$  den Radius der Erde, welcher dem Parallel entspricht, für welchen der Sinus der geocentrischen Breite  $= \sqrt{\frac{1}{3}}$  ist, bezeichnet mit  $T$  die anomalistische Umlaufszeit des Mondes um die Erde, und mit  $P$  die Länge des einfachen Pendels, welches auf diesem Parallel Eine Schwingung in  $t$  Secunden vollbringen würde, wenn die Centrifugalkraft nicht vorhanden wäre, so wird\*)

$$\frac{D}{a_0} = \left( \frac{1}{1+m} \cdot \frac{D}{P} \cdot \frac{4t^2}{T^2} \right)^{\frac{1}{3}}$$

Nimmt man nun

$$P = 0,992666 \frac{\text{mtr.}}{433,86} \text{ für } t = 1^s$$

$$D = 6370063 \text{ mtr.}$$

$$m = \frac{1}{8}$$

$$T = 2380713^s$$

\*\*) so bekommt man

$$\log. \text{br.} \frac{D}{a_0} = 8.2165305$$

und für den Aequatorealwerth von  $D$

$$\log. \text{br.} \frac{D}{a_0} = 8.2170139$$

Das constante Glied in  $\log. \text{nat.} \frac{1 - e_0^2}{1 + e_0 \cos f}$  hat zum Ausdruck

\*) S. »*Fundamenta etc.*« p. 126.

\*\*) S. Schum. Astr. Nachr. Bd. 17 p. 297 u. f.

$$= \frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{24}e^4 + \dots$$

und hiemit ergibt sich das constante Glied in

$$\log. \text{br. } \frac{1 - e_0^2}{1 + e_0 \cos \gamma} = + 0.0003275.$$

Aus dem constanten Gliede  $- 1348,822$  des Ausdrucks von  $w$  des Art. 125 ergibt sich für den Briggischen Logarithmus, und in Theilen des Kreisradius

$$- 0.0028400$$

und hiemit wird das constante Glied in

$$\log. \text{br. } \sin p = 8.2195264$$

mit den Mondtafeln bis auf zwei Einheiten der letzten Decimale übereinstimmend. Die Reduction dieser Constante auf die des Sinus der Parallaxe selbst ist in der Einleitung zu den Mondtafeln gegeben, und braucht daher hier nicht wiederholt zu werden.

## 128.

Die Gleichung (19), oder welches dem gleich ist, die Gleichung (40) des vorvor. Art. giebt Veranlassung zu einer durchgreifenden Prüfung der hier berechneten Störungen der Länge und des Radius Vectors des Mondes. Die im Art. 69 angegebenen numerischen Werthe der Coefficienten von  $\delta \frac{h_0}{h}$  sind, wie schon angeführt, soweit sie die Abtheilungen 1, 2, 11, 15 betreffen, durch die Gleichung (18) berechnet, berechnen wir sie jetzt wieder durch (19) oder (40), so werden dazu ganz andere Zahlenwerthe angewandt werden müssen, und etwaige Fehler der hier ausgeführten Rechnungen müssten sich durch Unübereinstimmung der so erlangten doppelten Werthe der Coefficienten von  $\delta \frac{h_0}{h}$  kund geben. Für die Anwendung der Gleichung (40) zu diesem Zweck ist nur die Berechnung des einen Products  $(\bar{W} + \left(\frac{\nu}{1+\nu}\right)^2 \frac{h_0}{h}) (2\nu + \nu^2)$ , und die Zusammensetzung von  $\nu^2$  aus den Potenzen von  $w$  erforderlich, indem die übrigen erforderlichen Grössen schon anderweitig vorkommen. Nach der Ausführung dieser eben genannten Rechnungen ergibt sich die folgende Zusammenstellung.



$g, g'$	$\bar{W} + \left(\frac{\nu}{1+\nu}\right) \frac{2h_0}{h}$	$2\nu$	$\nu^2$	$\left(\bar{W} + \left(\frac{\nu}{1+\nu}\right) \frac{2h_0}{h}\right) \times (2\nu + \nu^2)$	$\delta \frac{h_0}{h}$	Diff
	cos	cos	cos	cos	cos	
<b>1.</b>						
1,0	-193,606	+187,040	+15,051	-67,767	-59,282	-7
2,0	-11.851	+12.705	+1.039	-4.028	-2.135	+5
3,0	-0.600	+0.679	+0.057	-0.232	-0.096	+4
4,0	-0.040	+0.040		-0.011	-0.011	+7
-3,-1	-0.087	+0.095		-0.006	+0.002	-3
-2,-1	-2.234	+2.284	+0.037	-0.146	-0.059	0
-1,-1	-78.449	+77.217	+0.048	-0.673	-1.857	+1
0,-1	-49.579	+49.389	+1.092	-5.073	-4.171	-3
1,-1	+102.947	-101.512	+1.684	-6.722	-3.603	-3
2,-1	+2.278	-2.260	+0.062	-0.231	-0.151	+2
3,-1	+0.074	-0.077	+0.003	-0.011	-0.011	+3
-2,-2	-0.004	+0.019	+0.005	-0.017	+0.003	-4
-1,-2	-0.918	+0.915	+0.047	-0.067	-0.053	-4
0,-2	-1.104	+1.064	+0.027	-0.128	-0.141	-6
1,-2	+1.830	-1.819	+0.045	-0.179	-0.123	-1
2,-2	+0.064	-0.053	+0.010	-0.033	-0.042	+7
-1,-3	-0.014	+0.015		-0.002	-0.001	+1
0,-3	-0.017	+0.018	+0.003	-0.008	-0.004	-9
1,-3	+0.034	-0.036	+0.002	-0.004	-0.004	+1
<b>2.</b>						
0,0	-0.003	+0.082	+0.006	-0.026	+0.059	+6
1,0	-2.568	+2.517	-0.016	+0.047	-0.020	+10
2,0	-0.104	+0.089	-0.004	+0.016	-0.003	+1
-1,-1	+0.044	+0.013	+0.025	-0.078	+0.004	0
0,-1	-0.224	+1.865	+0.512	-2.026	+0.127	-14
1,-1	-26.018	+27.816	-0.049	-0.269	+1.480	+17
2,-1	-44.652	+32.102	-0.746	+3.051	-10.245	+8
3,-1	-3.919	+2.287	-0.309	+1.417	-0.524	0
4,-1	-0.261	+0.155	-0.021	+0.097	-0.030	-2
-2,-2	+0.057	-0.069	-0.004	+0.017	+0.001	+1
-1,-2	+2.186	-2.210	-0.059	+0.234	+0.151	-27
0,-2	+7.700	-103.334	-0.197	+2.418	-93.413	-10
1,-2	+3870.203	-4142.390	+26.398	-83.283	-329.072	-5
2,-2	+4000.857	-3024.355	+18.814	-74.620	+920.696	+9
3,-2	+170.966	-137.916	+0.182	-0.143	+33.089	-3
4,-2	+7.995	-6.798	-0.032	+0.172	+1.337	+5
5,-2	+0.404	-0.361	-0.003	+0.014	+0.054	+7
6,-2	+0.025	-0.022			+0.003	-3
-1,-3	+0.101	-0.152	-0.024	+0.074	-0.001	+8
0,-3	+0.584	-4.889	-0.407	+1.636	-3.076	+8
1,-3	+156.718	-176.808	+0.602	-1.175	-20.663	-8
2,-3	+277.554	-213.200	+1.679	-6.430	+59.603	-7
3,-3	+14.338	-10.594	+0.400	-1.811	+2.333	+7
4,-3	+0.747	-0.570	+0.026	-0.107	+0.096	+8
5,-3	+0.044	-0.033		-0.008	0.000	+5

2.						
0,-4	+0.034	-0.200	-0.022	+0.084	-0.104	+13
1,-4	+5.037	-6.010	+0.001	+0.054	-0.918	+12
2,-4	+13.270	-10.446	+0.081	-0.300	+2.635	+5
3,-4	+0.776	-0.550	+0.037	-0.155	+0.108	+4
4,-4	+0.044	-0.031		-0.040	0.000	+5
1,-5	+0.153	-0.182		+0.003	-0.026	-11
2,-5	+0.539	-0.438	+0.003	-0.040	+0.094	+4
3,-5	+0.031	-0.022	+0.001	-0.008	+0.002	+3
11.						
2,-2	-0.062	+0.024	-0.043	+0.047	-0.004	+4
3,-2	-0.053	+0.018	-0.008	+0.040	-0.003	0
1,-3	+0.034	-0.024	-0.040	+0.015	+0.015	-19
2,-3	-0.632	+0.256	-0.154	+0.543	+0.016	+2
3,-3	-1.708	+0.607	-0.270	+1.242	-0.129	+1
4,-3	-0.900	+0.250	-0.140	+0.748	-0.042	0
5,-3	-0.112	+0.033	-0.016	+0.090	-0.005	0
0,-4	+0.007	+0.044	+0.017	-0.044	+0.021	-21
1,-4	+0.652	-0.187	+0.524	-1.063	-0.074	-6
2,-4	+52.045	-23.187	+10.945	-40.394	-0.621	0
3,-4	+97.581	-36.034	+15.446	-69.507	+7.459	+4
4,-4	+39.843	-14.545	+6.294	-32.610	+1.982	-15
5,-4	+3.658	-1.253	+0.545	-2.752	+0.198	-13
6,-4	+0.276	-0.140	+0.039	-0.188	+0.017	-2
7,-4	+0.017	-0.008		-0.013	-0.004	+4
1,-5	+0.031	+0.003	+0.044	-0.088	-0.010	+8
2,-5	+4.129	-2.054	+0.940	-3.380	-0.075	+7
3,-5	+10.997	-4.446	+1.746	-7.746	+0.854	-15
4,-5	+5.512	-1.580	+0.877	-4.534	+0.278	-14
5,-5	+0.549	-0.181	+0.082	-0.417	+0.033	-7
6,-5	+0.035	-0.016		-0.029	-0.010	+12
2,-6	+0.239	-0.114	+0.051	-0.183	-0.007	+2
3,-6	+0.763	-0.293	+0.122	-0.533	+0.059	-2
4,-6	+0.447	-0.130	+0.074	-0.375	+0.016	+5
5,-6	+0.047	-0.015	+0.007	-0.034	+0.005	-4
3,-7	+0.040	-0.016	+0.006	-0.029	+0.004	+1
4,-7	+0.028	-0.007	+0.004	-0.022	0.000	+1
15.						
3,-5	-0.012	+0.003	-0.002	+0.013	+0.002	-2
4,-5	-0.044	+0.008	-0.005	+0.039	+0.004	-3
5,-5	-0.038	+0.007	-0.005	+0.036	0.000	-1
2,-6	+0.014	-0.006	+0.004	-0.018	-0.006	+6
3,-6	+0.744	-0.197	+0.123	-0.670	-0.003	+2
4,-6	+1.936	-0.444	+0.268	-1.698	+0.065	-1
5,-6	+1.535	-0.292	+0.196	-1.398	+0.044	-1
6,-6	+0.472	-0.084	+0.054	-0.433	+0.009	+1
7,-6	+0.060	-0.012	+0.007	-0.054	+0.004	+1
3,-7	+0.094	-0.025	+0.014	-0.086	-0.003	+3
4,-7	+0.299	-0.070	+0.042	-0.266	+0.005	+6
5,-7	+0.274	-0.052	+0.034	-0.254	+0.002	+6
6,-7	+0.089	-0.016	+0.011	-0.086	-0.002	+4

Die letzte mit »Diff.« überschriebene Columnne giebt die Unterschiede zwischen den hier berechneten Coefficienten von  $\delta \frac{h}{k}$  und denen des Art. 69. Diese Unterschiede sind befriedigend klein, denn die meisten derselben betragen nur einige Tausendtheile von Secunden, und der grösste erreicht nur 0,027; überhaupt sind nur zwei Unterschiede vorhanden, die 0,02 übersteigen.

§ 9. Berechnung der Breitenstörungen und der Reduction der Länge auf die Ecliptik aus den vorhergehenden Werthen.

129.

Im Art. 9 wurde der Bogen der Mondbahn, welcher sich von der positiven Achse der  $X$  bis zum aufsteigenden Knoten der Mondbahn auf der Sonnenbahn erstreckt, mit  $\varphi$  bezeichnet, da nun  $v$  die von derselben Achse an gerechnete Länge des Mondes in seiner Bahn bedeutet, so ist  $v - \varphi$  der Bogen, welcher sich vom genannten aufsteigenden Knoten bis zum Orte des Mondes erstreckt, mit anderen Worten,  $v - \varphi$  ist das Argument der Breite des Mondes.

A. a. O. wurde ferner der Bogen der Sonnenbahn, welcher sich von der positiven  $X'$  Achse bis zu demselben Knoten erstreckt, mit  $\psi$  bezeichnet, wenn wir daher mit  $-p$  den Bogen bezeichnen, welcher sich von demselben Anfangspunkt bis zur wahren Frühlingsnachtgleiche erstreckt, so ist  $\psi + p$  der Bogen der Ecliptik, welcher sich von der Frühlingsnachtgleiche bis zu dem mehrmals genannten Knoten erstreckt, und  $p$  ist die Summe der Präcession und der Nutationen. Sei nun  $L$  die wahre tropische Länge des Mondes auf der Ecliptik, dann ist der Bogen der Ecliptik, welcher sich von demselben Knoten bis zur Projection des Mondortes auf der Ecliptik erstreckt  $= L - \psi - p$ , und die sphärische Trigonometrie giebt

$$\begin{aligned} \cos B \sin (L - \psi - p) &= \cos J \sin (v - \varphi) \\ \cos B \cos (L - \psi - p) &= \cos (v - \varphi) \\ \sin B &= \sin J \sin (v - \varphi) \end{aligned}$$

wenn ausserdem  $B$  die Breite des Mondes über der Ecliptik bedeutet. Es ist aber zufolge der Gleichungen (10)

$$\begin{aligned} \varphi &= -n(\alpha - \eta) t - N - K + \pi \\ \psi &= -n(\alpha + \eta) t - N + K + \pi' \end{aligned}$$

und da ferner

$$v = \bar{f} + nyt + \pi$$

ist, so wird

$$v - \varphi = \bar{f} + \omega + \delta N + \delta K$$

wenn man wie früher

$$\omega = n (y + \alpha - \eta) t + N_0 + K_0$$

setzt, und also  $\omega$  die mittlere Entfernung des Mondperigäums vom mehrmals genannten Knoten bedeutet. Bezeichnen wir ferner, wie früher, mit  $\theta$  das Supplement der mittleren siderischen Länge dieses Knötens, so wird

$$\theta = n (\alpha + \eta) t + N_0 - K_0 - \pi'$$

woraus

$$\psi = -\theta - \delta N + \delta K$$

folgt. Hiemit gehen die obigen trigonometrischen Gleichungen in die folgenden über

$$(42) \begin{cases} \cos B \sin (L + \theta - p + \delta N - \delta K) = \cos J \sin (\bar{f} + \omega + \delta N + \delta K) \\ \cos B \cos (L + \theta - p + \delta N - \delta K) = \cos (\bar{f} + \omega + \delta N + \delta K) \\ \sin B = \sin J \sin (\bar{f} + \omega + \delta N + \delta K) \end{cases}$$

130.

Die Gleichungen (42) sind mit den folgenden identisch,

$$(43) \begin{cases} \cos B \sin (L - II - p) = \cos J_0 \sin (\bar{f} + \omega) - s \left( \operatorname{tg} J_0 + \frac{V}{k \cos J_0} \right) \\ \cos B \cos (L - II - p) = \cos (\bar{f} + \omega) - s \frac{U}{k} \\ \sin B = \sin J_0 \sin (\bar{f} + \omega) + s \end{cases}$$

in welchen

$$(44) \begin{cases} U = \sin J \sin (\delta N + \delta K) \\ V = \sin J \cos (\delta N + \delta K) - \sin J_0 \\ s = V \sin (\bar{f} + \omega) + U \cos (\bar{f} + \omega) \\ k = \cos J_0 (\cos J_0 + \cos J) - V \sin J_0 \\ \quad = 1 + \cos J_0 \cos J - \sin J_0 \sin J \cos (\delta N + \delta K) \\ \sin (II + \theta + \delta N - \delta K) = \frac{\cos J_0 + \cos J}{k} \sin (\delta N + \delta K) \\ \cos (II + \theta + \delta N - \delta K) = \frac{(1 + \cos J_0 \cos J) \cos (\delta N + \delta K) - \sin J_0 \sin J}{k} \end{cases}$$

ist. \*) Um die Identität der Gleichungen (42) und (43) nachzuweisen, substituirt ich zuerst die Ausdrücke für  $U$  und  $V$  in den Ausdruck für  $s$ , hiemit wird

$$s = \sin J \sin (\bar{f} + \omega + \delta N + \delta K) - \sin J_0 \sin (\bar{f} + \omega)$$

durch deren Substitution in die dritte (43) die Identität dieser mit der dritten (42) sich sogleich zeigt. Wenn man in der ersten (43)  $\operatorname{tg} J_0$  mit  $k$  multiplicirt und dividirt, und den Werth von  $V$  substituirt, so wird sie

$$\cos B \sin (L - II - p) = \cos J_0 \sin (\bar{f} + \omega) - \frac{s}{k} (\sin J_0 \cos J + \cos J_0 \sin J \cos (\delta N + \delta K))$$

multiplicirt und dividirt man hier das erste Glied rechter Hand mit  $k$ , und substituirt den vorstehenden Ausdruck von  $s$ , so ergibt sich

$$\begin{aligned} \cos B \sin (L - II - p) &= \frac{1}{k} \{ (\cos J_0 + \cos J) \sin (\bar{f} + \omega) \\ &- [\sin J_0 \sin J \cos J + \cos J_0 \sin^2 J \cos (\delta N + \delta K)] \sin (\bar{f} + \omega + \delta N + \delta K) \} \\ &= \frac{1}{k} \{ -(\cos J_0 + \cos J) \sin (\delta N + \delta K) \cos (\bar{f} + \omega + \delta N + \delta K) \\ &+ \cos J [(1 + \cos J_0 \cos J) \cos (\delta N + \delta K) - \sin J_0 \sin J] \sin (\bar{f} + \omega + \delta N + \delta K) \} \\ &= \cos J \cos (II + \theta + \delta N - \delta K) \sin (\bar{f} + \omega + \delta N + \delta K) \quad (45) \\ &- \sin (II + \theta + \delta N - \delta K) \cos (\bar{f} + \omega + \delta N + \delta K) \end{aligned}$$

vermöge der beiden letzten (44). Substituirt man den Ausdruck von  $U$  in die zweite (43), so wird diese

$$\cos B \cos (L - II - p) = \cos (\bar{f} + \omega) - \frac{s}{k} \sin J \sin (\delta N + \delta K)$$

und wenn man hier wieder das erste Glied rechter Hand mit  $k$  multiplicirt und dividirt, so wie den Ausdruck für  $s$  substituirt,

$$\begin{aligned} \cos B \cos (L - II - p) &= \frac{1}{k} \{ \cos (\bar{f} + \omega) + \cos J_0 \cos J \cos (\bar{f} + \omega) \\ &- \sin J_0 \sin J \cos (\bar{f} + \omega + \delta N + \delta K) \\ &- \sin^2 J \sin (\delta N + \delta K) \sin (\bar{f} + \omega + \delta N + \delta K) \} \\ &= \frac{1}{k} \{ \cos J (\cos J_0 + \cos J) \sin (\delta N + \delta K) \sin (\bar{f} + \omega + \delta N + \delta K) \\ &+ [(1 + \cos J_0 \cos J) \cos (\delta N + \delta K) - \sin J_0 \sin J] \cos (\bar{f} + \omega + \delta N + \delta K) \} \\ &= \cos J \sin (II + \theta + \delta N - \delta K) \sin (\bar{f} + \omega + \delta N + \delta K) \dots (46) \\ &+ \cos (II + \theta + \delta N - \delta K) \cos (\bar{f} + \omega + \delta N + \delta K) \end{aligned}$$

\*) In der ersten Abhandlung über die Stör. d. kl. Pl. habe ich diese in allgemeiner Form aufgestellten Gleichungen direkt aus den allgemein gestellten (42) abgeleitet.

vermöge der beiden letzten (44). Die Identität der Gleichungen (45) und (46) mit den beiden ersten (42) ist ohne Mühe herzustellen.

434.

Aus den beiden ersten Gleichungen (43) lässt sich der Ausdruck des Bogens  $L - II - p$  durch eine sehr einfach und regelmässig fortschreitende Reihe geben, die man auf die folgende Weise erhält. Sei

$$\frac{U}{k} = A \sin w$$

$$\operatorname{tg} J_0 + \frac{V}{k \cos J_0} = A \cos w$$

dann gehen die genannten Gleichungen in die folgenden über,

$$\cos B \sin (L - II - p) = \cos J_0 \sin (\bar{f} + \omega) - sA \cos w$$

$$\cos B \cos (L - II - p) = \cos (\bar{f} + \omega) - sA \sin w$$

Führt man hierin die imaginären Exponentialfunctionen ein, bezeichnet die Grundzahl der natürlichen Logarithmen mit  $c$ , und setzt zur Abkürzung

$$x = c^{(L - II - p) \sqrt{-1}}; \quad y = c^{(\bar{f} + \omega) \sqrt{-1}}; \quad z = c^{w \sqrt{-1}}$$

so wird

$$\cos B \left( x - \frac{1}{x} \right) = \cos J_0 \left( y - \frac{1}{y} \right) - \sqrt{-1} \cdot sA \left( z + \frac{1}{z} \right)$$

$$\cos B \left( x + \frac{1}{x} \right) = y + \frac{1}{y} + \sqrt{-1} \cdot sA \left( z - \frac{1}{z} \right)$$

woraus durch Addition und Subtraction

$$\frac{2 \cos B}{1 + \cos J_0} \frac{x}{y} = 1 + \varepsilon \frac{1}{y^2} - \sqrt{-1} \cdot \eta s \frac{1}{yz}$$

$$\frac{2 \cos B}{1 + \cos J_0} \frac{y}{x} = 1 + \varepsilon y^2 + \sqrt{-1} \cdot \eta s yz$$

entsteht, in welchen zur Abkürzung

$$\varepsilon = \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} J_0; \quad \eta = \frac{A}{\cos^2 \frac{1}{2} J_0}$$

gesetzt worden ist. Dividirt man die erste durch die zweite, und nimmt die natürlichen Logarithmen, so bekommt man

$$2 \sqrt{-1} \cdot (L - II - p - \bar{f} - \omega) = \log \left( 1 + \varepsilon \frac{1}{y^2} - \sqrt{-1} \cdot \eta s \frac{1}{yz} \right)$$

$$(47) \dots \dots \dots - \log \left( 1 + \varepsilon y^2 + \sqrt{-1} \cdot \eta s yz \right)$$

Löst man diese Logarithmen in unendliche Reihen auf und geht zum Reellen über, so ergibt sich sogleich

$$\begin{aligned}
 L = & \bar{f} + \omega + II + p - e \sin 2l + \frac{1}{2} e^2 \sin 4l - \frac{1}{2} e^3 \sin 6l + \frac{1}{2} e^4 \sin 8l \bar{+} \dots \\
 & - \eta s \left\{ \cos(l+w) - \frac{1}{2} e \cos(3l+w) + \frac{1}{2} e^2 \cos(5l+w) - \frac{1}{2} e^3 \cos(7l+w) \bar{+} \dots \right\} \\
 & - \eta^2 s^2 \left\{ \frac{1}{2} \sin(2l+2w) - \frac{1}{2} e \sin(4l+2w) + \frac{1}{2} e^2 \sin(6l+2w) - \frac{1}{2} e^3 \sin(8l+2w) \bar{+} \dots \right\} \\
 & + \eta^3 s^3 \left\{ \frac{1}{2} \cos(3l+3w) - \frac{1}{2} e \cos(5l+3w) + \frac{1}{2} e^2 \cos(7l+3w) - \frac{1}{2} e^3 \cos(9l+3w) \bar{+} \dots \right\} \\
 & + \eta^4 s^4 \left\{ \frac{1}{2} \sin(4l+4w) - \frac{1}{2} e \sin(6l+4w) + \frac{1}{2} e^2 \sin(8l+4w) - \frac{1}{2} e^3 \sin(10l+4w) \bar{+} \dots \right\} \\
 & \bar{+} \text{etc.}
 \end{aligned}$$

wo unter den Sinus- und Cosinuszeichen zur Abkürzung  $l$  statt  $\bar{f} + \omega$  geschrieben worden ist. Diese Reihen schreiten nach so einfachen Gesetzen fort, dass ihre beliebige Fortsetzung nur die Mühe des Hinschreibens kostet. Ueber das Gesetz der Fortschreitung der Bögen, der numerischen Nenner und der Vorzeichen braucht nichts gesagt zu werden, in Bezug auf die numerischen Zähler ist zu bemerken, dass sie die Entwicklungscoefficienten des Binoms  $(1+x)^{-n}$  sind, wenn nach und nach  $n=1, =2, =3, =\text{etc.}$  gesetzt wird.

132.

Die Coefficienten der verschiedenen Potenzen von  $\eta s$  des eben entwickelten Ausdrucks lassen sich auch durch endliche Ausdrücke geben, die nach einfachen Gesetzen fortschreiten. Der Gleichung (47) lässt sich leicht die folgende Form geben,

$$\begin{aligned}
 2\sqrt{-1} \cdot (L - II - p - \bar{f} - \omega) = & \log\left(1 + e \frac{1}{y^2}\right) - \log(1 + ey^2) \dots \dots (48) \\
 & + \log\left(1 - \frac{\sqrt{-1} \cdot \eta s \frac{1}{y^2}}{1 + e \frac{1}{y^2}}\right) - \log\left(1 + \frac{\sqrt{-1} \cdot \eta s y^2}{1 + ey^2}\right)
 \end{aligned}$$

und löst man die beiden hier zuletzt angesetzten Logarithmen in unendliche Reihen auf, so bekommt man

$$\begin{aligned}
 2\sqrt{-1} \cdot (L - II - p - \bar{f} - \omega) = & \log\left(1 + e \frac{1}{y^2}\right) - \log(1 + ey^2) \\
 - \sqrt{-1} \cdot \eta s \left\{ \frac{y^2}{1 + ey^2} + \frac{1}{1 + e \frac{1}{y^2}} \right\} - & \frac{1}{2} \eta^2 s^2 \left\{ \frac{y^2 x^2}{(1 + ey^2)^2} - \frac{1}{\left(1 + e \frac{1}{y^2}\right)^2} \right\} \\
 + \frac{1}{2} \sqrt{-1} \cdot \eta^3 s^3 \left\{ \frac{y^2 x^2}{(1 + ey^2)^3} + \frac{1}{\left(1 + e \frac{1}{y^2}\right)^3} \right\} + & \frac{1}{2} \eta^4 s^4 \left\{ \frac{y^2 x^2}{(1 + ey^2)^4} - \frac{1}{\left(1 + e \frac{1}{y^2}\right)^4} \right\}
 \end{aligned}$$

$\bar{+}$  etc.

Wenn man hier die Coefficienten von  $\eta s$ ,  $\eta^2 s^2$ , etc. auf gleiche Nenner bringt, so giebt sich ihre Transformation in Sinusse und Cosinusse sogleich zu erkennen. Es wird

$$\frac{yx}{1+\varepsilon y^2} + \frac{\frac{1}{yx}}{1+\varepsilon \frac{1}{y^2}} = \frac{yx + \frac{1}{yx} + \varepsilon \left( \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right)}{1+\varepsilon \left( y^2 + \frac{1}{y^2} \right) + \varepsilon^2} = 2 \frac{\cos(\bar{f}+\omega+\omega) + \varepsilon \cos(\bar{f}+\omega-\omega)}{1+2\varepsilon \cos 2(\bar{f}+\omega) + \varepsilon^2}$$

$$\frac{y^2 x^2}{(1+\varepsilon y^2)^2} - \frac{\frac{1}{y^2 x^2}}{\left(1+\varepsilon \frac{1}{y^2}\right)^2} = \frac{y^2 x^2 - \frac{1}{y^2 x^2} + 2\varepsilon \left( x^2 - \frac{1}{x^2} \right) + \varepsilon^2 \left( \frac{x^2}{y^2} - \frac{y^2}{x^2} \right)}{\left(1+\varepsilon \left( y^2 + \frac{1}{y^2} \right) + \varepsilon^2 \right)^2}$$

$$= 2 \sqrt{-1} \cdot \frac{\sin 2(\bar{f}+\omega+\omega) + 2\varepsilon \sin 2\omega - \varepsilon^2 \sin 2(\bar{f}+\omega-\omega)}{(1+2\varepsilon \cos 2(\bar{f}+\omega) + \varepsilon^2)^2}$$

u. s. w. Die beiden ersten imaginären Logarithmen der Gleichung (48) verwandelt man durch die folgenden Betrachtungen in einen reellen Kreisbogen. Seien  $a$ ,  $b$ ,  $d$ ,  $e$  irgend welche reelle Grössen, zwischen welchen die Gleichung

$$\log(a + b \sqrt{-1}) = d + e \sqrt{-1}$$

stattfindet. Geht man zu den Exponentialgrössen über, so erhält man hieraus

$$a + b \sqrt{-1} = c^{d+e\sqrt{-1}} = c^d (\cos e + \sqrt{-1} \cdot \sin e)$$

woraus

$$a = c^d \cos e; \quad b = c^d \sin e$$

folgt. Hiemit wird

$$d = \frac{1}{2} \log(a^2 + b^2); \quad e = \text{arc. tg } \frac{b}{a}$$

und es wird also

$$\log(a + b \sqrt{-1}) = \frac{1}{2} \log(a^2 + b^2) + \sqrt{-1} \cdot \text{arc. tg } \frac{b}{a}$$

ebenso erhält man

$$\log(a - b \sqrt{-1}) = \frac{1}{2} \log(a^2 + b^2) - \sqrt{-1} \cdot \text{arc. tg } \frac{b}{a}$$

Wenden wir diesen Satz auf die Gleichung (48) an, so ist

$$\log(a - b \sqrt{-1}) = \log\left(1 + \varepsilon \frac{1}{y^2}\right)$$

$$= \log(1 + \varepsilon \cos 2(\bar{f}+\omega)) - \sqrt{-1} \cdot \varepsilon \sin 2(\bar{f}+\omega)$$

also

$$a = 1 + \varepsilon \cos 2(\bar{f}+\omega); \quad b = \varepsilon \sin 2(\bar{f}+\omega)$$

folglich

$$\log\left(1 + \varepsilon \frac{1}{y^2}\right) - \log(1 + \varepsilon y^2)$$

$$= -2 \sqrt{-1} \cdot \text{arc. tg } \frac{\varepsilon \sin 2(\bar{f}+\omega)}{1 + \varepsilon \cos 2(\bar{f}+\omega)}$$



und die Gleichung (48) geht in die folgende über,

$$\begin{aligned}
 L = & \bar{f} + \omega + II + p - \text{arc. tg} \frac{\varepsilon \sin 2(\bar{f} + \omega)}{1 + \varepsilon \cos 2(\bar{f} + \omega)} \\
 & - \eta s \frac{\cos(\omega + l) + \varepsilon \cos(\omega - l)}{1 + 2\varepsilon \cos 2l + \varepsilon^2} \\
 & - \eta^2 s^2 \frac{\sin(2\omega + 2l) + 2\varepsilon \sin 2\omega + \varepsilon^2 \sin(2\omega - 2l)}{2(1 + 2\varepsilon \cos 2l + \varepsilon^2)^2} \\
 & + \eta^3 s^3 \frac{\cos(3\omega + 3l) + 3\varepsilon \cos(3\omega + l) + 3\varepsilon^2 \cos(3\omega - l) + \varepsilon^3 \cos(3\omega - 3l)}{8(1 + 2\varepsilon \cos 2l + \varepsilon^2)^3} \\
 & + \eta^4 s^4 \frac{\sin(4\omega + 4l) + 4\varepsilon \sin(4\omega + 2l) + 6\varepsilon^2 \sin 4\omega + 4\varepsilon^3 \sin(4\omega - 2l) + \varepsilon^4 \sin(4\omega - 4l)}{4(1 + 2\varepsilon \cos 2l + \varepsilon^2)^4} \\
 & + \text{etc.}
 \end{aligned}$$

wo wieder  $l$  statt  $\bar{f} + \omega$  geschrieben worden ist. Auch von dieser Reihe ist das Gesetz des Fortganges offenbar.

133.

Man kann noch weiter gehen, und die unendliche Reihe des eben gefundenen Ausdruckes für  $L$  auch in einen durch seine Tangente gegebenen Kreisbogen verwandeln. Sei

$$\begin{aligned}
 \lambda u &= \frac{y}{1 + \varepsilon y^2} \\
 \frac{\lambda}{u} &= \frac{1}{1 + \varepsilon \frac{1}{y^2}}
 \end{aligned}$$

wo  $u = c^\mu \sqrt{-1}$  ist, und  $\mu$  und  $\lambda$  aus diesen Gleichungen bestimmt werden müssen. Hiemit geht (48) über in

$$\begin{aligned}
 2\sqrt{-1} \cdot (L - II - p - \bar{f} - \omega) &= \log\left(1 + \varepsilon \frac{1}{y^2}\right) - \log(1 + \varepsilon y^2) \\
 &+ \log\left(1 - \sqrt{-1} \cdot \eta s \lambda \frac{1}{zu}\right) - \log(1 + \sqrt{-1} \cdot \eta s \lambda \cdot zu)
 \end{aligned}$$

wo die beiden letzten Logarithmen dieselbe Form haben wie die beiden ersten. Die Vergleichung mit dem Satze des vor. Art. giebt in Bezug auf jene

$$a = 1 - \eta s \lambda \sin(\mu + \omega); \quad b = -\eta s \lambda \cos(\mu + \omega)$$

und hiemit erhalten wir sogleich

$$L = \bar{f} + \omega + II + p_i - \text{arc. tg} \frac{\varepsilon \sin 2(\bar{f} + \omega)}{1 + \varepsilon \cos 2(\bar{f} + \omega)} - \text{arc. tg} \frac{\eta s \lambda \cos(\mu + \omega)}{1 - \eta s \lambda \sin(\mu + \omega)}$$

Um die Ausdrücke für  $\mu$  und  $\lambda$  zu erhalten, geben die eben eingeführten Gleichungen durch die Multiplication

$$\lambda^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon \left( y^2 + \frac{1}{y^2} \right) + \varepsilon^2}$$

oder

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{1 + 2\varepsilon \cos 2(\bar{f} + \omega) + \varepsilon^2}}$$

Setzt man aber  $\sin B_0 = \sin J_0 \sin(\bar{f} + \omega)$ , so dass  $B_0$  die Breite bedeutet, die statt findet, wenn man von den Breitenstörungen absieht, und erinnert sich, dass  $\varepsilon = \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} J_0$  ist, so giebt der vorstehende Ausdruck

$$\lambda = \frac{\cos^2 \frac{1}{2} J_0}{\cos B_0}$$

Dieselben Gleichungen geben auch durch eine einfache Transformation

$$\frac{1}{\lambda} \left( \frac{u}{y} - \frac{y}{u} \right) = \varepsilon \left( \frac{1}{y^2} - y^2 \right)$$

$$\frac{1}{\lambda} \left( \frac{u}{y} + \frac{y}{u} \right) = 2 + \varepsilon \left( \frac{1}{y^2} + y^2 \right)$$

und hieraus folgt

$$\operatorname{tg}(\mu - \bar{f} - \omega) = - \frac{\varepsilon \sin 2(\bar{f} + \omega)}{1 + \varepsilon \cos 2(\bar{f} + \omega)}$$

• Es wird also

$$\mu = \bar{f} + \omega - \operatorname{arc.} \operatorname{tg} \frac{\varepsilon \sin 2(\bar{f} + \omega)}{1 + \varepsilon \cos 2(\bar{f} + \omega)}$$

$$(49) \dots L = \mu + \Pi + p - \operatorname{arc.} \operatorname{tg} \frac{\eta s \lambda \cos(\mu + \omega)}{1 - \eta s \lambda \sin(\mu + \omega)}$$

Es ist zu bemerken, dass  $\mu$  den Werth von  $L - \Pi - p$  in dem Falle darstellt, wo keine Breitenstörungen statt finden, und dass folglich der Einfluss der Breitenstörungen auf die auf die Ecliptik reducirte Länge durch den Kreisbogen des Ausdrucks (49) strenge gegeben ist.

#### 134.

Der eben gefundene Ausdruck für  $L$  kann ausdrücklich auf die Breitenstörungen und das Argument der Breite hingeführt werden. Zu dem Ende stelle ich die im vor. Art. eingeführten Gleichungen wie folgt,

$$\frac{1}{\lambda u} = \frac{1}{y} + \varepsilon y; \quad \frac{u}{\lambda} = y + \varepsilon \frac{1}{y}$$

diese geben

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda} \left( u + \frac{1}{u} \right) &= y + \frac{1}{y} + \varepsilon \left( y + \frac{1}{y} \right) \\ \frac{1}{\lambda} \left( u - \frac{1}{u} \right) &= y - \frac{1}{y} - \varepsilon \left( y - \frac{1}{y} \right) \end{aligned}$$

also wenn man zum Reellen übergeht, und den im vor. Art. gefundenen Ausdruck für  $\lambda$  benutzt,

$$\begin{aligned} \sin \mu &= \frac{\cos J_0}{\cos B_0} \sin (\bar{f} + \omega) \\ \cos \mu &= \frac{1}{\cos B_0} \cos (\bar{f} + \omega) \end{aligned}$$

Durch Hülfe dieser, so wie der Gleichungen

$$\begin{aligned} \lambda \eta \sin w &= \frac{U}{k} \frac{1}{\cos B_0} \\ \lambda \eta \cos w &= \left( \operatorname{tg} J_0 + \frac{V}{k \cos J_0} \right) \frac{1}{\cos B_0} \end{aligned}$$

die aus dem Art. 134 folgen, verwandelt man (49) leicht in die folgende.

$$L = \mu + \Pi + p$$

$$= \operatorname{arc.} \operatorname{tg} \frac{s \left( \operatorname{tg} J_0 + \frac{V}{k \cos J_0} \right) \sec {}^2 B_0 \cos (\bar{f} + \omega) - s \frac{U}{k} \cos J_0 \sec {}^2 B_0 \sin (\bar{f} + \omega)}{1 - s \left( \sin J_0 + \frac{V}{k} \right) \sec {}^2 B_0 \sin (\bar{f} + \omega) - s \frac{U}{k} \sec {}^2 B_0 \cos (\bar{f} + \omega)} \quad (50)$$

die sich leicht entwickeln lässt und weiter unten angewandt werden soll. Es lassen sich aus den Gleichungen (43) noch mehrere andere sehr merkwürdige Reihen entwickeln, die ich aber hier der Kürze wegen übergangen will.

135.

Aus dem Vorhergehenden haben wir

$$\sin B = \sin B_0 + s$$

und zufolge der Gleichungen (44) ist

$$\begin{aligned} s &= V \sin (\bar{f} + \omega) + U \cos (\bar{f} + \omega) \\ U &= \sin J \sin (\delta N + \delta K) \\ V &= \sin J \cos (\delta N + \delta K) - \sin J_0 \end{aligned}$$

diese Ausdrücke sind jetzt zu entwickeln. Im Vorhergehenden ist schon

$$\begin{aligned} P &= 2 \sin \frac{1}{2} J \sin \delta N \\ Q &= 2 \sin \frac{1}{2} J \cos \delta N \end{aligned}$$

eingeführt, setzen wir ausserdem

$$u = \cos \frac{1}{2}J \sin \delta K$$

$$v = \cos \frac{1}{2}J \cos \delta K$$

so wird

$$U = Pv + Qu$$

$$V = Qv - Pu - \sin J_0$$

Die Ausdrücke für  $P$  und  $Q$  geben

$$\cos^2 \frac{1}{2}J = 1 - \frac{1}{4}P^2 - \frac{1}{4}Q^2$$

und da zufolge des Vorhergehenden

$$P = \delta P; \quad Q = 2 \sin \frac{1}{2}J_0 + \delta Q$$

ist, so wird

$$\cos^2 \frac{1}{2}J = \cos^2 \frac{1}{2}J_0 - \sin \frac{1}{2}J_0 \delta Q - \frac{1}{4}\delta P^2 - \frac{1}{4}\delta Q^2$$

und wenn wir den Cubus der störenden Kraft übergehen,

$$\cos \frac{1}{2}J = \cos \frac{1}{2}J_0 - \frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{1}{2}J_0 \delta Q - \frac{\delta P^2}{8 \cos \frac{1}{2}J_0} - \frac{\delta Q^2}{8 \cos^3 \frac{1}{2}J_0}$$

Mit derselben Uebergang geben die Ausdrücke für  $u$  und  $v$

$$u = -\frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{1}{2}J_0 \delta P + \cos \frac{1}{2}J_0 \delta \delta K + \frac{\sin^2 \frac{1}{2}J_0}{4 \cos^3 \frac{1}{2}J_0} \delta P \delta Q$$

$$v = \cos \frac{1}{2}J_0 - \frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{1}{2}J_0 \delta Q - \frac{\delta P^2}{8 \cos^2 \frac{1}{2}J_0} - \frac{\delta Q^2}{8 \cos^4 \frac{1}{2}J_0}$$

und hiemit

$$U = \frac{\cos J_0}{\cos \frac{1}{2}J_0} \delta P + \sin J_0 \delta \delta K - \frac{\sin \frac{1}{2}J_0 - \frac{1}{2} \sin^2 \frac{1}{2}J_0}{\cos^2 \frac{1}{2}J_0} \delta P \delta Q$$

$$V = \frac{\cos J_0}{\cos \frac{1}{2}J_0} \delta Q + \frac{\sin \frac{1}{2}J_0 - 2 \sin^2 \frac{1}{2}J_0}{4 \cos^2 \frac{1}{2}J_0} \delta P^2 - \frac{3 \sin \frac{1}{2}J_0 - 2 \sin^2 \frac{1}{2}J_0}{4 \cos^2 \frac{1}{2}J_0} \delta Q^2$$

Substituirt man diese Ausdrücke in den Ausdruck für  $s$ , so ergibt sich

$$(51) \quad s = \frac{\cos J_0}{\cos \frac{1}{2}J_0} \delta Q \sin(\bar{f} + \omega) + \frac{\cos J_0}{\cos \frac{1}{2}J_0} \delta P \cos(\bar{f} + \omega)$$

$$+ \left\{ \frac{1}{4} \delta P^2 - \frac{1}{4} \delta Q^2 \right\} \sin \frac{1}{2}J_0 \sin(\bar{f} + \omega) - \left\{ \delta P \delta Q - 2 \delta \delta K \right\} \sin \frac{1}{2}J_0 \cos(\bar{f} + \omega)$$

wenn man in den Grössen zweiter Ordnung die mit  $\sin^3 \frac{1}{2}J_0$  multiplicirten, durchaus unmerklichen, Glieder weglässt.

136.

Bei der weiteren Entwicklung des eben abgeleiteten Ausdrucks für  $s$  kann man in den Gliedern zweiter Ordnung ohne Weiteres  $g$  statt  $\bar{f}$  substituiren, und ich werde sie daher in der folgenden Entwicklung nicht weiter beachten; nur darf nicht vergessen werden sie bei der numerischen Substitution hinzuzufügen, da sie eine Kleinigkeit geben.

Es ist nun bekanntlich

$$\frac{d \cdot r^2}{a^2 dg} = \frac{2re \sin f}{a \sqrt{1-e^2}}; \quad \frac{d \cdot r^2}{a^2 de} = -2 \frac{r}{a} \cos f$$

und wenn man nochmals differentiirt

$$\frac{d^2 \cdot r^2}{a^2 dg^2} = 2 \frac{e \cos f}{1-e^2} + \frac{2e^2}{1-e^2}; \quad \frac{d^2 \cdot r^2}{a^2 dedg} = 2 \frac{\sin f}{\sqrt{1-e^2}}$$

Setzt man daher

$$\begin{aligned} \frac{\cos J}{\cos \frac{1}{2}J} \cos \bar{f} &= 2 \sum_{-\infty}^{+\infty} A_c^{(i)} \cos inz \\ \frac{\cos J}{\cos \frac{1}{2}J} \sin \bar{f} &= 2 \sum_{-\infty}^{+\infty} A_s^{(i)} \sin inz \end{aligned}$$

und wie früher

$$\frac{r^2}{a^2} = \sum_{-\infty}^{+\infty} R_2^{(i)} \cos ig$$

so wird allgemein

$$\begin{aligned} A_c^{(i)} &= -\frac{1-e^2}{4e} i^2 R_2^{(i)} \frac{\cos J}{\cos \frac{1}{2}J} \\ A_s^{(i)} &= -\frac{\sqrt{1-e^2}}{4} i \frac{dR_2^{(i)}}{de} \frac{\cos J}{\cos \frac{1}{2}J} \end{aligned}$$

ausgenommen

$$A_c^{(0)} = -\frac{1}{2}e \frac{\cos J}{\cos \frac{1}{2}J}$$

Hieraus folgt

$$\begin{aligned} \frac{\cos J}{\cos \frac{1}{2}J} \sin(\bar{f} + \omega) &= 2 \sum_{-\infty}^{+\infty} A^{(p)} \sin(pnz + \omega) \\ \frac{\cos J}{\cos \frac{1}{2}J} \cos(\bar{f} + \omega) &= 2 \sum_{-\infty}^{+\infty} A^{(p)} \cos(pnz + \omega) \end{aligned}$$

wo

$$A^{(p)} = A_c^{(p)} + A_s^{(p)}$$

ist, und bezeichnet man ferner irgend zwei correspondirende Glieder von  $\delta P$  und  $\delta Q$  wie folgt,

$$\begin{aligned} \delta P &= \alpha \sin(ig + i'g' + i''\omega + i'''\omega') \\ \delta Q &= \beta \cos(ig + i'g' + i''\omega + i'''\omega') \end{aligned}$$

dann erhält man sogleich

$$\begin{aligned} s &= \sum_{-\infty}^{+\infty} A^{(p)} (\alpha + \beta) \sin(pnz + ig + i'g' + (i'' + 1)\omega + i'''\omega') \\ &+ \sum_{-\infty}^{+\infty} A^{(-p)} (\alpha - \beta) \sin(pnz + ig + i'g' + (i'' - 1)\omega + i'''\omega') \end{aligned}$$

Es ist aber

$$\begin{aligned} \sin(pnz + ig + i'g' + \text{etc.}) &= \sin\{(p+i)g + i'g' + \text{etc.}\} \\ &+ ndz \cdot p \cos\{(p+i)g + i'g' + \text{etc.}\} \\ &- \frac{1}{2}(ndz)^2 \cdot p^2 \sin\{(p+i)g + i'g' + \text{etc.}\} \\ &+ \text{etc.} \end{aligned}$$

Setzt man daher

$$s = S_0 + S_1 ndz + \frac{1}{2} S_2 (ndz)^2 + \dots$$

so giebt eine leichte Substitution

$$\begin{aligned} S_0 &= \sum_{-\infty}^{+\infty} A^{(p)} (\alpha + \beta) \sin \{(p+i)g + i'g' + (i''+1)\omega + i'''\omega'\} \\ &\quad + \sum_{-\infty}^{+\infty} A^{(-p)} (\alpha - \beta) \sin \{(p+i)g + i'g' + (i''-1)\omega + i'''\omega'\} \\ S_1 &= \sum_{-\infty}^{+\infty} p A^{(p)} (\alpha + \beta) \cos \{(p+i)g + i'g' + (i''+1)\omega + i'''\omega'\} \\ &\quad + \sum_{-\infty}^{+\infty} p A^{(-p)} (\alpha - \beta) \cos \{(p+i)g + i'g' + (i''-1)\omega + i'''\omega'\} \\ S_2 &= -\sum_{-\infty}^{+\infty} p^2 A^{(p)} (\alpha + \beta) \sin \{(p+i)g + i'g' + (i''+1)\omega + i'''\omega'\} \\ &\quad - \sum_{-\infty}^{+\infty} p^2 A^{(-p)} (\alpha - \beta) \sin \{(p+i)g + i'g' + (i''-1)\omega + i'''\omega'\} \end{aligned}$$

u. s. w., die mit dem betreffenden Ausdruck der »*Fundamenta etc.*« übereinstimmen, und deren Anwendung sehr leicht und einfach ist.

137.

Aus den bekannten Werthen der Coefficienten  $R_2^{(n)}$  giebt eine leichte Entwicklung

$$\left. \begin{aligned} A_c^{(0)} &= -\frac{1}{2} e \\ A_c^{(1)} &= \frac{1}{4} - \frac{9}{32} e^2 + \frac{7}{768} e^4 + \dots \\ A_c^{(2)} &= \frac{1}{4} e - \frac{1}{8} e^3 + \frac{3}{32} e^5 + \dots \\ A_c^{(3)} &= \frac{9}{32} e^2 - \frac{2}{128} e^4 + \dots \\ A_c^{(4)} &= \frac{1}{8} e^3 - \frac{3}{128} e^5 + \dots \\ A_c^{(5)} &= \frac{9}{128} e^4 + \dots \\ A_c^{(6)} &= \frac{8}{128} e^5 + \dots \end{aligned} \right\} \times \frac{\cos J}{\cos \frac{1}{2} J}$$
  

$$\left. \begin{aligned} A_s^{(1)} &= \frac{1}{4} - \frac{7}{32} e^2 + \frac{1}{768} e^4 + \dots \\ A_s^{(2)} &= \frac{1}{4} e - \frac{7}{128} e^3 + \frac{1}{128} e^5 + \dots \\ A_s^{(3)} &= \frac{9}{32} e^2 - \frac{2}{128} e^4 + \dots \\ A_s^{(4)} &= \frac{1}{8} e^3 - \frac{1}{128} e^5 + \dots \\ A_s^{(5)} &= \frac{9}{128} e^4 + \dots \\ A_s^{(6)} &= \frac{8}{128} e^5 + \dots \end{aligned} \right\} \times \frac{\cos J}{\cos \frac{1}{2} J}$$

und hieraus folgt

$$\left. \begin{aligned} A^{(-4)} &= -\frac{1}{32} e^3 + \dots \\ A^{(-3)} &= -\frac{9}{128} e^4 + \dots \\ A^{(-2)} &= -\frac{7}{128} e^3 + \frac{1}{128} e^5 + \dots \\ A^{(-1)} &= -\frac{1}{128} e^2 + \frac{1}{128} e^4 + \dots \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{array}{l}
 A^{(0)} = -\frac{1}{2}e \\
 A^{(1)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{12}e^3 + \dots \\
 A^{(2)} = \frac{1}{2}e - \frac{1}{8}e^3 + \frac{1}{6}e^4 + \dots \\
 A^{(3)} = \frac{1}{16}e^2 - \frac{1}{3}e^4 + \dots \\
 A^{(4)} = \frac{1}{3}e^3 - \frac{1}{6}e^5 + \dots \\
 A^{(5)} = \frac{1}{72}e^4 + \dots \\
 A^{(6)} = \frac{1}{6}e^5 + \dots
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{l} A^{(0)} \\ A^{(1)} \\ A^{(2)} \\ A^{(3)} \\ A^{(4)} \\ A^{(5)} \\ A^{(6)} \end{array}} \right\} \times \frac{\cos J}{\cos \frac{1}{2}J}$$

138.

Wenden wir uns jetzt zur Entwicklung der Störungen der Reduction der Länge auf die Ecliptik, wobei von der Gleichung (50) ausgegangen werden soll, so können wir wieder die Glieder dritter Ordnung übergehen, und demzufolge

$$k = 2 \cos^2 J_0$$

setzen. Wir dürfen ferner den Nenner des letzten Gliedes in (50) = 1 setzen, denn das grösste Glied, welches daraus entstehen kann, ist mit  $s^2 \sin^2 J_0$  multiplicirt, und ganz unmerklich. Wir erhalten daher zuerst

$$L = \mu + II + p - s \frac{\operatorname{tg} J_0 \cos(\bar{f} + \omega)}{\cos^2 B_0} - \frac{sV}{2 \cos^2 J_0} \cos(\bar{f} + \omega) + \frac{sU}{2 \cos J_0} \sin(\bar{f} + \omega)$$

oder wenn wir in die beiden letzten Glieder die Ausdrücke des Art. 135 für  $U, V, s$  substituiren und die Excentricität übergehen,

$$L = \mu + II + p - s \frac{\operatorname{tg} J_0 \cos(\bar{f} + \omega)}{\cos^2 B_0} + \frac{1}{4}(\delta P^2 - \delta Q^2) \sin 2(g + \omega) - \frac{1}{4} \delta P \delta Q \cos 2(g + \omega)$$

Der vorletzten Gleichung (44) kann, nachdem der strenge Werth von  $k$  darin substituirt worden ist, die folgende Form gegeben werden,

$$\sin(II + \theta + \delta N - \delta K) = \frac{1}{\cos J_0} \frac{\sin(\delta N + \delta K)}{1 + V \frac{\operatorname{tg} J_0}{\cos J_0 + \cos J}}$$

woraus durch eine sehr einfache Entwicklung

$$II = -\theta + \frac{2 \sin^2 \frac{1}{2} J_0}{\cos J_0} \delta N + \frac{2 \cos^2 \frac{1}{2} J_0}{\cos J_0} \delta K + \frac{V \sin J_0}{2 \cos^2 J_0} (\delta N + \delta K)$$

folgt. Da aber

$$\operatorname{tg} \delta N = \frac{p}{q}$$

ist, so wird

$$\delta N = \frac{\delta p}{2 \sin \frac{1}{2} J_0} - \frac{\delta p \delta q}{4 \sin^2 \frac{1}{2} J_0}$$

substituirt man diesen Ausdruck sowohl wie die obigen Ausdrücke für  $V$  und  $\delta K$ , so bekommt man

$$II = -\theta + \frac{\sin \frac{1}{2}J}{2 \cos \frac{1}{2}J} \delta P \delta Q + \frac{2 \cos \frac{1}{2}J}{\cos J} \delta \delta K$$

wo das mit  $\delta P \delta Q$  multiplicirte Glied völlig unmerklich ist, weil es auch mit  $\sin \frac{1}{2}J$  multiplicirt ist. Setzt man nun

$$\mu = \bar{f} + \omega + R$$

und erwägt, dass

$$\begin{aligned} \omega &= n(y + \alpha - \eta) t + N_0 + K_0 \\ \theta &= n(\alpha + y) t + N_0 - K_0 - \pi' \\ 2 K_0 &= \pi - \pi' \end{aligned}$$

so bekommt man

$$(52) \quad L = \bar{f} + II_0 + p + R - s \frac{\operatorname{tg} J_0 \cos(\bar{f} + \omega)}{1 - \sin^2 J_0 \sin^2(\bar{f} + \omega)} \\ + \frac{1}{4}(\delta P^2 - \delta Q^2) \sin 2(g + \omega) - \frac{1}{2} \delta P \delta Q \cos 2(g + \omega) + \frac{2 \cos \frac{1}{2}J_0}{\cos J_0} \delta \delta K$$

wo

$$\begin{aligned} II_0 &= n(y - 2\eta) t + \pi \\ \operatorname{tg} R &= - \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}J_0 \sin 2(\bar{f} + \omega)}{1 + \operatorname{tg} \frac{1}{2}J_0 \cos 2(\bar{f} + \omega)} \end{aligned}$$

ist, also  $II_0$  die mittlere siderische Länge des Mondperigäums bedeutet, und  $R$  die gewöhnliche Reduction auf die Ecliptik ist.

439.

Indem ich zur numerischen Berechnung übergehe, werde ich zuerst die Glieder zweiter Ordnung des Ausdrucks (51) von  $s$  in Zahlen verwandeln. Es werden hiezu nur die grössten Coefficienten in  $\delta P$  und  $\delta Q$  gebraucht, da die übrigen nur Unmerkliches geben können. Somit wird

$$\begin{aligned} \sin \frac{1}{2}J \delta P^2 &= + 0''.026 - 0''.026 \cos(4g' + 4\omega') \\ \sin \frac{1}{2}J \delta Q^2 &= + 0.026 + 0.026 \cos(4g' + 4\omega') \\ \sin \frac{1}{2}J \delta P \delta Q &= - 0.026 \sin(4g' + 4\omega') \\ \sin \frac{1}{2}J \delta \delta K &= - 0.028 \sin(2g' + 2\omega') \end{aligned}$$

woraus

$$\begin{aligned} \{ \frac{1}{4} \delta P^2 - \frac{1}{4} \delta Q^2 \} \sin \frac{1}{2}J \sin(g + \omega) - \{ \delta P \delta Q - 2 \delta \delta K \} \sin \frac{1}{2}J \cos(g + \omega) \\ = - 0''.013 \sin(g + \omega) \\ + 0.028 \sin(g - 2g' + \omega - 2\omega') \\ - 0.028 \sin(g + 2g' + \omega + 2\omega') \\ - 0.026 \sin(g - 4g' + \omega - 4\omega') \end{aligned}$$

folgt.



140.

Die numerischen Werthe der im Art. 137 gegebenen Functionen sind

- $\log A^{(-3)} = 3.503 n$
- »  $A^{(-3)} = 4.837 n$
- »  $A^{(-1)} = 6.2735 n$
- »  $A^{(0)} = 8.43723 n$
- »  $A^{(1)} = 9.6963433$
- »  $A^{(2)} = 8.435595$
- »  $A^{(3)} = 7.22599$
- »  $A^{(4)} = 6.0390$
- »  $A^{(5)} = 4.868$
- »  $A^{(6)} = 3.702$

woraus sich in Verbindung mit den Werthen von  $\delta P$  und  $\delta Q$  des Art. 109 durch die Ausdrücke des Art. 136 die Werthe von  $S_0, S_1, S_2$  ergeben. Die folgende Tafel giebt um Wiederholung zu vermeiden nur die Coefficienten von  $S_1$  und  $S_2$ , die von  $S_0$  folgen unten.

$g, g'$	$S_1$ cos	$S_2$ sin
$\frac{\omega}{1,2}$	+0,339	
-1,1	+0.206	
0,1	+0.024	
1,1	+25.290	-23,69
2,1	+2.635	-5.27
3,1	+0.240	
-3,0	+0.249	
-2,0	+2.735	+5.39
-1,0	+24.893	+23.94
0,0	-2.443	-14.24
1,0	+72.464	+4.02
2,0	+1.308	-2.45
3,0	-0.040	
-1,-1	-0.204	
0,-1	-0.054	
1,-1	-22.949	+24.97
2,-1	-2.706	+5.48
3,-1	-0.257	
1,-2	-0.254	

$\omega - 2\omega'$		
1,0	-0.135	
0,-1	-0.062	
1,-1	-9.303	+10.35
2,-1	-1.127	+2.26
3,-1	-0.107	
-2,-2	+0.652	+1.39
-1,-2	+6.176	+7.11
0,-2	+5.078	+11.95
1,-2	+441.491	-521.08
2,-2	+56.064	-111.78
3,-2	+5.361	-15.78
4,-2	+0.475	-1.85
-1,-3	+0.263	
0,-3	+0.372	
1,-3	+16.614	-16.62
2,-3	+2.339	-4.66
3,-3	+0.230	
1,-4	+0.471	
2,-4	+0.079	
$\omega + 2\omega'$		
0,2	-0.057	
1,2	+0.913	
2,2	+0.089	
$3\omega$		
1,0	-0.137	
$3\omega - 2\omega'$		
2,-2	-0.284	
3,-2	-0.547	
4,-2	-0.063	
1,-4	+0.377	
2,-4	+0.422	
3,-4	+0.616	
4,-4	+0.067	
$-\omega'$		
-1,0	+0.080	
-2,-1	-0.083	
-1,-1	-0.784	
0,-1	-0.063	
1,-1	-0.497	
2,-1	-0.055	
$2\omega - \omega'$		
1,-1	+0.550	
2,-1	+0.384	
$2\omega - 3\omega'$		
1,-3	-0.162	
2,-3	-0.410	

141.

Nach der Multiplication von  $S_1$  mit  $n\delta z$ , und  $S_2$  mit  $\frac{1}{2}(n\delta z)^2$  ergibt sich die folgende Zusammenstellung:

$g, g'$	$S_0$ sin	$S_1 n\delta z$ sin	$\frac{1}{2}S_2 (n\delta z)^2$ sin	2. Ordn. sin	$\xi$ sin	Diff.
$\omega$						
0,2	-0,040	-0,006			-0,046	+7
1,2	+0.303	-0.041			+0.262	+1
2,2	+0.047	-0.008			+0.009	-2
-2,1	-0.044	-0.009			-0.020	+6
-1,1	-0.220	-0.046	+0,003		-0.233	-17
0,1	-0.721	+0.138	+0.040		-0.573	+8
1,1	+23.629	-0.053	+0.002		+23.578	+5
2,1	+1.289	-0.009	-0.004		+1.279	-1
3,1	+0.079	+0.004			+0.080	-2
4,1	+0.005				+0.005	0
-4,0	-0.006				-0.006	+1
-3,0	-0.084	+0.004			-0.080	+1
-2,0	-1.382	+0.052	+0.002		-1.328	-1
-1,0	-25.380	+0.590	+0.003		-24.787	+7
0,0	+16.845	+5.104		-0,013	+21.949	-20
1,0	-2.350	+2.363			0	0
2,0	-1.382	+0.166			-1.216	-13
3,0	-0.097	+0.042			-0.055	+10
4,0	-0.007	+0.004			-0.003	+3
-2,-1	+0.044	+0.010			+0.024	0
-1,-1	+0.193	+0.056	-0.003		+0.246	-4
0,-1	+1.699	+0.163	-0.009		+1.853	-22
1,-1	-24.996	+0.235	-0.002		-24.763	-7
2,-1	-1.429	+0.032	+0.004		-1.396	+4
3,-1	-0.085	+0.002			-0.083	-2
4,-1	-0.005				-0.005	0
0,-2	+0.019	-0.002			+0.017	+4
1,-2	-0.303	-0.033			-0.336	+5
2,-2	-0.046	-0.040			-0.026	-2
$\omega - 2\omega'$						
0,0	+0.007				+0.007	+4
1,0	-0.135	+0.007			-0.128	-8
2,0	-0.007	+0.002			-0.005	+2
-1,-1	-0.023	-0.039			-0.062	-5
0,-1	+0.563	-0.397	-0.002		+0.164	-3
1,-1	-10.343	-0.839	-0.004		-11.183	-6
2,-1	-0.644	-0.176	-0.002		-0.789	+5
3,-1	-0.036	-0.022			-0.058	+2

$\omega - 2\omega'$						
-3,-2	-0.019				-0.019	-1
-2,-2	-0.303				-0.303	-1
-1,-2	-5.494	+0.004			-5.490	+19
0,-2	-44.805	+0.761	-0.018		-44.062	+37
1,-2	+522.336	+0.302	-0.082	+0.028	+522.584	+45
2,-2	+30.376	+0.248	-0.036		+30.588	0
3,-2	+1.883	+0.153	-0.009		+2.027	+2
4,-2	+0.120	+0.020			+0.140	-2
5,-2	+0.008	+0.001			+0.009	0
$\omega - 3\omega'$						
-2,-3	-0.012	+0.005			-0.007	-6
-1,-3	-0.211	+0.040			-0.171	-3
0,-3	-2.188	+0.411	-0.002		-1.779	+3
1,-3	+21.910	+0.868	-0.005		+22.773	-3
2,-3	+1.350	+0.229	-0.005		+1.574	+2
3,-3	+0.076	+0.036			+0.112	+5
$\omega - 4\omega'$						
0,-4	-0.076	+0.022			-0.054	-9
1,-4	+0.708	+0.048			+0.756	+4
2,-4	+0.040	+0.012			+0.052	+1
$\omega + 2\omega'$						
0,3	0.000	-0.002			-0.002	-3
1,3	+0.033	-0.007			+0.026	+31
2,3	-0.001				-0.001	+4
$\omega + 3\omega'$						
-1,2	+0.013	-0.010			+0.003	-
0,2	-0.099	-0.087			-0.186	-3
1,2	+0.806	-0.010		-0.028	+0.768	+29
2,2	+0.045	-0.002			+0.043	+3
1,1	-0.014	+0.006			-0.008	-11
$\omega - 4\omega'$						
0,-4	-0.002	+0.006			+0.004	-
1,-4	-0.008	+0.088		-0.026	+0.054	-11
1,-5	0.000	-0.003			-0.003	-5
$3\omega$						
0,0	+0.008	-0.005			+0.003	-2
1,0	-0.136	-0.001			-0.137	+8
2,0	+0.008	-0.006			+0.002	+3
$3\omega - 2\omega'$						
0,-1	+0.003				+0.003	-2
1,-1	-0.051	-0.001			-0.052	-2
2,-1	-0.015	+0.271			+0.256	-1
3,-1	-0.008	+0.158			+0.150	-1
4,-1	0.000	+0.017			+0.017	-
-1,-2	+0.001	+0.028			+0.029	-2
0,-2	-0.009	+0.288	-0.006		+0.273	-9
1,-2	+0.131	+0.141	-0.036		+0.236	-8
2,-2	-0.998	+0.733	-0.031		-0.296	+27
3,-2	-0.491	+0.403	-0.008		-0.096	+20
4,-2	-0.033	+0.018			-0.015	+1
5,-2	-0.002				-0.002	-

BERECHNUNG DER IN DEN MONDTAFELN ANGEWANDTEN STÖRUNGEN. 437

<b><math>3\omega - 2\omega'</math></b>						
0,-3	0,000	+0,010			+0,010	—
1,-3	0.000	+0.013	-0,003		+0.010	-5
2,-3	-0.068	-0.215	-0.003		-0.286	-2
3,-3	-0.047	-0.120	-0.004		-0.168	+1
4,-3	-0.003	-0.019			-0.022	+5
2,-4		-0.014			-0.014	—
3,-4		-0.011			-0.011	—
<b><math>3\omega - 4\omega'</math></b>						
1,-3		+0.002			+0.002	+4
2,-3		-0.134	-0.009		-0.143	0
3,-3		-0.091	-0.007		-0.098	+2
4,-3		-0.012			-0.012	+2
0,-4	-0.022	+0.067			+0.045	-2
1,-4	+0.357	+0.047			+0.404	+17
2,-4	+1.156	+4.803	-0.002		+5.957	+4
3,-4	+0.550	+2.902	-0.001		+3.454	+3
4,-4	+0.032	+0.416			+0.448	0
5,-4	+0.002	+0.045			+0.047	-1
1,-5	+0.003	+0.008			+0.011	0
2,-5	+0.042	+0.400	+0.008		+0.450	-2
3,-5	+0.065	+0.306	+0.008		+0.379	-12
4,-5	+0.004	+0.046			+0.050	-4
2,-6		+0.021			+0.021	—
3,-6		+0.019			+0.019	—
<b><math>5\omega - 6\omega'</math></b>						
2,-6		+0.005			+0.005	—
3,-6		+0.039	+0.029		+0.068	-5
4,-6		+0.051	+0.035		+0.086	-8
5,-6		+0.020	+0.015		+0.035	-4
6,-6		+0.002			+0.002	—
<b><math>-\omega'</math></b>						
-1,0	-0.080				-0.080	-10
0,0	+0.004	+0.011			+0.015	-3
1,0	+0.003	+0.001			+0.004	+12
-2,-1	+0.041				+0.041	+1
-1,-1	+0.745	+0.006			+0.754	+10
0,-1	+0.699	+0.122			+0.821	-20
1,-1	-0.536	+0.036			-0.500	-22
2,-1	-0.028	-0.002			-0.030	-6
-1,-2	+0.019				+0.019	-5
0,-2	+0.016	-0.021			-0.005	-7
1,-2	-0.006	-0.002			-0.008	—
<b><math>2\omega - \omega'</math></b>						
0,0	+0.004				+0.004	0
1,0	-0.067	-0.002			-0.069	-3
2,0	-0.004	-0.005			-0.009	0

$2\omega - \omega'$						
0, -1	-0,030	-0,013			-0,043	+5 *)
1, -1	+0.586	-0.009			+0.577	+29
2, -1	+0.215	-0.029			+0.186	+37
3, -1	+0.014	-0.005			+0.009	+8
1, -2	+0.007	+0.002			+0.009	+4
2, -2	+0.017	+0.009			+0.026	-4
$2\omega - 3\omega'$						
2, -2		+0.020			+0.020	+2
0, -3	+0.009	-0.011			-0.002	+9
1, -3	-0.205	-0.019			-0.224	-9
2, -3	-0.254	-0.137			-0.391	-1
3, -3	-0.023	-0.022			-0.045	+7

Die letzte Columne dieser Tafel giebt die Unterschiede der nebenstehenden Breitenstörungen von den in den Mondtafeln angewandten, wie man sieht erreicht keiner derselben 0,05.

In Bezug auf die Vergleichung der zu den Argumenten 0,0; 1,0; 2,0 der Abtheilung  $\omega$  gehörigen Coefficienten mit denen der Mondtafel ist zu bemerken, dass dort das Glied  $+2,705 \sin(g + \omega)$  enthalten ist, während hier die Constante des Ausdrucks von  $\delta Q$  so bestimmt worden ist, dass der Coefficient von  $\sin(g + \omega)$  in  $s$  gleich Null wird; welches der Strenge nach statt finden muss. Um die Vergleichung anzustellen, ist zu bemerken, dass mit hier ausreichender Genauigkeit

$$\sin(\bar{f} + \omega) = -e \sin \omega + \sin(g + \omega) + e \sin(2g + \omega)$$

also

$+2,705 \sin(\bar{f} + \omega) = -0,149 \sin \omega + 2,705 \sin(g + \omega) + 0,149 \sin(2g + \omega)$   
ist, die Glieder rechter Hand dieser Gleichung mussten Behufs der Vergleichung entweder dem vorstehenden Werth von  $s$  hinzuaddirt, oder von dem der Mondtafel abgezogen werden.

142.

Setzen wir

$$L = \bar{f} + II_0 + p + R + R'$$

\*) In den Mondtafeln pag. 14 steht durch Schreib- oder Druckfehler  $+0,038 \sin(-g' + 2\omega - \omega')$ , aber in den Tafeln selbst ist  $-0,038$  angewandt, wie pag. 43 Tafel XIX nachweist, welches richtig ist.

so wird zufolge der Gleichung (52)

$$R' = \frac{1}{4}(\delta P^2 - \delta Q^2) \sin 2(g + \omega) - \frac{1}{4}\delta P \delta Q \cos 2(g + \omega) + \frac{2 \cos^2 \frac{1}{2}J}{\cos J} \delta \delta K \\ - s \frac{\operatorname{tg} J_0 \cos(\bar{f} + \omega)}{1 - \sin^2 J_0 \sin^2(\bar{f} + \omega)}$$

Nehmen wir blos auf die Evection Rücksicht, so geben die Ausdrücke von  $\delta P$  und  $\delta Q$

$$\delta P^2 = + 0,568 - 0,568 \cos(4g' + 4\omega') \\ \delta Q^2 = + 0,572 + 0,572 \cos(4g' + 4\omega') \\ \delta P \delta Q = - 0,570 \sin(4g' + 4\omega')$$

und nehmen wir von dem Ausdruck von  $\delta \delta K$  des Art. 110 nur die beiden grössten Glieder auf, so ergibt sich

$$R' = - 0,397 \sin 2\omega \\ - 1,198 \sin(2g' + 2\omega') \\ - 0,285 \sin(2g - 4g' + 2\omega - 4\omega')^* \\ - s \frac{\operatorname{tg} J_0 \cos(\bar{f} + \omega)}{1 - \sin^2 J_0 \sin^2(\bar{f} + \omega)}$$

Die übrigen in den Mondtafeln in  $R'$  angegebenen Glieder gehören den Nutationen an, die hier unter dem Zeichen  $p$  im Ausdruck für  $L$  enthalten sind.

### § 10. Vergleichung der hier berechneten Längenstörungen des Mondes mit denen von Plana und Damoiseau.

143.

Aendert man in den von Plana in seiner *Théorie de mouv. de la Lune* und Damoiseau in seinen Mondtafeln angegebenen numerischen Ausdrücken der wahren Länge des Mondes auf der Ecliptik die Bezeichnungen und die Reihenfolge der Argumente in die hier gewählten ab, so ergibt sich die folgende Zusammenstellung der von den beiden genannten Astronomen erhaltenen Ausdrücke.

---

\*) Der Coefficient dieses Gliedes hat in den Mondtafeln durch Schreibfehler das entgegengesetzte Zeichen bekommen. In meinen alten Papieren steht das richtige Zeichen.

$g, g'$	<i>Plana</i> sin	<i>Damoiseau</i> sin	$P - D$
<u>4.</u>			
4,0	+22644,63	+22639,70	—
2,0	+769.48	+768.80	+0,68
3,0	+36.72	+36.40	+0.62
4,0	+2.00	+2.10	-0.10
5,0	+0.12	+0.10	+0.02
-3,-1	+0.37	+0.39	-0.02
-2,-1	+7.34	+7.60	-0.26
-1,-1	+114.10	+109.40	+4.70
0,-1	+668.64	+673.00	-4.36
1,-1	+148.06	+148.00	+0.06
2,-1	+9.64	+9.80	-0.16
3,-1	+0.37	+0.50	-0.13
-2,-2	+0.07		+0.07
-1,-2	+1.17	+1.20	-0.03
0,-2	+7.87	+7.20	+0.67
1,-2	+2.13	+2.50	-0.37
2,-2	+0.07		+0.07
-1,-3	+0.02		+0.02
0,-3	+0.16		+0.16
1,-3	+0.02		+0.02
<u>2.</u>			
0,0	-0.19		-0.19
1,0	-2.04	-2.60	+0.59
2,0	-0.07	-0.33	+0.26
-1,-1	-0.14		-0.14
0,-1	-1.40	+0.70	-2.10
1,-1	-28.81	-29.00	+0.19
2,-1	-23.61	-24.60	+0.99
3,-1	-2.88	-3.00	+0.12
4,-1	-0.09	-0.19	+0.10
-2,-2	+0.87	+0.90	-0.03
-1,-2	+12.81	+13.00	-0.19
0,-2	+242.36	+244.90	+0.46
1,-2	+4585.65	+4588.20	-2.55
2,-2	+2370.32	+2369.70	+0.62
3,-2	+192.15	+192.20	-0.05
4,-2	+14.12	+14.10	+0.02
5,-2	+3.31	+1.00	+2.31
-1,-3	+0.33	+0.40	-0.07
0,-3	+7.76	+7.10	+1.34
1,-3	+209.74	+206.70	+3.04
2,-3	+165.85	+165.50	+0.35
3,-3	+14.04	+14.60	-0.56
4,-3	+0.61	+1.00	-0.39



BERECHNUNG DER IN DEN MONDTAFELN ANGEWANDTEN STÖRUNGEN. 441

<u>2.</u>			
0,-4	+0.16	+0.11	+0.05
1,-4	+7.53	+7.50	+0.03
2,-4	+7.81	+8.00	-0.19
3,-4	+0.32	+0.60	-0.28
1,-5	+0.11		+0.11
2,-5	+0.13		+0.13
<u>11.</u>			
2,-3	-0.54	-0.40	-0.14
3,-3	-0.92	-0.50	-0.42
4,-3	-0.20		-0.20
1,-4	+0.50	+1.40	-0.90
2,-4	+34.52	+34.00	+3.52
3,-4	+38.00	+38.50	-0.50
4,-4	+14.41	+14.20	+0.21
5,-4	+0.86	+1.90	-1.04
6,-4		+0.40	-0.40
2,-5	+1.20	+3.00	-1.80
3,-5	+3.84	+3.20	+0.64
4,-5	+1.21	+0.90	+0.31
<u>15.</u>			
4,-6		+0.50	-0.50
<u>3.</u>			
2,2	+0.01		+0.01
1,1	-0.16		-0.16
2,1	+0.59		+0.59
3,1	+0.20		+0.20
-1,0	+0.05		+0.05
0,0	+1.08	+1.30	-0.22
1,0	-37.19	-39.40	+2.21
2,0	-411.04	-414.80	+0.76
3,0	-45.20	-45.20	0.00
4,0	-4.09	-4.10	+0.01
5,0	-0.34		-0.34
1,-1	+0.16		+0.16
2,-1	-0.13		-0.13
3,-1	-0.20		-0.20
2,-2	-0.04		-0.04
<u>4.</u>			
0,4	-0.09		-0.09
-1,3	+0.28		+0.28
0,3	-2.33	-2.90	+0.57
1,3	-0.10		-0.10
-2,2	+0.53	+0.50	+0.03
-1,2	+6.15	+6.40	-0.25
0,2	-54.92	-56.50	+1.58
1,2	-0.03	-0.80	+0.77
2,2	+0.18	+0.50	-0.32

<u>4.</u>			
-1,1	-0.12		-0.12
0,1	+1.48	+1.40	+0.08
1,1	+0.04		+0.04
0,0	+0.02		+0.02
<u>5.</u>			
2,2	+0.10		+0.10
<u>12.</u>			
3,-1	+0.19		+0.19
4,-1	+0.03		+0.03
1,-2		+0.40	-0.40
2,-2	-0.94	-0.60	-0.34
3,-2	-9.38	-9.60	+0.22
4,-2	-8.38	-5.60	+2.22
5,-2	-0.63	-1.00	+0.37
3,-3	-0.25		-0.25
4,-3	-0.19	-0.17	-0.02
<u>13.</u>			
2,-3	+0.01		+0.01
1,-4	+0.40	+0.60	-0.20
2,-4	+0.05	-0.60	+0.65
3,-4	-0.04		-0.04
2,-5	-0.03		-0.03
<u>18.</u>			
3,0	+0.14		+0.14
4,0	+0.42	+0.40	+0.02
5,0	+0.09		+0.09
<u>6.</u>			
1,1	-0.04		-0.04
-1,0	+0.17		+0.17
0,0	+0.47	+2.00	-1.53
1,0	+17.22	+17.60	-0.38
2,0	+0.99	+1.20	-0.21
3,0	+0.12		+0.12
-1,-1	-0.80	-1.20	+0.40
0,-1	-18.05	-17.50	-0.55
1,-1	-122.11	-122.10	-0.01
2,-1	-8.24	-8.50	+0.26
3,-1	-0.36	-0.50	+0.14
0,-2	-0.03	-0.40	+0.37
1,-2	-0.38	-0.50	+0.12
2,-2	+0.08		+0.08
1,-3	+0.08		+0.08
<u>7.</u>			
2,-2	+0.19		+0.19
3,-2	+0.01		+0.01

7.			
1,-3	-0,64		-0,64
2,-3	-2,95	-3,00	+0,05
3,-3	+0,89	+0,40	+0,49
4,-3	+0,14		+0,14
3,-4	+0,04		+0,04
8.			
4,4	+0,74		+0,74
4,0	-0,02		-0,02
9.			
3,0	-0,05		-0,05
3,-1	+0,15		+0,15
10.			
4,-3	-0,25		-0,25

Das Resultat dieser Vergleichung lässt Manches zu wünschen übrig. Es kommen eine Anzahl von Unterschieden vor, die Secunden betragen, z. B. 4,4 bei der jährlichen Ungleichheit, 2,6 bei der Evection, 2,1 bei den kleinen Coefficienten von 0,-1 in 2., 3,0 bei 4,-3 in 2., 3,5 bei 2,-4 in 11., 2,2 bei 4,0 in 3., u. s. w., der Unterschiede, die Zehntel Secunden betragen, nicht zu gedenken.

444.

Um die vorstehenden Ausdrücke mit den hier berechneten Längenstörungen vergleichen zu können, muss von denselben zuerst die Reduction der Länge auf die Ecliptik abgezogen werden, wodurch die wahre Länge in der Bahn erhalten wird. Hierzu werde ich mich der Reihe des Art. 134 bedienen, von welcher, da hier die Tausendtheile von Secunden übergangen werden sollen, nur einige wenige Glieder in Betracht kommen. Bezeichnet man die mit umgekehrten Zeichen genommene Reduction auf die Ecliptik mit  $V$ , so enthält der Ausdruck

$$V = -II + \operatorname{tg} \frac{1}{2} J \sin 2(\bar{f} + \omega) - \frac{1}{4} \operatorname{tg} \frac{1}{4} J \sin 4(\bar{f} + \omega) + \frac{sA}{\cos \frac{1}{2} J} \cos(\bar{f} + \omega + w) - \frac{sA \operatorname{tg} \frac{1}{4} J}{\cos \frac{1}{4} J} \cos(3\bar{f} + 3\omega + w)$$

alle Glieder, die hier in Betracht kommen. Da mit ausreichender Genauigkeit

$$A \sin w = \frac{U}{2 \cos \frac{1}{2} J}$$

$$A \cos w = \operatorname{tg} J + \frac{V}{2 \cos \frac{1}{2} J}$$

ist, so geht der vorstehende Ausdruck in den folgenden über,

$$\begin{aligned}
 V = & -II + \operatorname{tg} \frac{1}{2} J \sin 2(\bar{f} + \omega) - \frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{1}{4} J \sin 4(\bar{f} + \omega) \\
 & + \frac{s \operatorname{tg} J}{\cos \frac{1}{2} J} \cos(\bar{f} + \omega) - \frac{sA \operatorname{tg} J \operatorname{tg} \frac{1}{2} J}{\cos \frac{1}{4} J} \cos 3(\bar{f} + \omega) \\
 & + \frac{sV}{2 \cos \frac{1}{2} J \cos \frac{1}{4} J} \cos(\bar{f} + \omega) - \frac{sU}{2 \cos \frac{1}{2} J \cos \frac{1}{4} J} \sin(\bar{f} + \omega)
 \end{aligned}$$

Setzt man nun

$$\sin 2(\bar{f} + \omega) = \sum_{-\infty}^{+\infty} B^{(p)} \sin(pnz + 2\omega)$$

so findet man leicht mit hier ausreichender Genauigkeit

$$\begin{aligned}
 B^{(-1)} &= \frac{1}{4} e^3 \\
 B^{(0)} &= \frac{1}{2} e^2 \\
 B^{(1)} &= -2e + \frac{1}{4} e^3 \\
 B^{(2)} &= 1 - \frac{1}{2} e^2 \\
 B^{(3)} &= 2e - \frac{1}{4} e^3 \\
 B^{(4)} &= \frac{1}{4} e^2 \\
 B^{(5)} &= \frac{1}{4} e^3
 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
 \sin 2(\bar{f} + \omega) &= \sum_{-\infty}^{+\infty} B^{(p)} \sin(pg + 2\omega) \\
 &+ ndz \sum_{-\infty}^{+\infty} pB^{(p)} \cos(pg + 2\omega) \\
 &- \frac{1}{2} (ndz)^2 \sum_{-\infty}^{+\infty} p^2 B^{(p)} \sin(pg + 2\omega)
 \end{aligned}$$

Hinreichend genau wird

$$\sin 4(\bar{f} + \omega) = -4e \sin(3g + 4\omega) + \sin(4g + 4\omega) + 4e \sin(5g + 4\omega)$$

Aus den Entwicklungen des Art. 136 können wir sogleich

$$\cos(\bar{f} + \omega) = 2 \sum_{-\infty}^{+\infty} A^{(p)} \cos(pg + \omega) - 2ndz \sum pA^{(p)} \sin(pg + \omega)$$

entnehmen, mit Benutzung der Ausdrücke für  $U$ ,  $V$  und  $s$  des Art. 135 ergibt sich ausreichend genau

$$\begin{aligned}
 sV \cos(\bar{f} + \omega) - sU \sin(\bar{f} + \omega) = \\
 \frac{\cos \frac{1}{2} J}{s \cos \frac{1}{4} J} (\delta Q^2 - \delta P^2) \sin 2(g + \omega) + \frac{\cos \frac{1}{2} J}{\cos \frac{1}{4} J} \delta P \delta Q \cos 2(g + \omega)
 \end{aligned}$$

und aus dem Art. 138 mit Beiseitesetzung von  $\theta$ , welcher Bogen hier nicht in Betracht kommt,

$$II = 2\delta\delta K$$

Es wird daher schliesslich

$$\begin{aligned}
 V = & (1) + (2) ndz + \frac{1}{2} (3) (ndz)^2 + (4) \\
 & + (5) + (6) ndz + (7)
 \end{aligned}$$

wo zur Abkürzung

$$\begin{aligned}
 (1) &= \operatorname{tg}^2 \frac{1}{4} J \sum_{-\infty}^{+\infty} B(p) \sin (pg + 2\omega) \\
 (2) &= \operatorname{tg}^2 \frac{1}{4} J \sum_{-\infty}^{+\infty} p B(p) \cos (pg + 2\omega) \\
 (3) &= -\operatorname{tg}^2 \frac{1}{4} J \sum_{-\infty}^{+\infty} p^2 B(p) \sin (pg + 2\omega) \\
 (4) &= -4e \operatorname{tg}^4 \frac{1}{4} J \sin (3g + 4\omega) + \operatorname{tg}^4 \frac{1}{4} J \sin (4g + 4\omega) + 4e \operatorname{tg}^4 \frac{1}{4} J \sin (5g + 4\omega) \\
 (5) &= 2 \frac{s \operatorname{tg} J}{\cos^2 \frac{1}{4} J} \sum_{-\infty}^{+\infty} A(p) \cos (pg + \omega) \\
 (6) &= -2 \frac{s \operatorname{tg} J}{\cos^2 \frac{1}{4} J} \sum_{-\infty}^{+\infty} p A(p) \sin (pg + \omega) \\
 (7) &= -2s \operatorname{tg}^3 \frac{1}{4} J \cos (3g + 3\omega) \\
 &\quad + \frac{1}{4} (\delta Q^2 - \delta P^2) \sin (2g + 2\omega) + \frac{1}{4} \delta P \delta Q \cos (2g + 2\omega) - 2 \delta \delta K
 \end{aligned}$$

gesetzt worden ist.

445.

Die numerischen Werthe der  $B$  Coefficienten habe ich wie folgt gefunden,

$$\begin{aligned}
 \log B^{(-1)} &= 5.140 \\
 \text{» } B^{(0)} &= 7.354 \\
 \text{» } B^{(1)} &= 9.0394 n \\
 \text{» } B^{(2)} &= 9.99335 \\
 \text{» } B^{(3)} &= 9.0361 \\
 \text{» } B^{(4)} &= 7.9909 \\
 \text{» } B^{(5)} &= 6.911
 \end{aligned}$$

und hiemit

$$\begin{aligned}
 (1) &= +0.04 \sin (-g + 2\omega) \\
 &\quad + 0.94 \sin ( \quad 2\omega) \\
 &\quad - 45.62 \sin (g + 2\omega) \\
 &\quad + 410.34 \sin (2g + 2\omega) \\
 &\quad + 45.28 \sin (3g + 2\omega) \\
 &\quad + 4.08 \sin (4g + 2\omega) \\
 &\quad + 0.34 \sin (5g + 2\omega)
 \end{aligned}$$

ferner

$$\begin{aligned}
 (4) &= +0.09 \sin (3g + 4\omega) \\
 &\quad - 0.42 \sin (4g + 4\omega) \\
 &\quad - 0.09 \sin (5g + 4\omega)
 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
 (7) &= +0.40 \sin 2\omega \\
 &\quad + 1.20 \sin (2g' + 2\omega') \\
 &\quad + 0.05 \sin (2g + 2g' + 2\omega + 2\omega') \\
 &\quad - 0.05 \sin (4g - 2g' + 4\omega - 2\omega') \\
 &\quad + 0.29 \sin (2g - 4g' + 2\omega - 4\omega')
 \end{aligned}$$

Die übrigen Glieder von  $V$  nebst  $V$  selbst sind in der folgenden Tafel zusammengestellt.

$g, g'$	$(2)ndz$ sin	$\frac{1}{2}(3)(ndz)^2$ sin	(5) sin	(6) $ndz$ sin	$V$ sin
<b>1.</b>					
1,0	+0,17		-1,10	-0,28	-1,21
2,0	+0.02		+1.07	-0.04	+1.05
3,0			+0.42		+0.42
-1,-1			+0.02	+0.04	+0.03
0,-1			-2.47	+0.01	-2.16
1,-1			-0.03	-0.04	-0.04
0,-2			-0.03		-0.03
<b>2.</b>					
1,-1			+0.03	-0.04	+0.02
2,-1			-0.50	-0.04	-0.54
3,-1		-0,03	-0.06	-0.04	-0.10
4,-1		-0.02			-0.02
-1,-2			+0.04	+0.01	+0.02
0,-2			-0.44	-0.01	-0.15
1,-2			-3.29		-3.29
2,-2	+0.16		+23.25	-0.04	+23.40
3,-2	+0.04		+2.66	+0.01	+2.68
4,-2			+0.25		+0.25
1,-3			-0.15		-0.15
2,-3			+1.02	+0.04	+1.06
3,-3		+0.03	+0.43	+0.02	+0.48
4,-3		+0.02			+0.02
2,-4			+0.03		+0.03
<b>11.</b>					
2,-4			+0.04		+0.04
3,-4			+0.26		+0.26
4,-4			+0.17		+0.17
5,-4			+0.03		+0.03
3,-5			+0.02		+0.02
4,-5			+0.02		+0.02
<b>3.</b>					
0,4	+0.04				+0.04
1,4	-0.15		-0.09	-0.04	-0.25
2,4	-1.34		+1.06	-0.04	-0.29
3,4	-0.37		+0.42		-0.25
4,4	-0.05				-0.05
-1,0					+0.04
0,0			-1.17	-0.01	+0.16
1,0		-0.09	+0.92	-0.27	-45.06
2,0		-0.26	+0.05	-0.12	+409.98
3,0		-0.15	-0.05		+45.08
4,0		-0.03			+4.05
5,0					+0.34

<b>3.</b>					
0,-1	-0,01				-0,01
1,-1	+0.08		+0,14	-0,01	+0.21
2,-1	+1.32		-1.11	-0.04	+0.20
3,-1	+0.44		-0.12		+0.32
4,-1	+0.07				+0.07
2,-2			-0.02		-0.02
<b>4.</b>					
0,4	-0.02		-0.03		-0.05
-1,3	+0.01		-0.01		0.00
0,3	-0.29	+0,02	-1.02	+0.04	-1.25
1,3	-0.44	+0.03	+0.02	+0.01	-0.38
2,3	-0.07				-0.07
-1,2	+0.12		-0.08	+0.01	+0.05
0,2	-3.80		-23.60	-0.01	-26.21
1,2	-9.40		+0.68		-8.72
2,2	-1.48		+0.28		-1.20
3,2	-0.16		+0.02		-0.14
0,1	+0.05	-0.02	+0.50	-0.04	+0.49
1,1	+0.06	-0.03	+0.03	+0.01	+0.07
<b>5.</b>					
1,2	+0.03				+0.03
2,2	-0.16		+0.03		-0.08
3,2	-0.04				-0.04
<b>12.</b>					
3,-1	-0.06	-0.03	+0.01	+0.01	-0.07
4,-1	-0.06	-0.02			-0.08
2,-2	-0.57		+0.01		-0.56
3,-2	+8.64		-0.01		+8.63
4,-2	+5.74				+5.69
5,-2	+1.00				+1.00
6,-2	+0.11				+0.11
2,-3	-0.02				-0.02
3,-3	+0.37	+0.03	-0.01	-0.01	+0.38
4,-3	+0.38	+0.02			+0.40
5,-3	+0.07				+0.07
4,-4	+0.02				+0.02
<b>13.</b>					
0,-4	+0.07	-0.12	+0.03		-0.02
1,-4	+0.07	-0.09	+0.28	-0.26	0.00
2,-4	+0.02	-0.02	+0.15	-0.13	+0.34
3,-4			+0.01	-0.01	0.00
<b>16.</b>					
4,-4	+0.06	+0.10			+0.16
5,-4	+0.08	+0.11			+0.19
6,-4	+0.03	+0.04			+0.07

18.					
2,0	+0,02				+0,02
3,0	-0.17				-0.08
4,0	-0.02				-0.44
5,0					-0.09
6.					
0,-1			+0,06		+0.06
1,-1			+0.04		+0.04
2,-1			-0.02		-0.02
7.					
2,-3			-0.04		-0.04
3,-3			-0.02		-0.02
8.					
0,1			+0.02		+0.02
1,1	+0.24		-0.04		+0.20
2,1	+0.06		-0.03		+0.03
9.					
2,-1	-0.02		+0.03		+0.01
3,-1	-0.24				-0.24
4,-1	-0.04				-0.04
10.					
0,-3			-0.04		-0.04
1,-3			-0.02		-0.02

146.

Hierauf ist der Unterschied zwischen den Störungen der wahren Länge in der Bahn (oder vielmehr der wahren Anomalie) und denen der mittleren Anomalie in Betracht zu ziehen. Bezeichnen wir die Function, die zu jenen addirt werden muss um diese zu erhalten, mit  $V'$ , und die Mittelpunktsleichung mit  $\sum_0^\infty C^{(i)} \sin ig$ , so ist sehr leicht einzusehen, dass

$$V' = -n\delta z \sum_0^\infty i C^{(i)} \cos ig + \frac{1}{2} (n\delta z)^2 \sum_0^\infty i^2 C^{(i)} \sin ig + \frac{1}{6} (n\delta z)^3 \sum_0^\infty i^3 C^{(i)} \cos ig + \dots$$

wird. Aus den Mondtafeln folgt

$$C^{(1)} = 22642,67$$

$$C^{(2)} = 776.48$$

$$C^{(3)} = 36.92$$

$$C^{(4)} = 2.01$$

$$C^{(5)} = 0.12$$

$$C^{(6)} = 0.01$$



und hiemit ergab sich die folgende Tafel, in welcher zur Abkürzung

$$(1) = -\sum_0^\infty iC^{(i)} \cos ig$$

$$(2) = \sum_0^\infty i^2 C^{(i)} \sin ig$$

$$(3) = \sum_0^\infty i^3 C^{(i)} \cos ig$$

gesetzt worden ist.

$g, g'$	(1) $n\delta z$ sin	$\frac{1}{2}(2)(n\delta z)^2$ sin	$\frac{1}{6}(3)(n\delta z)^3$ sin	$V'$ sin
<u>1.</u>				
1,0	+0,25	+3,50		+3,75
2,0	+0,04	+1,77		+1,78
3,0	+0,25	+0,25		+0,50
4,0	+0,03	+0,02		+0,05
-3,-1	-0,52			-0,52
-2,-1	-6,53	-0,06		-6,59
-1,-1	-36,57	-0,15		-36,72
0,-1	-10,15	-0,05		-10,20
1,-1	-36,44	+0,14		-36,30
2,-1	-8,63	+0,11		-8,52
3,-1	-0,67	+0,01		-0,66
-2,-2	-0,07			-0,07
-1,-2	-0,44	+0,03		-0,38
0,-2	-0,16	+0,01		-0,15
1,-2	-0,40	-0,03		-0,43
2,-2	-0,15	-0,01		-0,16
<u>2.</u>				
0,0	+0,14			+0,14
1,0	+0,04			+0,04
2,0	+0,14			+0,14
-1,-1	-0,09	-0,12		-0,21
0,-1	+1,61	-0,45		+1,16
1,-1	+1,06	-0,17		+0,89
2,-1	+1,58	+0,40		+1,98
3,-1	+1,36	+0,29		+1,65
4,-1	+0,17	+0,07		+0,24
-2,-2	-0,98			-0,98
-1,-2	-15,11	-0,02		-15,13
0,-2	-253,17	-0,05	+0,02	-253,20
1,-2	-115,66	-0,03	+0,02	-115,67
2,-2	-248,32	+0,04	+0,02	-248,26
3,-2	-134,65	+0,05	+0,02	-134,58
4,-2	-12,56	+0,01		-12,55
5,-2	-1,00			-1,00

2.				
-1,-3	-0.66	+0.02		-0.64
0,-3	-11.45	+0.44		-11.01
1,-3	-8.40	+0.29		-8.11
2,-3	-11.14	-0.37		-11.51
3,-3	-9.27	-0.31		-9.58
4,-3	-0.91	-0.08		-0.99
5,-3	-0.07			-0.07
0,-4	-0.42	+0.02		-0.40
1,-4	-0.42	+0.02		-0.40
2,-4	-0.41	-0.02		-0.43
3,-4	-0.46	-0.02		-0.48
4,-4	-0.05			-0.05
1,-5	-0.02			-0.02
2,-5	-0.01			-0.01
3,-5	-0.02			-0.02
41.				
1,-3	+0.02	-0.02		0.00
2,-3	+0.03	-0.03		0.00
3,-3	+0.03	+0.04		+0.04
4,-3	+0.03	+0.03		+0.06
5,-3	+0.04	+0.04		+0.02
0,-4	-0.17	+0.17		0.00
1,-4	-1.78	+1.48		-0.30
2,-4	-2.05	+1.35		-0.70
3,-4	-2.24	-0.97		-3.21
4,-4	-2.11	-1.43		-3.54
5,-4	-0.73	-0.53		-1.26
6,-4	-0.09	-0.09		-0.18
1,-5	-0.17	+0.14		-0.03
2,-5	-0.23	+0.16		-0.07
3,-5	-0.23	-0.07		-0.30
4,-5	-0.24	-0.17		-0.41
5,-5	-0.10	-0.07		-0.17
2,-6	-0.02	-0.04		-0.03
3,-6	-0.02	-0.04		-0.03
4,-6	-0.02	-0.04		-0.03
5,-6	-0.04			-0.04
45.				
2,-6	-0.02	+0.02		0.00
3,-6	-0.03	+0.03		0.00
4,-6	-0.04			-0.04
5,-6	-0.03	-0.03		-0.06
6,-6	-0.02	-0.02		-0.04
3.				
0,1	+0.02			+0.02
1,1	-0.04			-0.04
2,1	+0.02			+0.02
3,1	-0.04			-0.04

<u>3.</u>				
0,0	+4,64	-0,05		+4,59
1,0	-0,56	-0,03		-0,59
2,0	+4,64	+0,05		+4,69
3,0	+0,08	+0,03		+0,11
0,-1	-0,02			-0,02
1,-1	-0,04			-0,04
2,-1	-0,02			-0,02
3,-1	-0,04			-0,04
<u>4.</u>				
-2,3	-0,02			-0,02
-1,3	+0,49	+0,01		+0,20
0,3	-0,03			-0,03
1,3	+0,49	-0,04		+0,18
-3,2	-0,03			-0,03
-2,2	-0,29	+0,02		-0,27
-1,2	+4,49	+0,05		+4,54
0,2	-0,34	-0,02		-0,36
1,2	+4,44	-0,05		+4,39
2,2	+0,57			+0,57
-1,1	-0,11			-0,11
0,1	+0,04			+0,04
1,1	-0,11			-0,11
<u>12.</u>				
1,-2	+0,06	-0,05		+0,04
2,-2	+0,03	-0,02		+0,04
3,-2	+0,06	+0,05		+0,11
4,-2	+0,03	+0,02		+0,05
<u>13.</u>				
0,-4	-0,04	+0,05		+0,04
1,-4	-0,04	+0,02		+0,04
2,-4	-0,04	-0,05		-0,06
3,-4	-0,04	-0,02		-0,03
<u>6.</u>				
-1,0	-0,07			-0,07
0,0	-0,96			-0,96
1,0	-0,04			-0,04
2,0	-0,96			-0,96
3,0	-0,08			-0,08
-1,-1	+1,10	+0,07		+1,17
0,-1	+6,69	+0,05		+6,74
1,-1	+0,73	-0,07		+0,66
2,-1	+6,70	-0,05		+6,65
3,-1	+0,55			+0,55
0,-2	+0,03			+0,03
1,-2	0,00			0,00
2,-2	+0,03			+0,03

7.				
1,-2	-0'04			-0'04
2,-2	-0.01			-0.01
3,-2	-0.01			-0.01
4,-2	-0.01			-0.01
0,-3	+0.07			+0.07
1,-3	+0.17	-0'07		+0.10
2,-3	+0.03	-0.04		-0.01
3,-3	+0.17	+0.07		+0.24
4,-3	-0.02	+0.04		+0.02
8.				
0,1	-0.04			-0.04
1,1	0.00			0.00
2,1	-0.04			-0.04
10.				
0,-3	+0.02			+0.02
1,-3	0.00			0.00
2,-3	+0.02			+0.02

147.

Addirt man nun die Summen der vorstehenden Werthe von  $V$  und  $V'$  zu den im Art. 143 angegebenen Ausdrücken der auf die Ecliptik reducirten Mondlänge, nachdem davon der elliptische Theil der Mittelpunktsleichung abgezogen worden ist, so erhält man die daraus hervorgehenden Störungen der mittleren Anomalie des Mondes, die man mit den in dieser Abhandlung berechneten unmittelbar vergleichen kann. Es reicht aus, den einen der beiden Ausdrücke des Art. 143 durch  $V + V'$  zu reduciren, da die dort gegebenen Unterschiede alsdann unmittelbar zur Vergleichung des andern angewandt werden können. Es ergab sich auf diese Art die folgende Zusammenstellung.

$g, g'$	$V + V'$ sin	Plana $n\delta z$ sin	$H - P$	$H - D$
↑.				
1,0	+2'54	+1'50	—	—
2,0	+2.83	-4.17	-0'13	+0'25
3,0	+0.62	+0.42	-0.60	+0.02
4,0	+0.05	+0.04	-0.05	-0.15
-3,-1	-0.52	-0.15	+0.18	+0.16
-2,-1	-6.59	+0.75	+0.35	+0.09
-1,-1	-36.69	+74.44	-1.18	+0.52
0,-1	-12.36	+656.28	+1.19	-3.17
1,-1	-36.34	+111.72	-0.04	+0.02
2,-1	-8.52	+1.12	+0.10	-0.06
3,-1	-0.66	-0.29	+0.55	+0.12

BERECHNUNG DER IN DEN MONDTAFELN ANGEWANDTEN STÖRUNGEN. 458

1.				
-2,-2	-0,07	0,00	0,00	+0,07
-1,-2	-0.38	+0.79	+0.04	-0.02
0,-2	-0.48	+7.69	-0.37	+0.30
1,-2	-0.43	+1.70	+0.46	+0.09
2,-2	-0.16	-0.09	+0.13	+0.20
-1,-3		+0.02	-0.01	+0.04
0,-3		+0.16	-0.08	+0.08
1,-3		+0.02	+0.02	+0.04
2.				
0,0	+0.14	-0.05	-0.04	-0.23
1,0	+0.04	-2.00	-0.52	+0.07
2,0	+0.14	+0.07	-0.12	+0.14
-1,-1	-0.24	-0.35	+0.34	+0.17
0,-1	+4.16	-0.24	+3.91	+1.84
1,-1	+0.94	-27.90	+0.28	+0.47
2,-1	+4.44	-22.17	-0.84	+0.15
3,-1	+4.55	-4.33	-0.04	+0.11
4,-1	+0.22	+0.13	-0.20	-0.10
-2,-2	-0.98	-0.14	+0.08	+0.05
-1,-2	-15.13	-2.32	+0.43	+0.24
0,-2	-253.35	-40.99	-0.66	-0.20
1,-2	-118.96	+4466.69	+0.30	-2.25
2,-2	-224.86	+2445.46	-0.46	+0.16
3,-2	-134.90	+60.25	-0.23	-0.28
4,-2	-12.30	+1.82	+0.26	+0.28
5,-2	-4.00	+2.34	-2.23	+0.08
-1,-3	-0.64	-0.34	+0.23	+0.16
0,-3	-44.04	-3.25	+0.90	-0.44
1,-3	-8.26	+204.48	-3.38	-0.34
2,-3	-40.45	+155.40	-0.35	0.00
3,-3	-9.40	+4.64	+0.53	-0.03
4,-3	-0.97	-0.36	+0.56	+0.17
5,-3	-0.07	-0.07	+0.08	+0.08
0,-4	-0.40	-0.24	+0.13	+0.18
1,-4	-0.40	+7.13	-0.10	-0.07
2,-4	-0.40	+7.44	+0.33	+0.14
3,-4	-0.48	-0.16	+0.45	+0.17
4,-4	-0.05	-0.05	+0.06	+0.06
1,-5	-0.02	+0.09	+0.15	+0.26
2,-5	-0.04	+0.12	+0.24	+0.34
3,-5	-0.02	-0.02	+0.03	+0.03
11.				
2,-2			-0.03	-0.03
3,-2			-0.02	-0.02
1,-3			+0.04	+0.04
2,-3		-0.54	+0.16	+0.05
3,-3	+0.04	-0.88	+0.27	-0.15
4,-3	+0.06	-0.14	-0.10	-0.30
5,-3	+0.02	+0.02	-0.04	-0.04

<u>11.</u>				
0,-4			-0.03	-0.03
1,-4	-0.30	+0.20	+0.69	-0.24
2,-4	-0.69	+33.83	-3.79	-0.27
3,-4	-2.95	+35.05	+0.67	+0.17
4,-4	-3.37	+11.04	-0.36	-0.15
5,-4	-1.23	-0.37	+1.15	+0.14
6,-4	-0.18	-0.18	+0.23	-0.17
<hr/>				
1,-5	-0.03	-0.03	+0.08	+0.08
2,-5	-0.07	+1.13	+1.54	-0.26
3,-5	-0.28	+3.56	+0.58	+1.22
4,-5	-0.39	+0.82	+0.69	+1.00
5,-5	-0.17	-0.17	+0.29	+0.29
<hr/>				
2,-6	-0.03	-0.03	+0.18	+0.18
3,-6	-0.03	-0.03	+0.33	+0.33
4,-6	-0.03	-0.03	+0.16	+0.16
5,-6	-0.04	-0.04	+0.02	+0.02
<hr/>				
3,-7			+0.02	+0.02
4,-7			+0.01	+0.01
<hr/>				
<u>15.</u>				
4,-5			-0.04	-0.04
5,-5			-0.04	-0.04
<hr/>				
2,-6			+0.04	+0.04
3,-6			+0.29	+0.29
4,-6	-0.04	-0.04	+0.58	+0.08
5,-6	-0.06	-0.06	+0.39	+0.39
6,-6	-0.04	-0.04	+0.12	+0.12
<hr/>				
3,-7			+0.04	+0.04
4,-7			+0.09	+0.09
5,-7			+0.06	+0.06
6,-7			+0.02	+0.02
<hr/>				
<u>3.</u>				
0,1	+0.03	+0.03	+0.02	+0.02
1,1	-0.26	-0.42	+0.07	-0.09
2,1	-0.27	+0.32	-0.19	+0.40
3,1	-0.26	-0.06	+0.06	+0.26
<hr/>				
-1,0	+0.04	+0.06	+0.04	+0.06
0,0	+4.75	+5.83	+0.17	-0.05
1,0	-45.65	-82.84	-2.07	+0.14
2,0	+444.67	+3.63	+0.66	+1.42
3,0	+45.19	-0.04	+0.10	+0.10
4,0	+4.05	-0.04	+0.04	+0.05
5,0	+0.34	0.00	0.00	-0.34
<hr/>				
0,-1	-0.03	-0.03	-0.04	-0.04
1,-1	+0.20	+0.36	-0.08	+0.08
2,-1	+0.18	+0.05	+0.07	-0.06
3,-1	+0.34	+0.11	-0.11	-0.34

<u>4.</u>				
0,4	-0,05	-0,14	+0,14	+0,05
-2,3	-0.02	-0.02	+0.03	+0.03
-1,3	+0.20	+0.48	+0.06	+0.34
0,3	-1.28	-3.61	+0.16	+0.73
1,3	-0.20	-0.30	+0.13	+0.03
2,3	-0.07	-0.07	-0.07	-0.07
-3,2	-0.03	-0.03	-0.03	-0.03
-2,2	-0.27	+0.26	-0.10	-0.07
-1,2	+4.59	+10.74	+0.25	0.00
0,2	-26.57	-81.49	-0.12	+1.46
1,2	-4.33	-4.36	-0.34	+0.43
2,2	-0.63	-0.45	+0.38	+0.06
3,2	-0.14	-0.14	+0.14	+0.14
-1,1	-0.11	-0.23	+0.04	-0.08
0,1	+0.50	+1.98	+0.03	+0.11
1,1	-0.04	0.00	-0.05	-0.01
0,0		+0.02	-0.02	0.00
<u>5.</u>				
1,2	+0.03	+0.03	-0.04	-0.04
2,2	-0.08	+0.02	-0.02	+0.08
<u>12.</u>				
3,-1	-0.07	+0.12	-0.11	+0.08
4,-1	-0.08	-0.05	+0.05	+0.08
1,-2	+0.04	+0.04	+0.04	-0.39
2,-2	-0.55	-1.49	+0.40	+0.06
3,-2	+8.74	-0.64	+0.04	+0.26
4,-2	+5.74	+2.36	-2.35	-0.13
5,-2	+1.00	+0.37	-0.37	0.00
6,-2	+0.11	+0.11	-0.11	-0.11
2,-3	-0.02	-0.02	-0.02	-0.02
3,-3	+0.38	+0.13	-0.17	-0.42
4,-3	+0.40	+0.21	-0.21	-0.23
5,-3	+0.07	+0.07	-0.07	-0.07
<u>13.</u>				
1,-3			-0.03	-0.03
2,-3		+0.04	-0.02	-0.04
0,-4	+0.02	+0.02	+0.01	+0.01
1,-4	+0.04	+0.41	-0.22	-0.42
2,-4	+0.25	+0.30	-0.06	+0.59
3,-4	-0.03	-0.07	+0.04	-0.03
1,-5			-0.03	-0.03
2,-5		-0.03	+0.06	+0.03
3,-5			-0.01	-0.04
<u>16.</u>				
3,-4			-0.04	-0.04
4,-4	+0.16	+0.16	-0.18	-0.18
5,-4	+0.19	+0.19	-0.20	-0.20
6,-4	+0.07	+0.07	-0.07	-0.07

<u>18.</u>				
2,0	+0.02	+0.02	-0.02	-0.02
3,0	-0.08	+0.06	-0.06	+0.08
4,0	-0.44	-0.02	+0.02	+0.04
5,0	-0.09	0.00	0.00	+0.09
<u>6.</u>				
0,1			+0.01	+0.01
1,1		-0.04	-0.02	-0.06
-1,0	-0.07	+0.10	+0.18	+0.35
0,0	-0.96	-0.49	+1.05	-0.48
1,0	-0.01	+17.21	+0.28	-0.10
2,0	-0.96	+0.03	+0.23	+0.02
3,0	-0.08	+0.04	-0.04	+0.08
-1,-1	+1.17	+0.37	-0.93	-0.53
0,-1	+6.80	-11.25	-0.44	-0.99
1,-1	+0.70	+121.44	+0.04	+0.03
2,-1	+6.63	-1.64	0.00	+0.26
3,-1	+0.55	+0.19	-0.23	-0.09
-1,-2			-0.01	-0.01
0,-2	+0.03	0.00	-0.13	+0.24
1,-2		-0.38	-0.17	-0.05
2,-2	+0.03	+0.14	-0.19	-0.14
1,-3		+0.08	-0.04	+0.04
<u>7.</u>				
1,-2	-0.01	-0.01	-0.03	-0.03
2,-2	-0.01	+0.18	+0.09	+0.28
3,-2	-0.01	0.00	+0.12	+0.13
4,-2	-0.01	-0.01	+0.02	+0.02
0,-3	+0.07	+0.07	-0.05	-0.05
1,-3	+0.10	-0.54	-0.58	-1.22
2,-3	-0.02	-2.97	-0.45	-0.10
3,-3	+0.22	+1.11	-0.48	+0.01
4,-3	+0.02	+0.16	-0.14	0.00
1,-4			-0.08	-0.08
2,-4			-0.23	-0.23
3,-4		+0.01	+0.07	+0.08
4,-4			+0.01	+0.01
<u>14.</u>				
3,-5			-0.05	-0.05
<u>8.</u>				
0,4	-0.02	-0.02	+0.10	+0.10
1,4	+0.20	+0.94	-0.18	+0.56
1,0		-0.02	+0.10	+0.08



9.				
2,-1	+0,04	+0,04	-0,02	-0,02
3,-1	-0.24	-0.09	+0.10	+0.25
4,-1	-0.04	-0.04	+0.04	+0.04
10.				
1,-3	-0.02	-0,27	-0.03	-0.28

Betrachtet man nun diese Unterschiede, und ordnet sie nach der Grösse ohne Rücksicht auf die Vorzeichen, da die Wirkung eines jeden derselben auf die Mondörter sowohl positiv wie negativ ist, so ergeben sich, wenn man zuerst nur bis 0,8 hinunter geht, die folgenden Unterschiede mit meinen Coefficienten,

bei <i>Plana</i>	bei <i>Damoiseau</i>
3,91	3,17
3.79	2.25
3.38	1.81
2.35	1.46
2.23	1.42
2.07	1.22
1.54	1.22
1.19	1.00
1.18	0.99
1.15	(Anzahl = 9)
1.05	
0.93	
0.90	
0.84	

(Anzahl = 14)

Ausserdem finden sich

bei <i>Plana</i>	bei <i>Damoiseau</i>
13 Unterschiede;	8 Unterschiede zwischen 0,8 und 0,5
19 " " "	17 " " " 0.5 " 0.3
56 " " "	58 " " " 0.3 " 0.1
85 " " "	98 " " " <0.1

Addirt man alle Unterschiede der vorstehenden Tafel ohne Rücksicht auf die Zeichen, da jeder beides positiv und negativ einwirkt, so ist die Summe davon bei *Plana* = 55"; bei *Damoiseau* = 39"

Es kann daher von einer für die Anwendung ausreichend genauen Uebereinstimmung der von den beiden genannten Astronomen gegebenen Mondstörungen mit den meinigen keine Rede sein, die Unterschiede zwischen ihnen und mir sind vielmehr so erheblich, dass die Vergleichenungen jener Störungen mit den Beobachtungen wesentlich minder gut ausfallen muss, wie die Vergleichung der von mir berechneten. Auf ein gegenseitiges Aufheben dieser Unterschiede in den daraus sich ergebenden Mondörtern darf man nicht rechnen, da die Unterschiede einer jeden der im Vorhergehenden gebildeten Abtheilungen der Störungen häufig zugleich in ihrem Maximum eintreten. Ich mache noch darauf aufmerksam, dass die Unterschiede zwischen Damoiseau und mir im Ganzen geringer sind, wie die zwischen Plana und mir.

448.

Für die Vergleichung der von Plana und Damoiseau aus der Theorie erhaltenen Bewegungen der Absiden- und der Knotenlinie mit den Beobachtungen nehme ich das Resultat auf, welches ich schon in Schum. Astr. Nachr. B. XIX p. 193 veröffentlicht habe, und ändere dasselbe nur, in so weit die in meinen Mondtafeln angegebenen Bewegungen es erfordern.

Für die jährliche Bewegung des Perigäums ergibt sich

$$Plana - \text{Beob.} = -246''$$

$$Dam. - \text{Beob.} = +17.6$$

und für die der Knoten

$$Plana - \text{Beob.} = -11''8$$

$$Dam. - \text{Beob.} = -4.8$$

Hier stimmen wieder Damoiseau's Resultate besser mit den Beobachtungen überein wie Plana's. Es muss indess dabei bemerkt werden, dass Damoiseau zu wenige Decimalen in seinem Ausdruck angegeben hat, um die Secunde zu verbürgen. Eine Einheit Aenderung in der letzten Stelle des von Damoiseau gegebenen numerischen Resultats würde in der jährlichen Bewegung der Absidenlinie  $17\frac{1}{4}$  und in der der Knotenlinie  $1\frac{1}{7}$  Aenderung hervorbringen.

Die von den beiden genannten Astronomen berechneten Breitenstörungen habe ich mit den meinigen nicht im Einzelnen verglichen, wohl aber auch da nicht unerhebliche Unterschiede bemerkt.

§ 11. Vorläufige Berechnung der durch die Figur der Erde in der  
Mondbewegung verursachten Störungen.

Berechnung der Trägheitsmomente des Erdkörpers.

149.

In dem ersten Abschnitt der »*Fundamenta etc.*« habe ich ausführlich gezeigt, dass die Störungen, die von der Figur der in Betracht kommenden Körper bewirkt werden, von drei, auf alle massenhaltigen Theile dieser Körper auszudehnenden, Integralen abhängen, die dort mit  $\iint VdMdm$ ;  $\iint vdm dm'$ ;  $\iint UdMdm'$  bezeichnet worden sind. Von diesen sind die Werthe der beiden letzten weit kleiner wie der Werth des ersten, und können nichts Merkliches geben. Wir werden uns daher hier nur mit dem ersten beschäftigen.

Bezeichnet man den Zuwachs, den die Störungsfuction dadurch bekommt, mit  $\delta\Omega$ , so wird

$$\delta\Omega = \frac{1}{Mm} \iint VdMdm$$

und es bedeuten hier  $M$  die Erd- und  $m$  die Mondmasse. Es ist ferner a. a. O. gezeigt worden, dass das doppelte Integral der vorstehenden Gleichung in zwei einfache zerlegt werden kann, von welchen das eine auf den Erdkörper und das andere auf den Mondkörper ausgedehnt werden muss. Es wird nach dieser Zerlegung

$$\begin{aligned} \delta\Omega &= \frac{3}{2Mr^3} \int \{x^2 X^2 + y^2 Y^2 + z^2 Z^2\} dM - \frac{1}{2Mr^3} \int \{X^2 + Y^2 + Z^2\} dM \\ &+ \frac{3}{2mr^3} \int \{x_1^2 \xi^2 + y_1^2 \eta^2 + z_1^2 \zeta^2\} dm - \frac{1}{2mr^3} \int \{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2\} dm \end{aligned}$$

und es bedeuten hier  $r$  die Entfernung des Schwerpunkts der Erde von dem des Mondes,  $X, Y, Z$  die rechtwinklichen, den Hauptachsen der Erde parallelen, Coordinaten irgend eines Punkts der Erdmasse,  $\xi, \eta, \zeta$  die rechtwinklichen, den Hauptachsen des Mondes parallelen, Coordinaten irgend eines Punkts der Mondmasse,  $x, y, z$  die bez. den  $X, Y, Z$  parallelen Coordinaten des Schwerpunkts des Mondes, die gleichwie  $X, Y, Z$  ihren Anfangspunkt im Schwerpunkt der Erde haben, und  $x_1, y_1, z_1$  die bez. den  $\xi, \eta, \zeta$  parallelen Coordinaten des Schwerpunkts der Erde, die gleichwie  $\xi, \eta, \zeta$  ihren Anfangspunkt im Schwerpunkt des Mondes haben.

150.

Beschäftigen wir uns zuerst mit der Wirkung der Figur der Erde, und setzen dem zufolge, während wir zugleich  $M = 1$  machen,

$$\delta\Omega = \frac{3}{2r^3} \int \{x^2 X^2 + y^2 Y^2 + z^2 Z^2\} dM - \frac{1}{2r^3} \int \{X^2 + Y^2 + Z^2\} dM$$

Nehmen wir an, dass die Achse der  $Z$  mit der Rotationsachse der Erde zusammen fällt, und folglich die Achsen der  $Y$  und  $X$  im Aequator liegen. Seien die auf diese Achsen sich beziehenden Trägheitsmomente der Erde bez.  $C, B, A$ , dann wird

$$\int X^2 dM = \frac{1}{2}(B+C-A); \quad \int Y^2 dM = \frac{1}{2}(C+A-B); \quad \int Z^2 dM = \frac{1}{2}(A+B-C)$$

und wenn wir ausserdem

$$B = C - II; \quad A = C - A$$

setzen,

$$\delta\Omega = \frac{3}{2r^3} (x^2 A + y^2 II) - \frac{1}{2r^3} (A + II)$$

und hängt also nur von den Unterschieden der Trägheitsmomente ab.

151.

Sei  $\delta$  die Declination des Mondes in Bezug auf die bewegliche Ebene des Erdäquators, und  $w$  der Winkel, den eine durch die Achse der  $Z$  und den Radius Vector  $r$  gelegte Ebene mit der Achse der  $X$  macht, dann wird

$$x = r \cos \delta \cos w$$

$$y = r \cos \delta \sin w$$

und

$$\delta\Omega = \frac{3}{4r^3} (A + II) (\frac{1}{2} - \sin^2 \delta) + \frac{3}{4r^3} (A - II) \cos^2 \delta \cos 2w$$

Der Winkel  $w$  durchläuft den Umkreis in nahe 25<sup>h</sup> Sternzeit, und schon aus diesem Grunde kann das zweite Glied dieses Ausdrucks von  $\delta\Omega$  nichts Merkliches geben, es wird überdies aus dem Grunde sehr klein, dass wenn für die Erde  $A$  und  $II$  in der That von einander verschieden sein sollten, ihr Unterschied sehr klein sein muss. Wir dürfen daher hier  $A = II$  setzen, welches darauf hinaus kommt, die Erde in allen ihren Schichten als ein Revolutionssphäroid zu betrachten. Hiemit wird schliesslich

$$\delta\Omega = \frac{3A}{2r^3} (\frac{1}{2} - \sin^2 \delta)$$

152.

Betrachten wir den Bogen der Mondbahn, welcher sich vom aufsteigenden Knoten derselben auf dem Erdäquator bis zum Orte des Mondes erstreckt, so findet sich, dass dieser aus dem Argument der Breite des Mondes und dem Bogen der Mondbahn, welcher sich vom aufsteigenden Knoten derselben auf dem Aequator bis zum aufsteigenden Knoten auf der Ecliptik erstreckt, zusammen gesetzt ist. Nennen wir den zuletzt bezeichneten Bogen  $F$ , so wird der ganze, erst genannte, Bogen =

$$\bar{f} + \omega + F$$

Nennt man ausserdem die Neigung der Mondbahn gegen den Erdäquator  $J'$ , so ergibt sich sogleich

$$\sin \delta = \sin J' \sin (\bar{f} + \omega + F)$$

Bezeichnet man wieder das Supplement der tropischen Länge des aufsteigenden Mondknotens auf der Ecliptik mit  $\Theta$ , so sind in dem sphärischen Dreieck, welches von der Ecliptik, der Mondbahn und dem Erdäquator gebildet wird, die Seiten und die gegenüberliegenden Winkel

$$360^\circ - \Theta; F; -$$

$$180^\circ - J'; \varepsilon; J$$

wenn  $\varepsilon$  die Schiefe der Ecliptik bedeutet. Dieses Dreieck giebt die folgenden Relationen

$$\sin J' \sin F = - \sin \varepsilon \sin \Theta$$

$$\sin J' \cos F = \cos \varepsilon \sin J + \sin \varepsilon \cos J \cos \Theta$$

durch Hülfe deren sich aus dem obigen Ausdruck

$$\begin{aligned} \sin \delta &= \sin \varepsilon \cos \frac{1}{2} J \sin (f + \omega - \Theta) \\ &+ \cos \varepsilon \sin J \sin (f + \omega) \\ &- \sin \varepsilon \sin \frac{1}{2} J \sin (f + \omega + \Theta) \end{aligned}$$

ergiebt, wo ich zur Abkürzung  $f$  statt  $\bar{f}$  geschrieben habe. Durch die Substitution dieses Ausdrucks in  $\delta \Omega$  wird

$$\begin{aligned} \delta\Omega = \frac{3A}{2r^3} \{ & \frac{1}{4}(1 - \frac{3}{4}\sin^2\epsilon)(1 - 6\sin^2\frac{1}{2}J + 6\sin^4\frac{1}{2}J) \\ & - 2\sin\epsilon\cos\epsilon(\sin\frac{1}{2}J - \frac{3}{4}\sin^3\frac{1}{2}J)\cos\Theta \\ & + \sin^2\epsilon\sin^2\frac{1}{2}J\cos 2\Theta \\ & + \frac{1}{2}\sin^2\epsilon(1 - 2\sin^2\frac{1}{2}J)\cos 2(f + \omega - \Theta) \\ & + 2\sin\epsilon\cos\epsilon\sin\frac{1}{2}J\cos(2f + 2\omega - \Theta) \\ & + 2(1 - \frac{3}{4}\sin^2\epsilon)\sin^2\frac{1}{2}J\cos 2(f + \omega) \\ & - 2\sin\epsilon\cos\epsilon\sin^3\frac{1}{2}J\cos(2f + 2\omega + \Theta) \\ & + \frac{1}{2}\sin^2\epsilon\sin^4\frac{1}{2}J\cos 2(f + \omega + \Theta) \} \end{aligned}$$

wo in den Coefficienten der kleineren Glieder nur die Glieder der niedrigsten Ordnung angesetzt worden sind.

153.

Wenden wir uns nun zunächst zu den Breitenstörungen, dann haben wir zufolge des Vorhergehenden die folgenden Gleichungen

$$\begin{aligned} \frac{dP}{ndt} &= -\alpha Q + B \\ \frac{dQ}{ndt} &= \alpha P + C \end{aligned}$$

zu entwickeln und zu integrieren. Bei dieser Integration tritt der Fall ein, welcher im Art. 96 erwähnt wurde, dass  $\beta$  nahe  $= \alpha$  ist, indem in dem Argument  $\Theta$  das mit  $nt$  multiplicirte Glied nahe  $= \alpha$  ist. Man muss daher hier um die Integrale richtig zu erhalten, in  $B$  und  $C$  einige Glieder höherer Ordnung sogleich mit hinzuziehen, und

$$\begin{aligned} B &= B_0 + \left(\frac{dB_0}{dQ}\right) \delta Q \\ C &= C_0 + \left\{ \left(\frac{dC_0}{dP}\right) - F\left(\frac{dC_0}{dK}\right) \right\} \delta P \end{aligned}$$

setzen, wo aber von den vollständigen Ausdrücken der partiellen Differentialquotienten hier in dieser vorläufigen Berechnung nur die constanten Glieder aufgenommen zu werden brauchen, und auch diese in einer abgekürzten Form angewandt werden dürfen. Uebergehen wir die Excentricitäten und die mit  $\sin^4\frac{1}{2}J$  multiplicirten Glieder, so ergibt sich leicht aus den Artt. 21, 41, 49, 50, dass

$$\begin{aligned} B_0 &= u^2 \left(\frac{3}{4} - \frac{3}{4}\sin^2\frac{1}{2}J\right) \sin\frac{1}{2}J \\ \left(\frac{dB_0}{dQ}\right) &= u^2 \left(\frac{3}{4} - \frac{3}{4}\sin^2\frac{1}{2}J\right) \\ \left(\frac{dC_0}{dP}\right) - F\left(\frac{dC_0}{dK}\right) &= -u^2 \left(\frac{3}{4} - \frac{3}{4}\sin^2\frac{1}{2}J\right) \end{aligned}$$

Da wir hier in diesen Grössen nur die erste Potenz der störenden Kraft der Sonne zu berücksichtigen brauchen, um in  $\delta P$  und  $\delta Q$  die grössten der vom Product dieser störenden Kraft mit der von der Figur der Erde bewirkten Kraft abhängigen Glieder zu bekommen, und mit bloser Rücksicht darauf der Ausdruck von  $\alpha$  erhalten wird, wenn man den obigen Ausdruck von  $B_0$  mit  $2 \sin \frac{1}{2} J$  dividirt, so wird hier

$$\alpha = u^2 \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sin^2 \frac{1}{2} J \right)$$

und hiemit ergibt sich

$$\begin{aligned} \left( \frac{dB_0}{dQ} \right) &= \alpha (1 - 6 \sin^2 \frac{1}{2} J) \\ \left( \frac{dC_0}{dP} \right) - F \left( \frac{dC_0}{dK} \right) &= -\alpha \end{aligned}$$

Substituirt man diese Ausdrücke sowohl wie die früher vorgekommenen

$$P = \delta P, \quad Q = 2 \sin \frac{1}{2} J_0 + \delta Q$$

in die obigen Differentialgleichungen, so wird

$$\begin{aligned} \frac{dP}{ndt} &= 2\alpha \sin \frac{1}{2} J_0 + B_0 - 6 \sin^2 \frac{1}{2} J \cdot \alpha \delta Q \\ \frac{dQ}{ndt} &= C_0 \end{aligned}$$

bei deren Integration zum jetzt zu verfolgenden Zweck keine kleineren Divisoren vorkommen können, wie die, welche die Beschaffenheit der Aufgabe unausweichlich mit sich bringt.

Für  $B_0$  und  $C_0$  findet man durch die Relationen des § 1. leicht die folgenden Ausdrücke

$$\begin{aligned} B_0 &= -a \left( \frac{d\delta\Omega}{dJ} \right) \cos \frac{1}{2} J \\ C_0 &= a \left( \frac{d\delta\Omega}{dN} \right) \frac{\cos \frac{1}{2} J}{2 \sin \frac{1}{2} J} - \frac{1}{2} a \left( \frac{d\delta\Omega}{dK} \right) \sin \frac{1}{2} J \end{aligned}$$

die auch schon in den »*Fundamenta etc.*« vorkommen.

154.

Um die Differentiationen der Störungfunction  $\delta\Omega$  nach  $N$  und  $K$  ausführen zu können, muss  $\Theta$  in Function von  $N$  und  $K$  dargestellt werden. Bezeichnen wir die allgemeine Präcession mit  $npt$ , so wird sogleich

$$\Theta = n(\alpha + \eta - p)t + N - K - \pi'$$

und hiemit ergibt sich durch die Differentiation des Ausdrucks von  $\delta\Omega$  und die Substitution in die obigen Differentialgleichungen, wenn wir

von den Gliedern, die von  $f$  abhängen, nur das Glied niedrigster Ordnung aufnehmen,

$$\begin{aligned} \frac{dP}{ndt} = & -2\alpha \sin \frac{1}{2}J + \frac{3A}{2a^2} \left\{ 2 \sin \frac{1}{2}J (1 - \frac{1}{2} \sin^2 \epsilon) (1 - 3 \sin^2 \frac{1}{2}J) \right. \\ & + \sin \epsilon \cos \epsilon (1 - \frac{1}{2} \sin^2 \frac{1}{2}J) \cos \Theta \\ & - \sin^2 \epsilon \sin \frac{1}{2}J \cos 2\Theta \\ & \left. - \sin \epsilon \cos \epsilon \cos (2g + 2\omega - \Theta) \right\} \\ & - 6 \sin^2 \frac{1}{2}J \cdot \alpha \delta Q \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dQ}{ndt} = & \frac{3A}{2a^2} \left\{ \sin \epsilon \cos \epsilon (1 - \frac{1}{2} \sin^2 \frac{1}{2}J) \sin \Theta \right. \\ & - \sin^2 \epsilon \sin \frac{1}{2}J \sin 2\Theta \\ & \left. - \sin \epsilon \cos \epsilon \sin (2g + 2\omega - \Theta) \right\} \end{aligned}$$

Strenge genommen müssten hier nicht nur die Excentricitäten sondern auch wenigstens die grössten in  $r$  und  $\bar{f}$  enthaltenen, von der störenden Kraft der Sonne herrührenden Glieder berücksichtigt werden. Allein diese Glieder, die viel kleiner sind wie die grössten der angenommenen, sollen in dieser vorläufigen Berechnung nicht mit aufgenommen, sondern erst in der nächsten Abhandlung berücksichtigt werden.

Aus dem vorstehenden Ausdruck für  $\delta P$  bekommen wir nun zuerst

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{3A}{2a^2} (1 - \frac{1}{2} \sin^2 \epsilon) (1 - 3 \sin^2 \frac{1}{2}J) \\ \eta &= \frac{3A}{2a^2} (1 - \frac{1}{2} \sin^2 \epsilon) \sin^2 \frac{1}{2}J \end{aligned}$$

als den Beitrag, den die Figur der Erde zur Bewegung der Mondknoten liefert, und hierauf durch die Integrationen, deren Ausführung keine Schwierigkeiten hat,

$$\begin{aligned} \delta P &= \frac{3A}{2a^2} \frac{\sin \epsilon \cos \epsilon (1 - \frac{1}{2} \sin^2 \frac{1}{2}J)}{\alpha + \eta - p} \sin \Theta \\ & - \frac{3A}{4a^2} \frac{\sin^2 \epsilon \sin \frac{1}{2}J}{\alpha + \eta - p} \sin 2\Theta \\ & - \frac{3A}{4a^2} \sin \epsilon \cos \epsilon \sin (2g + 2\omega - \Theta) \\ \delta Q &= - \frac{3A}{2a^2} \frac{\sin \epsilon \cos \epsilon (1 - \frac{1}{2} \sin^2 \frac{1}{2}J)}{\alpha + \eta - p} \cos \Theta \\ & + \frac{3A}{4a^2} \frac{\sin^2 \epsilon \sin \frac{1}{2}J}{\alpha + \eta - p} \cos 2\Theta \\ & + \frac{3A}{4a^2} \sin \epsilon \cos \epsilon \cos (2g + 2\omega - \Theta) \end{aligned}$$

Da ferner zufolge des Art. 135, wenn wieder mit  $s$  die Störungen des Sinus der Mondbreite bezeichnet werden, mit hier ausreichender Genauigkeit,



$$s = \delta Q (1 - \frac{1}{2} \sin^2 \frac{1}{2} J) \sin (f + \omega) + \delta P (1 - \frac{1}{2} \sin^2 \frac{1}{2} J) \cos (f + \omega)$$

ist, so giebt sich durch die vorstehenden Werthe von  $\delta P$  und  $\delta Q$ ,

$$s = - \frac{3A}{4a^2} \sin \varepsilon \cos \varepsilon (1 - \frac{1}{2} \sin^2 \frac{1}{2} J) \frac{2 + (\alpha + \eta - p)}{\alpha + \eta - p} \sin (f + \omega - \Theta) \\ + \frac{3A}{4a^2} \frac{\sin^2 \varepsilon \sin \frac{1}{2} J}{\alpha + \eta - p} \sin (f + \omega - 2\Theta)$$

Ich bemerke hiezu, dass  $f + \omega - \Theta$  die wahre tropische Länge des Mondes in seiner Bahn ist.

455.

Gehen wir jetzt zu den durch die Figur der Erde bewirkten Störungen der Länge und des Radius Vectors des Mondes über, und berücksichtigen hiebei auch nur die Glieder der niedrigsten Ordnung, mit dem Vorbehalt der Berechnung der kleineren Glieder in der nächsten Abhandlung. Wenden wir, um  $T_0$  zu ermitteln, den Ausdruck an, der im Art. 28 diente um  $T_0^{(3)}$  zu erhalten. Dieser wird hier

$$T_0 = aA \left( \frac{d\delta\Omega}{df} \right) + aBr \left( \frac{d\delta\Omega}{dr} \right)$$

und von  $A$  und  $B$  werden hier nur die Glieder

$$A = -3 + 4 \cos (g - \gamma) + 5e \cos (2g - \gamma) \\ B = 2 \sin (g - \gamma) + e \sin \gamma + 3e \sin (2g - \gamma)$$

gebraucht. Nehmen wir wieder von den Gliedern in  $\delta\Omega$ , die von  $f$  abhängen, nur das der niedrigsten Ordnung auf, so wird

$$a \left( \frac{d\delta\Omega}{df} \right) = - \frac{3A}{2a^2} \sin^2 \varepsilon \sin (2g + 2\omega - 2\Theta)$$

Um die Bewegung des Perigäums zu erhalten, wird es nothwendig, in dem constanten Gliede des partiellen Differential's von  $\delta\Omega$  nach  $r$  die Mondexcentricität zu berücksichtigen; substituiren wir daher

$$\frac{1}{r^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{3e}{a^2} \cos g$$

in dieses Glied, so giebt sich

$$ar \left( \frac{d\delta\Omega}{dr} \right) = - \frac{3A}{2a^2} (1 - \frac{1}{2} \sin^2 \varepsilon) (1 - 6 \sin^2 \frac{1}{2} J) \\ - \frac{9Ae}{2a^2} (1 - \frac{1}{2} \sin^2 \varepsilon) (1 - 6 \sin^2 \frac{1}{2} J) \cos g \\ + \frac{9A}{a^2} \sin \varepsilon \cos \varepsilon \sin \frac{1}{2} J (1 - \frac{1}{2} \sin^2 \frac{1}{2} J) \cos \Theta \\ - \frac{9A}{2a^2} \sin^2 \varepsilon \sin^2 \frac{1}{2} J \cos 2\Theta \\ - \frac{9A}{4a^2} \sin^2 \varepsilon \cos (2g + 2\omega - 2\Theta)$$

und hiemit erhält man durch den obea angeführten Ausdruck für  $T_0$

$$\begin{aligned}
 T_0 = & \frac{3Ae}{a^2} (1 - \frac{1}{2} \sin^2 \epsilon) (1 - 6 \sin^2 \frac{1}{2} J) \sin \gamma \\
 & + \frac{9A}{a^2} \sin \epsilon \cos \epsilon \sin \frac{1}{2} J (1 - \frac{1}{2} \sin^2 \frac{1}{2} J) \sin (-\gamma + g + \Theta) \\
 & - \frac{9A}{a^2} \sin \epsilon \cos \epsilon \sin \frac{1}{2} J (1 - \frac{1}{2} \sin^2 \frac{1}{2} J) \sin (\gamma - g + \Theta) \\
 & - \frac{9A}{2a^2} \sin^2 \epsilon \sin^2 \frac{1}{2} J \sin (-\gamma + g + 2\Theta) \\
 & + \frac{9A}{2a^2} \sin^2 \epsilon \sin^2 \frac{1}{2} J \sin (\gamma - g + 2\Theta) \\
 & + \frac{9A}{2a^2} \sin^2 \epsilon \sin (2g + 2\omega - 2\Theta) \\
 & - \frac{31A}{4a^2} \sin^2 \epsilon \sin (-\gamma + 3g + 2\omega - 2\Theta) \\
 & - \frac{3A}{4a^2} \sin^2 \epsilon \sin (\gamma + g + 2\omega - 2\Theta)
 \end{aligned}$$

Um in diesen Coefficienten die Glieder niedrigster Ordnung vollständig zu erhalten, wird es wieder nothwendig ein Glied der zweiten mit hinzuzuziehen, und

$$T = T_0 + \left( \frac{dT_0}{dQ} \right) \delta Q$$

zu setzen. Es ist leicht zu finden, dass die übrigen Glieder des vollständigen Ausdrucks von  $T$  nur Glieder höherer Ordnung hervorbringen können.

Aus den Artt. 26 und 47 ergibt sich, dass mit Weglassung der Excentricitäten und der mit  $\sin^4 J$  multiplicirten Glieder

$$\left( \frac{dT_0}{dQ} \right) = -\omega^2 (6 - 12 \sin^2 \frac{1}{2} J) \sin \frac{1}{2} J \sin (g - \gamma)$$

ist, und dieser Ausdruck geht in Folge des Ausdrucks von  $\alpha$  des Art. 153 in den folgenden über,

$$\left( \frac{dT_0}{dQ} \right) = -8 \sin \frac{1}{2} J (\alpha + \eta) \sin (g - \gamma)$$

multiplicirt man diesen mit dem Ausdruck von  $\delta Q$  des Art. 154, so bekommt man

$$\begin{aligned}
 \left( \frac{dT_0}{dQ} \right) \delta Q = & \frac{6A}{a^2} \sin \epsilon \cos \epsilon \sin \frac{1}{2} J (1 - \frac{1}{2} \sin^2 \frac{1}{2} J) \sin (-\gamma + g + \Theta) \\
 & - \frac{6A}{a^2} \sin \epsilon \cos \epsilon \sin \frac{1}{2} J (1 - \frac{1}{2} \sin^2 \frac{1}{2} J) \sin (\gamma - g + \Theta) \\
 & - \frac{3A}{a^2} \sin^2 \epsilon \sin^2 \frac{1}{2} J \sin (-\gamma + g + 2\Theta) \\
 & + \frac{3A}{a^2} \sin^2 \epsilon \sin^2 \frac{1}{2} J \sin (\gamma - g + 2\Theta)
 \end{aligned}$$

worauf der Ausdruck für  $T$  erhalten wird.

456.

Aus dem Art. 87 ziehen wir

$$\frac{dW_0}{ndt} = T - 2ye \sin \gamma$$

indem die übrigen dort im Ausdruck für  $dW_0$  enthaltenen mit  $y$  multiplicirten Glieder hier keinen wesentlichen Einfluss aussern. Durch die Entwicklungen des vor. Art. ergibt sich also

$$\begin{aligned} \frac{dW_0}{ndt} = & - 2ye \sin \gamma + \frac{3Ae}{a^2} (1 - \frac{1}{2} \sin^2 \epsilon) (1 - 6 \sin^2 \frac{1}{2} J) \sin \gamma \\ & + \frac{15A}{a^2} \sin \epsilon \cos \epsilon \sin \frac{1}{2} J (1 - \frac{1}{2} \sin^2 \frac{1}{2} J) \sin (-\gamma + g + \Theta) \\ & - \frac{15A}{a^2} \sin \epsilon \cos \epsilon \sin \frac{1}{2} J (1 - \frac{1}{2} \sin^2 \frac{1}{2} J) \sin (\gamma - g + \Theta) \\ & - \frac{15A}{2a^2} \sin^2 \epsilon \sin^2 \frac{1}{2} J \sin (-\gamma + g + 2\Theta) \\ & + \frac{15A}{2a^2} \sin^2 \epsilon \sin^2 \frac{1}{2} J \sin (\gamma - g + 2\Theta) \\ & + \frac{9A}{2a^2} \sin^2 \epsilon \sin (2g + 2\omega - 2\Theta) \\ & - \frac{21A}{4a^2} \sin^2 \epsilon \sin (-\gamma + 3g + 2\omega - 2\Theta) \\ & - \frac{3A}{4a^2} \sin^2 \epsilon \sin (\gamma + g + 2\omega + 2\Theta) \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck giebt zuvörderst

$$y = \frac{3A}{2a^2} (1 - \frac{1}{2} \sin^2 \epsilon) (1 - 6 \sin^2 \frac{1}{2} J)$$

als den Beitrag, den die Figur der Erde zur Bewegung des Perigäums des Mondes liefert. Wie man sieht ist derselbe sehr nahe der aus derselben Ursache entspringenden Knotenbewegung gleich.

457.

Wenden wir uns hierauf zu den beiden folgenden Gliedern von  $dW_0$ , so geben die Gleichungen (30) zu erkennen, dass für diese die Integrationsdivisoren

$$-(1 + \alpha + \eta - p + y) \text{ und } -(-1 + \alpha + \eta - p - y)$$

sind. Aber man findet leicht, dass die Berücksichtigung der kleineren Glieder dieser Divisoren hier im Endresultat nur Glieder höherer Ordnung hervorbringen können, die jetzt, wie im Art. 455 angekündigt

wurde, ausgeschlossen werden sollen, wir dürfen daher statt der vorstehenden Divisoren  $-1$  und bez.  $+1$  annehmen, und dürfen in den übrigen Gliedern von  $dW_0$  demgemäss verfahren. Hiemit ergibt sich

$$\begin{aligned} W_0 = & -\frac{15A}{a^2} \sin \varepsilon \cos \varepsilon \sin \frac{1}{2}J (1 - \frac{1}{2} \sin^2 \frac{1}{2}J) \cos (-\gamma + g + \Theta) \\ & -\frac{15A}{a^2} \sin \varepsilon \cos \varepsilon \sin \frac{1}{2}J (1 - \frac{1}{2} \sin^2 \frac{1}{2}J) \cos (\gamma - g + \Theta) \\ & +\frac{15A}{a^2} \sin^2 \varepsilon \sin^2 \frac{1}{2}J \cos (-\gamma + g + 2\Theta) \\ & +\frac{15A}{2a^2} \sin^2 \varepsilon \sin^2 \frac{1}{2}J \cos (\gamma - g + 2\Theta) \\ & -\frac{9A}{4a^2} \sin^2 \varepsilon \cos (2g + 2\omega - 2\Theta) \\ & +\frac{7A}{4a^2} \sin^2 \varepsilon \cos (-\gamma + 3g + 2\omega - 2\Theta) \\ & +\frac{3A}{4a^2} \sin^2 \varepsilon \cos (\gamma + g + 2\omega - 2\Theta) \end{aligned}$$

und hieraus

$$\begin{aligned} \overline{W}_0 = & -\frac{30A}{a^2} \sin \varepsilon \cos \varepsilon \sin \frac{1}{2}J (1 - \frac{1}{2} \sin^2 \frac{1}{2}J) \cos \Theta \\ & +\frac{15A}{a^2} \sin^2 \varepsilon \sin^2 \frac{1}{2}J \cos 2\Theta \\ & +\frac{A}{4a^2} \sin^2 \varepsilon \cos (2g + 2\omega - 2\Theta) \\ \left(\frac{dW_0}{dy}\right) = & \frac{A}{a^2} \sin^2 \varepsilon \sin (2g + 2\omega - 2\Theta) \end{aligned}$$

Da ferner hier

$$\begin{aligned} ndz &= n \int \overline{W}_0 dt \\ \nu &= -\frac{1}{2} n \int \left(\frac{dW_0}{dy}\right) dt \end{aligned}$$

gesetzt werden darf, so wird

$$\begin{aligned} ndz &= -\frac{30A}{a^2} \frac{\sin \varepsilon \cos \varepsilon \sin \frac{1}{2}J (1 - \frac{1}{2} \sin^2 \frac{1}{2}J)}{\alpha + \eta - p} \sin \Theta \\ & +\frac{15A}{2a^2} \frac{\sin^2 \varepsilon \sin^2 \frac{1}{2}J}{\alpha + \eta - p} \sin 2\Theta \\ & +\frac{A}{8a^2} \sin^2 \varepsilon \sin (2g + 2\omega - 2\Theta) \\ \nu &= \frac{A}{4a^2} \sin^2 \varepsilon \cos (2g + 2\omega - 2\Theta) \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck von  $\nu$  kommt weiter nicht in Betracht, da sein Coefficient so klein ist, dass er im Ausdruck der Mondparallaxe durchaus nichts Merkliches geben kann.

158.

Die Grösse, welche hier mit  $A$  bezeichnet worden ist, und den Unterschied  $C - A$  zwischen dem Trägheitsmoment der Erde in Bezug auf die Rotationsachse derselben und dem Trägheitsmoment in Bezug auf irgend eine im Aequator liegende Achse bedeutet, hat Laplace weiter entwickelt, und dafür den Ausdruck

$$A = \frac{1}{3} (\rho - \frac{1}{2} \varphi) D^2$$

gefunden, wo  $D$  der Halbmesser der Erde,  $\rho$  die Abplattung und  $\varphi$  das Verhältniss der Centrifugalkraft zur Schwerkraft unter dem Aequator ist. Da bei der Anwendung dieses Ausdrucks nur die Abplattung substituirt werden kann, die die Oberfläche der Erde besitzt, und also eine etwaige Verschiedenheit derselben für die verschiedenen inneren Schichten der Erde unberücksichtigt gelassen werden muss, so erwächst daraus eine Unsicherheit in den Coefficienten, die Functionen von  $A$  sind, die man nur dadurch vermeiden kann, dass man entweder den grössten Coefficienten von  $s$ , oder den grössten von  $n\delta z$ , oder beide unmittelbar durch die Mondbeobachtungen bestimmt. So habe ich es bei der Bearbeitung der Mondtafeln gemacht, und es lässt sich auch dieses Verfahren nicht als Empirismus bezeichnen, da es auf dem oben dargelegten wissenschaftlichen Grunde beruht.

Wenn man nun in Bezug auf die eben entwickelten Ungleichheiten

$$s = \lambda_1 \sin (f + \omega - \Theta) + \lambda_2 \sin (f + \omega - 2\Theta)$$

$$n\delta z = \pi_1 \sin \Theta + \pi_2 \sin 2\Theta + \pi_3 \sin (2g + 2\omega - 2\Theta)$$

setzt, und  $\lambda_1$  als durch die Mondbeobachtungen gegeben betrachtet, so bekommt man

$$\lambda_2 = -\frac{1}{2} \operatorname{tg} \varepsilon \sin \frac{1}{2} J \cdot \lambda_1$$

$$\pi_1 = 20 \sin \frac{1}{2} J (1 + \frac{1}{2} \sin^2 \frac{1}{2} J) (1 - \frac{1}{2} (\alpha + \eta - p)) \lambda_1$$

$$\pi_2 = -5 \operatorname{tg} \varepsilon \sin^2 \frac{1}{2} J \cdot \lambda_1$$

$$\pi_3 = -\frac{1}{12} \operatorname{tg} \varepsilon (\alpha + \eta - p) \lambda_1$$

und ausserdem

$$y = -\frac{1 - \frac{1}{2} \sin^2 \varepsilon}{\sin \varepsilon \cos \varepsilon} (1 - 2 \sin^2 \frac{1}{2} J) \frac{\alpha + \eta - p}{1 + \frac{1}{2} (\alpha + \eta - p)} \lambda_1$$

$$\alpha = -\frac{1 - \frac{1}{2} \sin^2 \varepsilon}{\sin \varepsilon \cos \varepsilon} (1 + \sin^2 \frac{1}{2} J) \frac{\alpha + \eta - p}{1 + \frac{1}{2} (\alpha + \eta - p)} \lambda_1$$

$$\eta = \alpha \sin^2 \frac{1}{2} J$$

Die Mondbeobachtungen haben mir gegeben

$$\lambda_1 = - 8,382$$

$$\pi_1 = - 7,624$$

Diese Bestimmung von  $\pi_1$  wäre theoretisch betrachtet überflüssig, da  $\pi_1$  aus  $\lambda_1$  folgt, allein ich habe der Controlle wegen diese zweite Bestimmung nicht unterlassen wollen, und im Grunde kann man auch die Bestimmung der übrigen Coefficienten mit demselben Recht auf  $\pi_1$  gründen, wie auf  $\lambda_1$ , da absolut betrachtet  $\pi_1$  und  $\lambda_1$  Grössen derselben Ordnung sind.\*). Gehen wir nun von dem vorstehenden Werthe von  $\lambda_1$  aus, so bekommen wir durch die Relationen des vor. Art.

$$\lambda_2 = + 0,082$$

$$\pi_1 = - 7,533$$

$$\pi_2 = + 0,037$$

$$\pi_3 = + 0,001$$

$$y = + 0,07045$$

$$\alpha = + 0,07087$$

$$\eta = + 0,00014$$

und aus den drei letzten folgt

$$ny = + 5,87$$

$$n\alpha = + 5,90$$

$$n\eta = + 0,01$$

wo für  $n$  die jährliche mittlere Bewegung substituirt worden ist. Man sieht hieraus, dass der Einfluss der Figur der Erde auf die Bewegungen des Perigäums und der Knoten des Mondes keinesweges unmerklich ist, wie Laplace und nach ihm Andere behauptet haben.

Der Unterschied zwischen dem eben berechneten Werthe von  $\pi_1$  und dem aus den Beobachtungen gefundenen beträgt nur 0,091 und giebt eine schöne Bestätigung der Richtigkeit dieser Bestimmungen. Es ist indess hiebei zu bemerken, dass die definitive Festsetzung dieses Unterschiedes erst später erfolgen kann, wenn ich die Berechnung der

\*) Algebraisch betrachtet ist freilich  $\pi_1$  in Bezug auf  $\lambda_1$  eine kleine Grösse erster Ordnung, allein man wird in der Mondtheorie oft auf sehr falsche Schlüsse über die numerische Grösse der Coefficienten hingeführt, wenn man diese nach der algebraischen Ordnung derselben schätzen will.

kleinen, hier weggelassenen, Glieder höherer Ordnung in den Coefficienten  $\lambda_1$  und  $\pi_1$  dargelegt haben werde.

Die kleinen mit  $\lambda_2$  und  $\pi_3$  multiplicirten Glieder habe ich in den Mondtafeln nicht aufgenommen, weil dafür besondere Tafeln hätten berechnet werden müssen, welches ich bei dem geringen Werthe dieser Coefficienten für eine unnöthige Complication hielt.

Benutzen wir noch die oben angeführte Laplace'sche Relation, um die Abplattung der Erde zu berechnen, die aus dem obigen Werthe von  $\lambda_1$  folgt. Aus den Ausdrücken

$$\lambda_1 = -\frac{3A}{4a^3} \sin \epsilon \cos \epsilon \left(1 - \frac{1}{2} \sin^2 J\right) \frac{2 + (\alpha + \eta - p)}{\alpha + \eta - p}$$

$$A = \frac{1}{2} (\rho - \frac{1}{2}\varphi) D^2$$

folgt die Abplattung

$$\rho = \frac{1}{2}\varphi - 2 \left(\frac{a}{D}\right)^2 \frac{1 + \frac{1}{2} \sin^2 J}{\sin \epsilon \cos \epsilon} \cdot \frac{\alpha + \eta - p}{2 + (\alpha + \eta - p)} \lambda_1$$

und mit den Werthen

$$\varphi = \frac{1}{239}; \quad \frac{D}{a} = \sin(57' 0'')$$

so wie mit den übrigen eben angegebenen Zahlenwerthen bekomme ich hieraus

$$\rho = \frac{1}{296}$$

um sehr Weniges grösser, wie der durch die Gradmessungen erlangte Werth.

160.

Wenn man den obigen Werth von  $\lambda_1$  mit dem auch durch Beobachtungen erlangten Werthe der Constante der Luni-Solarpräcession verbindet, so kann man noch ein sehr interessantes Resultat erhalten, nemlich die Bestimmung der numerischen Werthe der Trägheitsmomente der Erde. Nennen wir den Coefficienten der Luni-Solarpräcession  $\zeta$ , so kann der bekannte Ausdruck von  $\zeta$  auf die folgende Form gebracht werden,

$$\zeta = \frac{2(C-A)n'^2}{2Cn''} \left\{ 1 + \frac{m}{4+m} \frac{n^2}{n'^2} \left(1 - \frac{1}{2} \sin^2 J\right) \right\} \cos \epsilon$$

wo  $n''$  die in Bogensekunden auszudrückende Dauer des siderischen Tages bedeutet, und alle übrigen Bezeichnungen dieselben sind wie vorher. Da wir hier  $n'' = n' \cdot 365,25$  setzen dürfen, so ergibt sich aus dem vorstehenden Ausdruck

$$\frac{C-A}{C} = \frac{782,5}{3n' \left\{ 1 + \frac{m}{1+m} \cdot \frac{n^2}{n'^2} (1 - \frac{1}{2} \sin^2 J) \right\} \cos \epsilon} \zeta$$

und setzen wir nach Bessel

$$\zeta = 50''356$$

und nehmen die Werthe der übrigen Grössen so an, wie überhaupt in dieser Abhandlung geschehen ist, so erhalten wir

$$\frac{C-A}{C} = 0,003272$$

Andernteils ist mit hinreichender Genauigkeit

$$\lambda_1 = - \frac{3(C-A)}{2a^2} \frac{\sin \epsilon \cos \epsilon (1 - \frac{1}{2} \sin^2 J)}{\alpha + \eta - p}$$

woraus, wenn wir die Erdmasse  $M$ , die oben = 1 gesetzt wurde, restituiren, und den Aequatoreal-Halbmesser der Erde  $D$  durch den Ausdruck

$$\frac{a}{D} = \sin(57' 0'')$$

einführen, der folgende Ausdruck hervorgeht,

$$C - A = - MD^2 \frac{1}{2} \lambda_1 \frac{\alpha + \eta - p}{\sin \epsilon \cos \epsilon \sin^2(57' 0'')} (1 + \frac{1}{2} \sin^2 J)$$

der in Zahlen verwandelt

$$C - A = MD^2 0,001103$$

giebt. Aus dieser Gleichung, verbunden mit dem obigen Werthe

$$\frac{C-A}{C} = 0,003272$$

bekommt man

$$C = MD^2 \cdot 0,3372$$

$$A = MD^2 \cdot 0,3361$$

Diese aus den Beobachtungen abgeleiteten Werthe zeigen, dass nicht nur die Trägheitsmomente der Erde selbst, sondern auch ihr Unterschied beträchtlich kleiner sind, wie die eines homogenen Revolutionsellipsoids von derselben Abplattung. Denn in einem solchen Ellipsoid, dessen Excentricität der Meridiane mit  $e$  bezeichnet wird, ist

$$C = \frac{1}{2} MD^2$$

$$C - A = \frac{1}{2} MD^2 e^2$$

Substituirt man hierin für die Erde  $\log e = 8,9414$ , so wird

$$C - A = MD^2 0,001328$$

während der oben aus den Beobachtungen gefundene numerische Coef-



ficient nur 0,004103 beträgt. Aehnlicher Weise ist der oben aus den Beobachtungen gefundene numerische Coefficient im Werthe von  $C$  nur nahe  $= \frac{1}{2}$ , während das homogene Revolutionsellipsoid denselben  $= \frac{1}{2}$  verlangt. Diese hier gefundenen Unterschiede in den Trägheitsmomenten und deren Unterschiede geben eine schöne Bestätigung des von Laplace aus ganz anderen Betrachtungen abgeleiteten Satzes, dass die Dichtigkeit der Erde nach ihrem Mittelpunkte zu wächst, und die Excentricitäten ihrer Schichten abnehmen. Denn ausserdem lassen sich die eben gefundenen Unterschiede nur auf zwei Arten erklären; es muss entweder die Figur des Erdkörpers von der eines Revolutionsellipsoids beträchtlich abweichen, oder die hier bei der Berechnung der Trägheitsmomente und ihres Unterschiedes zu Grunde gelegten, aus den Beobachtungen abgeleiteten zwei Coefficienten müssen wesentlich unrichtig sein. Der erste dieser beiden Einwürfe ist durch die Resultate der Gradmessungen vollständig widerlegt, und um den andern zu untersuchen, braucht man nur die Aenderungen zu bestimmen, die mit diesen beiden Coefficienten vorgenommen werden müssen, um die Trägheitsmomente so zu erhalten, wie das homogene Revolutionsellipsoid sie verlangt. Bezeichnet man die beiden Coefficienten, die dieser Hypothese entsprechen, mit  $\zeta'$  und  $\lambda'_1$ , so findet man leicht aus dem Vorhergehenden, dass

$$\zeta' = \frac{5}{2} \cdot \frac{0,004828}{0,003272} \zeta$$

$$\lambda'_1 = \frac{0,004828}{0,004103} \lambda_1$$

wird, und hieraus findet man

während  $\zeta' = 51,10$ ;  $\lambda'_1 = -10,09$

$$\zeta = 50,36$$
;  $\lambda_1 = -8,38$

ist. Beide diese Unterschiede sind aber viel zu gross, als dass sie mit den Beobachtungen verträglich wären. Man kann noch die Frage aufwerfen, wie viel die Constante der Mondparallaxe, die den Mondtafeln zufolge oben  $= 57' 0''$  angenommen wurde, geändert werden müsste, um in Verbindung mit dem durch die Beobachtungen erhaltenen Werthe von  $\lambda_1$  den Unterschied  $C - A$  so zu erhalten, wie das homogene Revolutionsellipsoid ihn verlangt; bezeichnen wir die Constante der Mondparallaxe, die dieser Annahme entspricht, mit  $x$ , so ergibt sich leicht

$$\sin x = \sin(57' 0'') \sqrt{\frac{0,004103}{0,004828}}$$

woraus

$$x = 51' 57''$$

folgt und bedeutend vom wahren Werthe abweicht. Der oben genannte Laplace'sche Satz wird also durch diese Untersuchung bestätigt.

### § 12. Von den durch die Figur des Mondes in der Mondbewegung entstehenden Störungen.

**Berechnung der Unterschiede der Trägheitsmomente des Mondkörpers.**

161.

Es ist schon im vor. § gezeigt worden, dass die jetzt in Betracht zu ziehende Störungfunction der dort angewandten ganz analog ist, und wir können sie daher sogleich aufstellen.

$$\delta\Omega = \frac{3}{4mr^2}(A+II)(\frac{1}{2} - \sin^2\delta) + \frac{3}{4mr^2}(A-II)\cos^2\delta \cos 2w$$

wo ich die Zeichen, die jetzt eine andere Bedeutung bekommen, beibehalten habe, weil daraus keine Verwechselungen entstehen können. Wie früher ist hier  $r$  die Entfernung des Schwerpunkts des Mondes von dem der Erde, und  $m$  die Mondmasse, es ist ferner auch

$$A = C - A, \quad II = C - B$$

aber  $A, B, C$  sind jetzt die Trägheitsmomente des Mondkörpers, und zwar  $C$  das sich auf die Rotationsachse beziehende und von den im Mondäquator liegenden  $A$  und  $B$ ,  $A$  dasjenige, welches sich auf die Hauptachse bezieht, die der Erde zugewandt ist. Es ist ferner jetzt  $\delta$  die Declination des Schwerpunkts der Erde in Bezug auf den Mondäquator und  $w$  der Winkel, den die Hauptachse, auf welche sich  $A$  bezieht, mit einer durch den Radius  $r$  und die Rotationsachse des Mondes gelegten Ebene macht.

162.

Um die Ausdrücke für  $\delta$  und  $w$  zu erhalten, ist zunächst auf den Satz Rücksicht zu nehmen, zufolge dessen der absteigende Knoten des Mondäquators auf der Ecliptik stets mit dem aufsteigenden Knoten der Mondbahn auf der Ecliptik zusammenfällt. In Folge dieses Satzes ist die Neigung der Mondbahn gegen den Mondäquator stets  $= J+J'$ , wenn man mit  $J'$  die Neigung des Mondäquators gegen die Ecliptik bezeich-

net. Da nun vom Monde aus gesehen das Argument der Breite der Erde =  $180^\circ + f + \omega$  ist, so wird

$$\sin \delta = - \sin (J + J') \sin (f + \omega)$$

und bezeichnen wir mit  $\lambda$  den Bogen des Mondäquators zwischen der Frühlingsnachtgleiche und der durch  $r$  und die Rotationsachse des Mondes gelegten Ebene, und wie früher das Supplement der tropischen Länge des aufsteigenden Knotens der Mondbahn auf der Ecliptik mit  $\Theta$ , so wird sogleich

$$\begin{aligned} \cos \delta \sin (\lambda + \Theta) &= - \cos (J + J') \sin (f + \omega) \\ \cos \delta \cos (\lambda + \Theta) &= - \cos (f + \omega) \end{aligned}$$

Es sind nemlich

$$\left[ 180^\circ + f + \omega; \lambda + \Theta; \delta \right]$$

die Seiten eines sphärischen Dreiecks, welchen die Winkel

$$90^\circ, \quad -; \quad J + J'$$

gegenüber liegen. Der zweite in der Bewegung des Mondkörpers statt findende Satz heisst: Dass dieser sich mit gleichförmiger Geschwindigkeit in einem Zeitraum um seine Achse dreht, welcher genau der mittleren Umlaufzeit des Mondes um die Erde gleichkommt. Nennen wir daher die mittlere Mondlänge  $l$ , so hat der Bogen des Mondäquators, welcher sich von der Frühlingsnachtgleiche bis zu der der Erde zugekehrten Hauptachse erstreckt,  $180^\circ + l$  zum Ausdruck, und es wird

$$w = \lambda - l + 180^\circ$$

Die vorstehenden Gleichungen geben hiemit

$$\begin{aligned} \cos \delta \sin w &= \cos (J + J') \sin (f + \omega) \cos (l + \Theta) - \cos (f + \omega) \sin (l + \Theta) \\ \cos \delta \cos w &= \cos (J + J') \sin (f + \omega) \sin (l + \Theta) + \cos (f + \omega) \cos (l + \Theta) \end{aligned}$$

Sowohl die Störungen der Mondlänge wie die physische Libration des Mondes fügen dem Bogen  $l$  periodische Ungleichheiten hinzu, allein alle bis jetzt darüber angestellte Untersuchungen haben über die Merklichkeit solcher Ungleichheiten nichts Entscheidendes hervorbringen können, und sie müssen daher sehr klein sein, weshalb wir hier darauf keine Rücksicht zu nehmen brauchen. Substituirt man daher die vorstehenden Ausdrücke in den obigen Ausdruck für  $\delta\Omega$ , so ergiebt sich

$$\begin{aligned} \delta\Omega = & \frac{3}{4mr^3} (A + \Pi) \left\{ \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{1}{2} \sin^2(J + J') \right] + \frac{1}{2} \sin^2(J + J') \cos 2(f + \omega) \right\} \\ & + \frac{3}{4mr^3} (A - \Pi) \left\{ \cos^4 \frac{1}{2}(J + J') \cos 2(f - l + \omega - \Theta) \right. \\ & \quad \left. + 2 \sin^2 \frac{1}{2}(J + J') \cos^2 \frac{1}{2}(J + J') \cos 2(l + \Theta) \right. \\ & \quad \left. + \sin^4 \frac{1}{2}(J + J') \cos 2(f + l + \omega + \Theta) \right\} \end{aligned}$$

163.

Die periodischen Glieder, die dieser Ausdruck enthält, können wir übergehen, da keins derselben, wenigstens in der niedrigsten Ordnung, bei den Integrationen einen kleinen Divisor bekommen kann. Wir haben also nur die Glieder zu betrachten, die zu den Bewegungen des Perigäums und der Knoten einen Beitrag liefern können, und diese sind das erste Glied in jedem der beiden Hauptglieder von  $\delta\Omega$ . Wenden wir uns wieder zuerst zu den Breitenstörungen, so finden wir durch bloße Berücksichtigung der beiden genannten Glieder, und indem wir nur die erste Potenz von  $\sin \frac{1}{2}(J + J')$  berücksichtigen,

$$\begin{aligned} \left( \frac{d\delta\Omega}{dJ} \right) = & - \frac{3}{2mr^3} (A + \Pi) \sin \frac{1}{2}(J + J') \\ & - \frac{3}{2mr^3} (A - \Pi) \sin \frac{1}{2}(J + J') \cos 2(f - l + \omega - \Theta) \end{aligned}$$

Es ist aber

$$l = g + \omega - \Theta$$

und hiemit wird

$$\cos 2(f - l + \omega - \Theta) = \cos 2(f - g) = 1$$

da hier die Excentricität der Mondbahn zu übergehen ist. Mit Rücksicht auf die Entwicklungen des vor. § erhält man daher

$$\frac{dP}{ndt} = - 2\alpha \sin \frac{1}{2}J + \frac{3}{ma^3} A \sin \frac{1}{2}(J + J')$$

woraus

$$\alpha = \frac{3}{2ma^3} A \frac{\sin \frac{1}{2}(J + J')}{\sin \frac{1}{2}J} *$$

folgt.

\*) Dieser Ausdruck stimmt mit dem Ausdruck

$$\frac{3}{5} \frac{f_0 d \cdot a^5}{f_0 d \cdot a^5} \cdot \frac{\nu}{r^2} \frac{(\lambda + \gamma)}{\gamma} \cdot \frac{(C - A)}{C}$$

der *Mé. cél.* Tome III. p. 261 überein. Laplace giebt dort p. 262 noch ein zweites Glied, welches ich aber auf keine Weise habe finden können.

164.

Gehen wir zu den Längenstörungen über, und berücksichtigen wieder dieselben zwei Glieder von  $\delta\Omega$ , so ergibt sich zuerst, wenn wir die Neigungen ganz übergehen,

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\Omega}{dv}\right) &= -\frac{3}{2mr^3} (A-II) \sin 2(f-l+\omega-\Theta) \\ r \left(\frac{d\delta\Omega}{dr}\right) &= -\frac{3}{4mr^3} (A+II) \\ &\quad -\frac{9}{4mr^3} (A-II) \cos 2(f-l+\omega-\Theta) \end{aligned}$$

Da hier die erste Potenz der Excentricität berücksichtigt werden muss, so wird

$$\begin{aligned} \sin 2(f-l+\omega-\Theta) &= \sin 2(f-g) = 4e \sin g \\ \cos 2(f-l+\omega-\Theta) &= \cos 2(f-g) = 1 \\ \frac{1}{r^3} &= \frac{1}{a^3} + \frac{3e}{a^3} \cos g \end{aligned}$$

und demzufolge

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\delta\Omega}{dv}\right) &= -\frac{6e}{ma^3} (A-II) \sin g \\ r \left(\frac{d\delta\Omega}{dr}\right) &= -\left\{\frac{3}{ma^3} A - \frac{3}{2ma^3} II\right\} \\ &\quad -\left\{\frac{9e}{ma^3} A - \frac{9e}{2ma^3} II\right\} \cos g \end{aligned}$$

Hieraus erhält man auf dieselbe Art wie im Art. 155

$$T_0 = \frac{3e}{ma^3} (3II - 2A) \sin \gamma$$

und

$$\frac{dW_0}{ndt} = -2ey \sin \gamma + \frac{3e}{ma^3} (3II - 2A) \sin \gamma$$

woraus

$$y = \frac{3}{2ma^3} (3II - 2A) *$$

sich ergibt.

165.

Wenden wir diese Ausdrücke von  $y$  und  $\alpha$  an, um zu untersuchen, welche Ausdrücke sich daraus für die Unterschiede der Trägheitsmomente des Mondkörpers ergeben. Führen wir zu dem Ende den mittleren Mondhalbmesser  $d$  ein, welcher mit  $a$  durch den Ausdruck

\*) Diesen Theil der Bewegung des Perigäums hat Laplace, so viel mir bekannt ist, gar nicht entwickelt.

$$\frac{d}{a} = \sin(15' 33'')$$

verbunden ist. Es ergibt sich hiemit erstens

$$A = md^2 \frac{2 \sin \frac{1}{2} J}{9 \sin \frac{1}{2} (J+J')} \frac{\alpha}{\sin^2(15' 33'')}$$

$$3II - 2A = md^2 \frac{\frac{2}{3} y}{\sin^2(15' 33'')}$$

und hieraus

$$II = md^2 \left\{ \frac{4 \sin \frac{1}{2} J}{9 \sin \frac{1}{2} (J+J')} \alpha + \frac{2}{3} y \right\} \frac{1}{\sin^2(15' 33'')}$$

166.

Im Art. 103 wurden die Unterschiede ermittelt, die zwischen den berechneten und den beobachteten Werthen der Bewegungen des Perigäums und der Knoten des Mondes statt finden, nachdem auf die störende Kraft der Sonne, des Mondes, der Planeten und der Figur der Erde Rücksicht genommen worden ist. Diese Unterschiede müssen so lange, bis eine andere Ursache derselben annehmbar gemacht werden kann, der Wirkung der Figur des Mondes zugeschrieben werden, und es sollen hier die Werthe der Unterschiede der Trägheitsmomente des Mondkörpers berechnet werden, die daraus folgen. Schreiben wir hier *blos*  $y$  und  $\alpha$  statt der dort eingeführten Zeichen  $y'$  und  $\alpha'$ , so wurde in Theilen des Kreisradius gefunden,

$$y = + 0,0000000908$$

$$\alpha = + 0,0000001659$$

Setzt man ausserdem  $J' = 1^\circ 32'$ , und substituirt diese Werthe in die Ausdrücke des vor. Art., so erhält man

$$A = C - A = md^2 0,00416$$

$$II = C - B = md^2 0,00375$$

$$B - A = md^2 0,00041$$

Man erkennt sofort hieraus, dass die theoretische Bedingung

$$C > B > A$$

für das Stattfinden der beiden in Bezug auf die Rotationsbewegung des Mondes vorhandenen Sätze, die oben angeführt worden, sich in diesen numerischen Resultaten ausspricht, aber sie weichen nicht unbedeutend von den Werthen ab, die man aus den früher gefundenen Werthen der Verhältnisse  $\frac{C-A}{B}$ ,  $\frac{C-B}{A}$ ,  $\frac{B-A}{C}$  folgern kann. Es muss je-

doch hiebei bemerkt werden, dass die Werthe dieser Verhältnisse, die früher auf verschiedene Arten gefolgert worden sind, unter einander auch grosse Unterschiede zeigen. Es liegen namentlich drei Bestimmungen derselben vor, die von Laplace aus der Annahme, dass der Mondkörper ursprünglich flüssig gewesen ist, berechnete, und die von Nicollet und Wichmann gänzlich unabhängig von einander durch die Untersuchungen über die Libration des Mondes erhaltenen, die unter einander wesentliche Unterschiede darbieten. Ich führe hievon an, dass von Laplace

$$\frac{C-B}{C-A} \text{ nahe} = \frac{1}{4}$$

von Nicollet

$$\frac{C-B}{C-A} = 0,056$$

und von Wichmann

$$\frac{C-B}{C-A} = 0,419$$

gefunden worden ist, während oben dasselbe Verhältniss sich nahe = 0,9 ergeben hat. Auch sind die hier gefundenen Werthe von  $C-A$  und  $C-B$  weit grösser, als die, welche aus den Bestimmungen jener Astronomen folgen. Beide, Nicollet und Wichmann, sprechen sich in ihren Abhandlungen über die Libration des Mondes dahin aus, dass die Resultate, die sie erhalten haben, nicht befriedigend sind, und die obige Bestimmung der Unterschiede der Trägheitsmomente des Mondkörpers kann nicht als entscheidend betrachtet werden. Es scheint in der Theorie der Rotation des Mondes noch etwas verborgen zu liegen, worüber von der Zukunft Aufklärung erwartet werden muss.

### § 13. Entwicklung des von der Mondmasse abhängigen Theils der Knotenbewegung des Mondes.

167.

Nehmen wir den im Art. 38 entwickelten Ausdruck von  $Pd$  vor, den wir für unsern jetzigen Zweck wie folgt schreiben dürfen,

$$\begin{aligned} \frac{dP}{ndt} = & -2\alpha \sin \frac{1}{2}J_0 - G \left(\frac{a}{r}\right)^2 \sin \frac{1}{2}J \cos (g-g'+\omega-\omega'+\delta N) \\ & + G \left(\frac{a}{r}\right)^2 \sin \frac{1}{2}J \cos (g+g'+\omega+\omega'+\delta N) \end{aligned}$$

wo

$$G = \frac{m}{1+m} \frac{a}{a'} \frac{1}{u}$$

ist. Da

$$P = 2 \sin \frac{1}{2} J \sin \delta N$$

$$Q = 2 \sin \frac{1}{2} J \cos \delta N$$

ist, so kann der vorstehende Ausdruck in den folgenden umgeformt werden,

$$\begin{aligned} \frac{dP}{ndt} = & -2\alpha \sin \frac{1}{2} J_0 - \frac{1}{2} G \left(\frac{a}{r}\right)^2 Q \cos (g-g'+\omega-\omega') \\ & + \frac{1}{2} G \left(\frac{a}{r}\right)^2 P \sin (g-g'+\omega-\omega') \\ & + \frac{1}{2} G \left(\frac{a}{r}\right)^2 Q \cos (g+g'+\omega+\omega') \\ & - \frac{1}{2} G \left(\frac{a}{r}\right)^2 P \sin (g+g'+\omega+\omega') \end{aligned}$$

168.

Berücksichtigen wir nun das Quadrat der störenden Kraft, wobei die kleine Aenderung  $\delta K$  übergangen werden kann, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{dP}{ndt} = & -2\alpha \sin \frac{1}{2} J_0 + \left\{ \begin{array}{l} G \sin \frac{1}{2} J_0 \sin (g-g'+\omega-\omega') \\ -G \sin \frac{1}{2} J_0 \sin (g+g'+\omega+\omega') \end{array} \right\} ndz \\ & + \left\{ \begin{array}{l} 2G \sin \frac{1}{2} J_0 \cos (g-g'+\omega-\omega') \\ -2G \sin \frac{1}{2} J_0 \cos (g+g'+\omega+\omega') \end{array} \right\} \nu \\ & + \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} G \sin (g-g'+\omega-\omega') \\ -\frac{1}{2} G \sin (g+g'+\omega+\omega') \end{array} \right\} \delta P \\ & + \left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{2} G \cos (g-g'+\omega-\omega') \\ +\frac{1}{2} G \cos (g+g'+\omega+\omega') \end{array} \right\} \delta Q \end{aligned}$$

Setzen wir ferner

$$ndz = a \sin (g-g'+\omega-\omega') + a' \sin (g+g'+\omega+\omega')$$

$$\nu = b \cos (g-g'+\omega-\omega') + b' \cos (g+g'+\omega+\omega')$$

$$\delta P = k \sin (g-g'+\omega-\omega') + k' \sin (g+g'+\omega+\omega')$$

$$\delta Q = l \cos (g-g'+\omega-\omega') + l' \cos (g+g'+\omega+\omega')$$

substituieren diese, und nehmen blos auf die daraus entstehenden constanten Glieder Rücksicht, so wird, weil die Summe dieser Glieder in der vorstehenden Gleichung Null werden muss,

$$\begin{aligned} \alpha = & \frac{1}{2} (a + 2b - a' - 2b') G \\ & + \frac{1}{8 \sin \frac{1}{2} J_0} (k - k' - l + l') G \end{aligned}$$



169.

Durch Hülfe der im Art. 52 gegebenen numerischen Werthe erhalten wir in Theilen des Kreisradius

$$G = 0.0004144$$

und aus dem Art. 66 ergibt sich

$$a = - 121.368 ; a' = + 0.760$$

$$b = + 56.948 ; b' = - 0.412$$

$$k = - 3.078 ; k' = + 2.884$$

$$l = - 3.847 ; l' = - 2.880$$

hiemit giebt der oben entwickelte Ausdruck

$$\alpha = - 0.00653$$

und

$$n\alpha = - 0.54$$

als den Beitrag, den die Mondmasse zu der Bewegung der Knoten liefert. Der hiemit in Verbindung stehende Werth von  $\eta$  ist zu klein, um Berücksichtigung zu verdienen.

§ 14. Von der Einwirkung der Planeten auf die Bewegungen des Perigäums und der Knoten des Mondes, auf die Coefficienten der von der Figur der Erde bewirkten Ungleichheiten, so wie auf die Evectionen und die Variation.

170.

Die hier in Betracht kommende Störungsfunction habe ich schon in meiner Abhandlung über die Ungleichheit langer Periode, die  $g+16g'-18g''$  zum Argument hat,\*) ausführlich und weit vollständiger entwickelt, wie bis dahin der Fall war; ich werde mich aus diesem Grunde hier bei der Entwicklung derselben kurz fassen dürfen. Sie nimmt zuerst die allgemeine Form an,

$$\Omega = \frac{m''}{1+m} \frac{1}{\sqrt{(X-x)^2 + (Y-y)^2 + (Z-z)^2}} - \frac{m''}{1+m} \frac{Xx + Yy + Zz}{(X^2 + Y^2 + Z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

wo wie früher  $m, x, y, z$  die Masse und die Coordinaten des Mondes, und ausserdem  $m'', X, Y, Z$  die Masse und die rechtwinklichen Coordi-

\*) *Memoirs of the Royal Astr. Society.* Vol. XVI.

naten eines Planeten in Bezug auf die Erde sind. Nennt man die Entfernung des Planeten von der Erde  $R$ , und löst die Wurzelgrösse des ersten Gliedes von  $\Omega$  in eine unendliche Reihe auf, so erhält man mit Weglassung der Glieder, die nichts geben können,

$$\Omega = -\frac{1}{2} \frac{m''}{1+m} \frac{r^2}{R^2} + \frac{1}{2} \frac{m''}{1+m} \frac{(Xx+Yy+Zz)^2}{R^2}$$

Bezeichnet man die rechtwinklichen Coordinaten des Planeten in Bezug auf die Sonne mit  $x'', y'', z''$ , und die analogen der Erde mit  $x', y', z'$ , so bekommt man

$$\begin{aligned} x &= r \cos 2\frac{1}{2}J \cos (f+\omega+\theta) + r \sin 2\frac{1}{2}J \cos (f+\omega-\theta) \\ y &= r \cos 2\frac{1}{2}J \sin (f+\omega+\theta) - r \sin 2\frac{1}{2}J \sin (f+\omega-\theta) \\ z &= 2r \sin \frac{1}{2}J \cos \frac{1}{2}J \sin (f+\omega) \\ x' &= r' \cos (f'+\pi') \\ y' &= r' \sin (f'+\pi') \\ z' &= 0 \\ x'' &= r'' \cos 2\frac{1}{2}J'' \cos (f''+\omega''+\theta'') + r'' \sin 2\frac{1}{2}J'' \cos (f''+\omega''-\theta'') \\ y'' &= r'' \cos 2\frac{1}{2}J'' \sin (f''+\omega''+\theta'') - r'' \sin 2\frac{1}{2}J'' \sin (f''+\omega''-\theta'') \\ z'' &= 2r'' \sin \frac{1}{2}J'' \cos \frac{1}{2}J'' \sin (f''+\omega'') \end{aligned}$$

wo die Zeichen, die schon früher in dieser Abhandlung vorgekommen sind, dieselbe Bedeutung haben, mit der Ausnahme jedoch, dass hier  $\theta$  nicht das Supplement der siderischen Länge des aufsteigenden Mondknotens auf der Ecliptik, sondern diese Länge selbst bedeutet. Dem analog sind in Bezug auf den Planeten  $r'', f'', J'', \omega'', \theta''$ , Radius Vector, wahre Anomalie, Neigung der Bahn gegen die Ecliptik, Entfernung des Perihels vom aufsteigenden Knoten, Länge des aufsteigenden Knotens. Da nun

$$Xx+Yy+Zz = x''x+y''y+z''z - (x'x+y'y+z'z)$$

und wenn man die Sonnenmasse zur Einheit macht,

$$\frac{1}{1+m} = u^2 \frac{a'^2}{a^2}$$

ist, so wird, wenn man die Glieder weglässt, die in Bezug auf die Neigungen von einer höheren Ordnung wie die zweite sind,

$$\begin{aligned} a\Omega &= \frac{1}{2}m''u^2 \left(\frac{r}{a}\right)^2 \left(\frac{a'}{R}\right)^2 (1 - 6 \sin 2\frac{1}{2}J) \\ &\quad - \frac{1}{2}m''u^2 \left(\frac{r}{a}\right)^2 \left(\frac{a'}{R}\right)^2 \sin 2\frac{1}{2}J'' \cdot a^2 \left(\frac{r''}{a''}\right)^2 \{1 - \cos(2f''+2\omega'')\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &+ \frac{1}{2} m'' u^2 \left(\frac{r}{a}\right)^2 \left(\frac{a'}{R}\right)^5 \cos^4 \frac{1}{2} J \left\{ \left(\frac{r'}{a'}\right)^2 \cos [(2f+2\omega-2\omega')-2f'] \right. \\
 &\quad - 2a \left(\frac{r'}{a'}\right) \left(\frac{r''}{a''}\right) \cos^2 \frac{1}{2} J'' \cos [(2f+2\omega-2\omega')-f'-f''+\omega'-\omega''] \\
 &\quad + a^2 \left(\frac{r''}{a''}\right)^2 \cos^4 \frac{1}{2} J'' \cos [(2f+2\omega-2\omega')-2f''+2\omega'-2\omega''] \\
 &\quad - 2a \left(\frac{r'}{a'}\right) \left(\frac{r''}{a''}\right) \sin^2 \frac{1}{2} J'' \cos [(2f+2\omega-2\omega')-f'+f''+\omega'+\omega''] \\
 &\quad \left. + 2a^2 \left(\frac{r''}{a''}\right)^2 \sin^2 \frac{1}{2} J'' \cos [(2f+2\omega-2\omega')+2\omega'] \right\} \\
 &+ \frac{1}{2} m'' u^2 \left(\frac{r}{a}\right)^2 \left(\frac{a'}{R}\right)^5 \sin^2 \frac{1}{2} J \left\{ \left(\frac{r'}{a'}\right)^2 \cos (2f+2\omega) \right. \\
 &\quad - a \left(\frac{r'}{a'}\right) \left(\frac{r''}{a''}\right) \cos [(2f+2\omega)-f'+f''-\omega'+\omega''] \\
 &\quad - a \left(\frac{r'}{a'}\right) \left(\frac{r''}{a''}\right) \cos [(2f+2\omega)+f'-f''+\omega'-\omega''] \\
 &\quad \left. + a^2 \left(\frac{r''}{a''}\right)^2 \cos (2f+2\omega) \right\} \\
 &- 3m'' u^2 \left(\frac{r}{a}\right)^2 \left(\frac{a'}{R}\right)^5 \sin \frac{1}{2} J \sin \frac{1}{2} J'' \left\{ a \left(\frac{r'}{a'}\right) \left(\frac{r''}{a''}\right) \cos [(2f+2\omega-\omega')-f'-f''-\omega''] \right. \\
 &\quad - a^2 \left(\frac{r''}{a''}\right)^2 \cos [(2f+2\omega-\omega')-2f''+\omega'-2\omega''] \\
 &\quad - a \left(\frac{r'}{a'}\right) \left(\frac{r''}{a''}\right) \cos [(2f+2\omega-\omega')-f'+f''+\omega''] \\
 &\quad \left. + a^2 \left(\frac{r''}{a''}\right)^2 \cos [(2f+2\omega-\omega')+2\omega'] \right\} \\
 &+ \frac{1}{2} m'' u^2 \left(\frac{r}{a}\right)^2 \left(\frac{a'}{R}\right)^5 \sin^2 \frac{1}{2} J \left\{ \left(\frac{r'}{a'}\right)^2 \cos (2\omega'+2f') \right. \\
 &\quad - 2a \left(\frac{r'}{a'}\right) \left(\frac{r''}{a''}\right) \cos (2\omega'+f'+f''-\omega'+\omega'') \\
 &\quad \left. + a^2 \left(\frac{r''}{a''}\right)^2 \cos (2\omega'+2f''-2\omega'+2\omega'') \right\} \\
 &+ 3m'' u^2 \left(\frac{r}{a}\right)^2 \left(\frac{a'}{R}\right)^5 \sin \frac{1}{2} J \sin \frac{1}{2} J'' \left\{ a \left(\frac{r'}{a'}\right) \left(\frac{r''}{a''}\right) \cos (\omega'+f'+f''+\omega'') \right. \\
 &\quad - a^2 \left(\frac{r''}{a''}\right)^2 \cos (\omega'+2f''-\omega'+2\omega'') \\
 &\quad - a \left(\frac{r'}{a'}\right) \left(\frac{r''}{a''}\right) \cos (\omega'+f'-f''-\omega'') \\
 &\quad \left. + a^2 \left(\frac{r''}{a''}\right)^2 \cos (\omega'-\omega'') \right\}
 \end{aligned}$$

Ausser den schon erklärten Zeichen, von welchen ich um mehrerer Deutlichkeit willen

$$u = \frac{\pi'}{\pi}, \quad \omega = \pi - \theta, \quad \omega' = \pi' - \theta, \quad \omega'' = \pi'' - \theta''$$

wiederhole, ist hier noch

$$a = \frac{a''}{a'}, \quad \omega' = \pi' - \theta''$$

gesetzt worden.

Zur Berechnung der Einwirkung der Planeten auf die Bewegungen des Perigäums und der Knoten braucht man nur die Glieder niedrigster Ordnung in Bezug auf die Excentricitäten und die Neigungen anzuwenden, denn ich habe mich durch die Rechnung davon überzeugt, dass die Glieder der höheren Ordnungen nichts Merkliches geben können. Nehmen wir zuerst nur Rücksicht auf die erste Potenz der störenden Kraft, so ist der Theil der Störungfunction, welcher hiebei in Anwendung kommt,

$$a\Omega = \frac{1}{2}m''u^2 \left(\frac{r}{a}\right)^2 \left(\frac{a'}{R}\right)^3 (1 - 6 \sin^2 \frac{1}{2}J)$$

und für die Bewegung des Perigäums kann das hier mit  $\sin^2 \frac{1}{2}J$  multiplicirte Glied übergangen werden, während es bei der Bewegung der Knoten einzig in Betracht kommt. Von der Entwicklung von  $\left(\frac{a'}{R}\right)^3$  brauchen wir nur das constante Glied, und setzt man daher allgemein

$$(1 - 2a \cos x + a^2)^{-\frac{3}{2}} = A_0^{(n)} + 2A_1^{(n)} \cos x + 2A_2^{(n)} \cos 2x + \dots$$

so wird hier

$$\left(\frac{a'}{R}\right)^3 = A_0^{(3)}$$

Substituirt man zugleich

$$\left(\frac{r}{a}\right)^2 = 1 - 2e \cos g$$

so wird zur Erlangung der Bewegung des Perigäums

$$\begin{aligned} \left(\frac{da\Omega}{dv}\right) &= 0 \\ r \left(\frac{da\Omega}{dr}\right) &= \frac{1}{2}m''u^2 A_0^{(3)} - em''u^2 A_0^{(3)} \cos g \end{aligned}$$

und hieraus auf dieselbe Art wie in den vor. §§

$$\frac{dW_0}{ndt} = -2ye \sin \gamma + \frac{1}{2}em''u^2 A_0^{(3)} \sin \gamma$$

woraus

$$y = \frac{1}{2}m''u^2 A_0^{(3)}$$

folgt. Der obige Ausdruck von  $a\Omega$  giebt ferner

$$\left(\frac{d\Omega}{dJ}\right) = -\frac{1}{2}m''u^2 A_0^{(3)} \sin \frac{1}{2}J$$

woraus

$$\frac{dP}{ndt} = -2a \sin \frac{1}{2}J + \frac{1}{2}m''u^2 A_0^{(3)} \sin \frac{1}{2}J$$

und

$$\alpha = \frac{1}{2} m'' u^2 A_0^{(3)}$$

also  $\alpha = y$  folgt.

172.

In der Bewegung des Perigäums ist das Product der störenden Kraft der Sonne mit der störenden Kraft der Planeten nicht unmerklich, man braucht jedoch auch hier nur die grössten Glieder zu betrachten, und diese entstehen aus der Evection und der Variation. Der Theil des obigen Ausdrucks der störenden Kraft, welcher hiebei in Betracht kommt ist, wenn man für die wahren Anomalien der Planeten die mittleren substituirt, da die Excentricitäten derselben auch hier nicht in Betracht kommen,

$$a\Omega = \frac{1}{2} m'' u^2 \left(\frac{r}{a}\right)^2 \left(\frac{a'}{R}\right)^5 \left\{ \cos [(2f + 2\omega - 2\omega') - 2g'] \right. \\ \left. - 2a \cos [(2f + 2\omega - 2\omega') - g' - g'' + \omega' - \omega''] \right. \\ \left. + a^2 \cos [(2f + 2\omega - 2\omega') - 2g'' + 2\omega' - 2\omega''] \right\}$$

oder, da der im vor. Art. eingeführten Bezeichnung gemäss,

$$\left(\frac{a'}{R}\right)^5 = A_0^{(5)} + 2A_1^{(5)} \cos (g' - g'' + \omega' - \omega'') + 2A_2^{(5)} \cos 2(g' - g'' + \omega' - \omega'') + \dots$$

wird,

$$a\Omega = \frac{1}{2} u^2 K \left(\frac{r}{a}\right)^2 \cos (2f - 2g' + 2\omega - 2\omega')$$

wenn man den für jeden Planeten verschiedenen Theil mit  $K$  bezeichnet, das ist

$$K = m'' \{A_0^{(5)} - 2a A_1^{(5)} + a^2 A_2^{(5)}\}$$

setzt. Wir müssen nun von  $T_0$  und  $G_0$  die Glieder der zweiten Abtheilung haben, die mit den Argumenten  $-1, 2, -2, 1, 1, -2, 1, 2, -2$  behaftet sind, und diese ergeben sich aus dem obigen Ausdruck von  $a\Omega$ , wenn man denselben mit den betreffenden Factoren der Artt. 26 und 33 multiplicirt, und von  $r$  und  $f$  absieht. Da wir nur bis zur ersten Potenz von  $e$  zu gehen brauchen, so giebt der Art. 26 für  $T_0$

$$Q^{-1,2} = 6e; \quad Q^{1,1} = -6; \quad Q^{1,2} = -4e$$

und der Art. 33 für  $G_0$

$$U^{-1,2} = 0; \quad U^{1,1} = -4; \quad U^{1,2} = -2e$$

und hiemit wird

$$\begin{aligned}
 T_0 &= \frac{1}{2} e u^2 K \sin (-\gamma + 2g - 2g' + 2\omega - 2\omega') \\
 &\quad - \frac{1}{2} u^2 K \sin (\gamma + g - 2g' + 2\omega - 2\omega') \\
 &\quad - 3 e u^2 K \sin (\gamma + 2g - 2g' + 2\omega - 2\omega') \\
 G_0 &= -3 u^2 K \sin (\gamma + g - 2g' + 2\omega - 2\omega') \\
 &\quad - \frac{1}{2} e u^2 K \sin (\gamma + 2g - 2g' + 2\omega - 2\omega')
 \end{aligned}$$

Da nun hier

$$r \left( \frac{dT_0}{dr} \right) = 2T_0 - G_0; \quad U_0 = T_0 - G_0$$

ist, so wird

$$\begin{aligned}
 \left( \frac{dT_0}{dg} \right) &= 9 e u^2 K \cos (-\gamma + 2g - 2g' + 2\omega - 2\omega') \\
 &\quad - \frac{1}{2} u^2 K \cos (\gamma + g - 2g' + 2\omega - 2\omega') \\
 &\quad - 6 e u^2 K \cos (\gamma + 2g - 2g' + 2\omega - 2\omega') \\
 r \left( \frac{dT_0}{dr} \right) &= 9 e u^2 K \sin (-\gamma + 2g - 2g' + 2\omega - 2\omega') \\
 &\quad - 6 u^2 K \sin (\gamma + g - 2g' + 2\omega - 2\omega') \\
 &\quad - \frac{1}{2} e u^2 K \sin (\gamma + 2g - 2g' + 2\omega - 2\omega') \\
 U_0 &= \frac{1}{2} e u^2 K \sin (-\gamma + 2g - 2g' + 2\omega - 2\omega') \\
 &\quad - \frac{1}{2} u^2 K \sin (\gamma + g - 2g' + 2\omega - 2\omega') \\
 &\quad - \frac{1}{2} e u^2 K \sin (\gamma + 2g - 2g' + 2\omega - 2\omega')
 \end{aligned}$$

Da ferner

$$T = \left( \frac{dT_0}{dg} \right) n \delta z + r \left( \frac{dT_0}{dr} \right) \nu - 2 U_0 \delta \frac{h_0}{k}$$

ist, so müssen wir, um die Glieder zu erhalten die zur Bewegung des Perigäums beitragen,

$$\begin{aligned}
 n \delta z &= k \sin (g - 2g' + 2\omega - 2\omega') + l \sin (2g - 2g' + 2\omega - 2\omega') \\
 \nu &= k' \cos (g - 2g' + 2\omega - 2\omega') + l' \cos (2g - 2g' + 2\omega - 2\omega') \\
 \delta \frac{h_0}{k} &= k'' \cos (g - 2g' + 2\omega - 2\omega') + l'' \cos (2g - 2g' + 2\omega - 2\omega')
 \end{aligned}$$

setzen, diese substituieren, und nur die in den Producten mit  $\sin \gamma$  multiplicirten Glieder beibehalten. Es ergiebt sich hiemit

$$T = \left\{ \left( \frac{1}{2} k - 3k' + \frac{1}{2} k'' \right) + \left( \frac{1}{2} l - \frac{2}{3} l' + 6l'' \right) e \right\} u^2 K \sin \gamma$$

und hieraus auf dieselbe Art wie oben

$$y = \left( \frac{1}{2} k - \frac{1}{2} k' + \frac{1}{2} k'' \right) \frac{u^2 K}{\sigma} + \left( \frac{1}{4} l - \frac{2}{3} l' + 3l'' \right) u^2 K$$

173.

Das Product derselben störenden Kräfte hat auch eine kleine Wirkung auf die Bewegung der Knoten. Um diese zu ermitteln müssen wir die folgenden Glieder der Störungfunction des Art. 170 vornehmen.

$$a\Omega = \frac{1}{4}m''u^2\left(\frac{r}{a}\right)^2 \sin 2\frac{1}{2}J \left\{ \left(\frac{r'}{a'}\right)^2 \cos(2\omega' + 2f'') - 2a\left(\frac{r'}{a'}\right)\left(\frac{r''}{a''}\right) \cos(2\omega' + f' + f'' - \omega' + \omega'') + a^2\left(\frac{r''}{a''}\right)^2 \cos(2\omega' + 2f'' - 2\omega' + 2\omega'') \right\}$$

Machen wir hierin die Excentricitäten gleich Null, und substituiren den Ausdruck für  $\left(\frac{a'}{R}\right)^5$  des vor. Art., so wird

$$a\Omega = \frac{1}{4}u^2K \sin 2\frac{1}{2}J \cos(2g' + 2\omega')$$

wo  $K$  dieselbe Grösse ist wie oben. Durch Multiplication mit den Factoren des Art. 49 bekommen wir hieraus

$$R = \frac{1}{4}u^2K \sin(2g' + 2\omega')$$

$$Y = -\frac{1}{4}u^2K \cos(2g' + 2\omega')$$

und setzen wir ferner

$$\delta P = -p \sin(2g' + 2\omega'); \quad \delta Q = p \cos(2g' + 2\omega')$$

so wird

$$B = R\delta P + Y\delta Q = -\frac{1}{4}u^2Kp$$

und hieraus wie oben

$$\alpha = -\frac{3u^2Kp}{8 \sin \frac{1}{2}J}$$

174.

Um die Zahlenwerthe der eben entwickelten Ausdrücke zu erhalten, habe ich die folgenden Werthe angewandt.

	Merkur	Venus	Mars	Jupiter	Saturn
$m'' =$	$\frac{1}{3000000}$	$\frac{1}{408124}$	$\frac{1}{3200000}$	$\frac{1}{1050}$	$\frac{1}{2500}$
$\log a =$	9.58782	9.8593375	0.18290	0.7162344	0.9794960
$A_0^{(8)} =$	1.4359	4.9960	0.9692	0.0077267	0.001181
$A_0^{(5)} =$	2.5658	42.885	2.3140	0.00033035	0.00001356
$A_1^{(5)} =$	1.9560	41.700	2.2042	0.00014856	0.000003483
$A_2^{(5)} =$	1.2086	38.797	1.9597	0.000048834	0.000000635

In Bezug auf diese *A* Coefficienten habe ich eine Bemerkung zu machen, da ich von der gewöhnlichen Art sie zu betrachten etwas abgewichen bin. Wenn man sie durch die bekannten, dafür vorhandenen unendlichen Reihen berechnen will, so muss  $a < 1$  sein, aber die Werthe, die sie für  $a > 1$  annehmen, stehen mit jenen in einfacher Beziehung. Denn es ist

$$\left(1 - 2a \cos x + a^2\right)^{-\frac{n}{2}} = a^{-n} \left(1 - \frac{2}{a} \cos x + \frac{1}{a^2}\right)^{-\frac{n}{2}}$$

bezeichnet man daher die Entwicklung der Wurzelgrösse rechter Hand dieser Gleichung, wo  $a > 1$  anzunehmen ist, mit  $\sum_{-\infty}^{+\infty} B_i^{(n)} \cos ix$ , so ist offenbar

$$A_i^{(n)} = \frac{B_i^{(n)}}{a^n}$$

Bedient man sich hingegen zur Berechnung der *A* Coefficienten der endlichen Ausdrücke, die die Theorie der elliptischen Functionen darbietet, so lassen sich diese so stellen, dass sie sowohl für  $a > 1$  wie für  $a < 1$  angewandt werden können. Ferner, die bekannten endlichen Ausdrücke, die die Differentialquotienten der *A* Coefficienten nach  $a$  geben, lassen sich ohne Weiteres sowohl auf den Fall  $a > 1$  wie auf  $a < 1$  anwenden. Durch diese Bemerkung erspart man sich die Entwicklung von doppelten Ausdrücken der Störungen, von welchen die einen bloß für einen unteren, und die anderen bloß für einen oberen störenden Planeten Geltung haben, und kann ein und dasselbe System von Ausdrücken in beiden Fällen anwenden.

Substituirt man nun die obigen Zahlenwerthe in die Ausdrücke für  $y$  und  $\alpha$  des Art. 171, so bekommt man

$$\begin{aligned} &+ 0,00042 \text{ von Merkur} \\ &0.01078 \text{ » Venus} \\ &0.00027 \text{ » Mars} \\ &0.00648 \text{ » Jupiter} \\ &0.00030 \text{ » Saturn} \end{aligned}$$

$$y = \alpha = + 0,01825$$

und hieraus

$$ny = n\alpha = + 1,52$$

welches der Werth ist, den die erste Annäherung giebt.

Substituirt man ferner die obigen numerischen Werthe in den Ausdruck für  $K$  des vorvor. Art., so ergibt sich in Theilen des Kreisradius



$$\begin{array}{r}
 + 0,000000411 \text{ von Merkur} \\
 0.000007000 \text{ » Venus} \\
 0.000000047 \text{ » Mars} \\
 0.000000102 \text{ » Jupiter} \\
 0.000000000 \text{ » Saturn} \\
 \hline
 \end{array}$$

$$K = + 0,000007560$$

Die Artt. 66 und 69 geben

$$\begin{array}{l}
 k = + 4467,0; \quad k' = - 2084,6; \quad k'' = - 329,1 \\
 l = + 2145,0; \quad l' = - 1521,8; \quad l'' = + 920,7
 \end{array}$$

und hieraus folgt

$$\begin{array}{l}
 \frac{3}{4} k - \frac{3}{4} k' + \frac{3}{4} k'' = + 7905,5 \\
 \frac{1,5}{4} l - \frac{2,7}{8} l' + 3 l'' = + 15941,9
 \end{array}$$

Der Ausdruck des vorvor. Art. für  $y$  giebt hiemit  $y = + 0,00689$ , und fügt man dieses dem Werthe von  $y$  der ersten Annäherung, nemlich  $y = + 0,01825$  hinzu, so bekommt man vollständig

$$y = + 0,02514$$

und

$$ny = + 2,10$$

Man sieht, dass die Glieder zweiter Ordnung hier mehr wie den dritten Theil der Glieder erster Ordnung betragen.

Der Art. 66 giebt ferner

$$p = + 485''$$

substituirt man diesen Werth in den Ausdruck von  $\alpha$  des vor. Art., so bekommt man  $\alpha = - 0,00018$ , und fügt man den Werth der ersten Annäherung, nemlich  $\alpha = + 0,01825$ , hinzu, so ergibt sich vollständig

$$\alpha = + 0,01807$$

und

$$n\alpha = + 1,50$$

Diese Werthe sind in Art. 103 angewandt worden.

175.

Wir kommen jetzt zu den von den Planeten bewirkten Gliedern, deren Argumente denen der von der Figur der Erde bewirkten analog

sind. Unter diesen sind diejenigen die grössten, die aus der Aenderung der Erdbahn im Raume entstehen. Sei

$$\frac{dp'}{\cos i' dt} = b + b' t, \quad \frac{dq'}{\cos i' dt} = c + c' t$$

wo die Einheit von  $t$  Ein Julianisches Jahr sein soll. Substituiren wir diese in die Ausdrücke des Art. 13, in welchen wir hier zufolge des § 11 die Glieder  $n\alpha Q$  und  $n\alpha P$  weglassen können, so bekommen wir

$$\frac{dP}{dt} = (b + b' t) \cos \theta_1 + (c + c' t) \sin \theta_1$$

$$\frac{dQ}{dt} = (b + b' t) \sin \theta_1 - (c + c' t) \cos \theta_1$$

wo  $\theta_1$  das Supplement der siderischen Länge des aufsteigenden Mondknotens bedeutet. Da

$$\theta_1 = n(\alpha + \eta) t + \text{const.}$$

so giebt die Integration

$$\begin{aligned} \delta P &= \left\{ \frac{b}{n(\alpha + \eta)} + \frac{c'}{n^2(\alpha + \eta)^2} \right\} \sin \theta_1 - \left\{ \frac{c}{n(\alpha + \eta)} - \frac{b'}{n^2(\alpha + \eta)^2} \right\} \cos \theta_1 \\ &\quad + \frac{b' t}{n(\alpha + \eta)} \sin \theta_1 - \frac{c' t}{n(\alpha + \eta)} \cos \theta_1 \\ \delta Q &= - \left\{ \frac{b}{n(\alpha + \eta)} + \frac{c'}{n^2(\alpha + \eta)^2} \right\} \cos \theta_1 - \left\{ \frac{c}{n(\alpha + \eta)} - \frac{b'}{n^2(\alpha + \eta)^2} \right\} \sin \theta_1 \\ &\quad - \frac{b' t}{n(\alpha + \eta)} \cos \theta_1 - \frac{c' t}{n(\alpha + \eta)} \sin \theta_1 \end{aligned}$$

und hiemit

$$\begin{aligned} s &= - \left\{ \frac{b}{n(\alpha + \eta)} + \frac{c'}{n^2(\alpha + \eta)^2} \right\} \sin (f + \omega - \theta_1) - \left\{ \frac{c}{n(\alpha + \eta)} - \frac{b'}{n^2(\alpha + \eta)^2} \right\} \cos (f + \omega - \theta_1) \\ &\quad - \frac{b' t}{n(\alpha + \eta)} \sin (f + \omega - \theta_1) - \frac{c' t}{n(\alpha + \eta)} \cos (f + \omega - \theta_1) \end{aligned}$$

Auf die Länge findet hier keine directe Wirkung statt, aber es wirkt eben so wie in § 11 die Function  $\delta Q$  ein, weshalb der Ausdruck

$$T = \left( \frac{dT_0}{dQ} \right) \delta Q$$

angewandt werden muss, in welchem zufolge des Art. 155

$$\left( \frac{dT_0}{dQ} \right) = - 8 \alpha \sin \frac{1}{2} J \sin (g - \gamma)$$

substituirt werden muss. Hiemit bekommen wir mit ausreichender Genauigkeit die Glieder

$$\begin{aligned}
 T = & \quad 4 \sin \frac{1}{2} J \left\{ \frac{b}{n} + \frac{c'}{n^2(\alpha+\eta)} \right\} \sin(-\gamma+g+\theta_1) - 4 \sin \frac{1}{2} J \left\{ \frac{c}{n} - \frac{b'}{n^2(\alpha+\eta)} \right\} \cos(-\gamma+g+\theta_1) \\
 & - 4 \sin \frac{1}{2} J \left\{ \frac{b}{n} + \frac{c'}{n^2(\alpha+\eta)} \right\} \sin(\gamma-g+\theta_1) + 4 \sin \frac{1}{2} J \left\{ \frac{c}{n} - \frac{b'}{n^2(\alpha+\eta)} \right\} \cos(\gamma-g+\theta_1) \\
 & + 4 \sin \frac{1}{2} J \frac{b't}{n} \sin(-\gamma+g+\theta_1) - 4 \sin \frac{1}{2} J \frac{c't}{n} \cos(-\gamma+g+\theta_1) \\
 & - 4 \sin \frac{1}{2} J \frac{b't}{n} \sin(\gamma-g+\theta_1) + 4 \sin \frac{1}{2} J \frac{c't}{n} \cos(\gamma-g+\theta_1).
 \end{aligned}$$

und hieraus durch die erste Integration

$$\begin{aligned}
 \overline{W}_0 = & - 8 \sin \frac{1}{2} J \left\{ \frac{b}{n} + \frac{c'}{n^2(\alpha+\eta)} \right\} \cos \theta_1 - 8 \sin \frac{1}{2} J \left\{ \frac{c}{n} - \frac{b'}{n^2(\alpha+\eta)} \right\} \sin \theta_1 \\
 & - 8 \sin \frac{1}{2} J \frac{b't}{n} \cos \theta_1 - 8 \sin \frac{1}{2} J \frac{c't}{n} \sin \theta_1
 \end{aligned}$$

und durch die zweite Integration

$$\begin{aligned}
 n\delta z = & - 8 \sin \frac{1}{2} J \left\{ \frac{b}{n(\alpha+\eta)} + \frac{2c'}{n^2(\alpha+\eta)^2} \right\} \sin \theta_1 + 8 \sin \frac{1}{2} J \left\{ \frac{c}{n(\alpha+\eta)} - \frac{2b'}{n^2(\alpha+\eta)^2} \right\} \cos \theta_1 \\
 & - 8 \sin \frac{1}{2} J \frac{b't}{n(\alpha+\eta)} \sin \theta_1 + 8 \sin \frac{1}{2} J \frac{c't}{n(\alpha+\eta)} \cos \theta_1
 \end{aligned}$$

Auf die Glieder in  $\nu$  brauchen wir hier wieder keine Rücksicht zu nehmen.

176.

Die Untersuchung der Sonnenbewegung hat mir für das Jahr 1800 gegeben,

$$\begin{aligned}
 b & = + 0''0577723, & c & = - 0''46770 \\
 b' & = + 0''00003774, & c' & = + 0''00004125
 \end{aligned}$$

hiemit und da  $n(\alpha+\eta) = 69680''$  ist, geben die vorstehenden Ausdrücke

$$\begin{aligned}
 s & = - 0''174 \sin(f+\omega-\theta_1) + 1''384 \cos(f+\omega-\theta_1) \\
 & - 0''0001447 t \sin(f+\omega-\theta_1) - 0''0000333 t \cos(f+\omega-\theta_1) \\
 n\delta z & = - 0''061 \sin \theta_1 - 0''497 \cos \theta_1 \\
 & - 0''0000404 t \sin \theta_1 + 0''0000120 t \cos \theta_1
 \end{aligned}$$

Die hier mit  $t$  multiplicirten Glieder sind zu klein um Berücksichtigung zu verdienen, ich habe sie daher in den Mondtafeln weggelassen.

177.

Zu den eben berechneten Gliedern fügt die directe Wirkung der Planeten etwas hinzu. Um dieses zu entwickeln, entnehme ich der Störungfunction des Art. 170 die folgenden Glieder,

$$a\Omega = -3m''u^2 \left(\frac{r}{a}\right)^2 \left(\frac{a}{R}\right)^5 \sin \frac{1}{2}J \sin \frac{1}{2}J'' \cdot a \left\{ \left(\frac{r'}{a'}\right) \left(\frac{r''}{a''}\right) \cos(\omega' + f' - f'' - \omega'') \right. \\ \left. - a \left(\frac{r''}{a''}\right)^2 \cos(\omega' - \omega'') \right\}$$

Da wir hier wieder die Excentricitäten übergehen dürfen, so ist

$$\left(\frac{a'}{R}\right)^5 = A_0^{(5)} + 2A_1^{(5)} \cos(g' - g'' + \omega' - \omega'')$$

zu substituiren. Erwägen wir ferner, dass zufolge des Art. 170

$$\omega' = \pi' - \theta, \quad \omega'' = \pi'' - \theta''$$

wo  $\theta$  die Länge des aufsteigenden Mondknotens selbst, und  $\theta''$  die des aufsteigenden Knotens der Planetenbahn auf der Ecliptik bedeuten, so wird

$$a\Omega = -3m''u^2 \left(\frac{r}{a}\right)^2 \sin \frac{1}{2}J \sin \frac{1}{2}J'' a \left\{ A_1^{(5)} - aA_0^{(5)} \right\} \cos(\theta - \theta'')$$

Da nun

$$\theta = -n(\alpha + \eta)t - N + K + \pi' *$$

ist, so ergibt sich mit hinreichender Genauigkeit

$$\frac{dP}{ndt} = \frac{3}{2} m'' u^2 \sin \frac{1}{2}J'' a \left\{ A_1^{(5)} - aA_0^{(5)} \right\} \cos(\theta - \theta'')$$

$$\frac{dQ}{ndt} = -\frac{3}{2} m'' u^2 \sin \frac{1}{2}J'' a \left\{ A_1^{(5)} - aA_0^{(5)} \right\} \sin(\theta - \theta'')$$

und hieraus durch die Integration und Substitution

$$\delta P = -\frac{3}{2} L \sin(\theta - \theta''), \quad \delta Q = -\frac{3}{2} L \cos(\theta - \theta'')$$

$$s = -\frac{3}{2} L \sin(f + \omega + \theta - \theta'')$$

wenn man zur Abkürzung

$$L = m'' u^2 \sin \frac{1}{2}J'' a \frac{A_1^{(5)} - aA_0^{(5)}}{\alpha + \eta}$$

setzt. Da ferner hier

$$\left(\frac{da\Omega}{dv}\right) = 0, \quad r \left(\frac{da\Omega}{dr}\right) = 2a\Omega$$

ist, so giebt der oft angewandte Ausdruck,

$$T_0 = -6(\alpha + \eta)L \sin \frac{1}{2}J \sin(-\gamma + g + \theta - \theta'') \\ + 6(\alpha + \eta)L \sin \frac{1}{2}J \sin(\gamma - g + \theta - \theta'')$$

\*) Es ist eigentlich in diesem Ausdruck  $\pi'$  die Länge des Sonnenperigäums für die Zeitepoche, während sonst in diesem §  $\pi'$  die Länge des Perihels der Erde ist. Auf die hier entwickelten und noch zu entwickelnden Ausdrücke hat dieser Unterschied in der Bedeutung von  $\pi'$  keinen Einfluss.

Da nun hier  $T = T_0 + \left(\frac{dT_0}{dQ}\right) \delta Q$

gesetzt werden muss, und wie oben

$$\left(\frac{dT_0}{dQ}\right) = -8\alpha \sin \frac{1}{2} J \sin (g - \gamma)$$

ist, so wird

$$\begin{aligned} \left(\frac{dT_0}{dQ}\right) \delta Q = & + 6\alpha L \sin \frac{1}{2} J \sin (-\gamma + g + \theta - \theta'') \\ & - 6\alpha L \sin \frac{1}{2} J \sin (\gamma - g + \theta - \theta'') \end{aligned}$$

Hieraus folgt bis auf unmerkliche Grössen

$$T = 0$$

und folglich auch

$$n\delta z = 0$$

die hier betrachteten Glieder haben also auf die Mondlänge keinen Einfluss, sondern dieser erstreckt sich bloss auf die Mondbreite.

178.

Ich füge den im Art. 174 aufgestellten Daten die folgenden hinzu,

$$\begin{aligned} \log \sin \frac{1}{2} J'' = & 8.7858; \quad \theta'' = 46^\circ 33' \text{ für Merkur} \\ = & 8.4711; \quad = 74 \quad 52 \quad \text{» Venus} \\ = & 8.2084; \quad = 48 \quad 0 \quad \text{» Mars} \\ = & 8.0596; \quad = 98 \quad 26 \quad \text{» Jupiter} \\ = & 8.3376; \quad = 111 \quad 56 \quad \text{» Saturn} \end{aligned}$$

und somit ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} L = & + 0.003 \text{ von Merkur} \\ = & + 0.243 \quad \text{» Venus} \\ = & - 0.004 \quad \text{» Mars} \\ = & - 0.039 \quad \text{» Jupiter} \\ = & - 0.003 \quad \text{» Saturn} \end{aligned}$$

Da nun zufolge des vor. Art.

$$s = -\frac{1}{2} L \cos \theta'' \sin (f + \omega - \theta_1) + \frac{1}{2} L \sin \theta'' \cos (f + \omega - \theta_1)$$

wo  $\theta_1$  wieder das Supplement der siderischen Länge des aufsteigenden Mondknotens bedeutet, so wird im Ganzen

$$\begin{aligned} s = & - 0.069 \sin (f + \omega - \theta_1) + 0.193 \cos (f + \omega - \theta_1) \\ n\delta z = & 0 \end{aligned}$$

und addirt man hiezu die im Art. 176 berechneten Glieder, so bekommt man

$$ndz = -0,061 \sin \theta_1 - 0,497 \cos \theta_1$$

$$s = -0,240 \sin (f+\omega-\theta_1) + 1,577 \cos (f+\omega-\theta_1)$$

die den von der Figur der Erde bewirkten,

$$ndz = -7,624 \sin \Theta$$

$$s = -8,382 \sin (f+\omega-\Theta)$$

einzuverleiben sind. Zu dem Ende ist

$$\theta_1 = \Theta + 50,223 (t-1800)$$

und da der Unterschied zwischen  $\theta_1$  und  $\Theta$  so klein ist, so können wir ihn als eine Säcularänderung der Coefficienten betrachten, von welcher die bloße Berücksichtigung der ersten Potenz für Tausende von Jahren ausreicht.

Die eben gefundenen von den Planeten herrührenden Glieder werden hiemit

$$ndz = -0,061 \sin \Theta - 0,497 \cos \Theta$$

$$-0,000015 (t-1800) \cos \Theta + 0,000121 (t-1800) \sin \Theta$$

$$s = -0,240 \sin (f+\omega-\Theta) + 1,577 \cos (f+\omega-\Theta)$$

$$+0,000058 (t-1800) \cos (f+\omega-\Theta) + 0,000384 (t-1800) \sin (f+\omega-\Theta)$$

Fügt man diesen die von der Figur der Erde bewirkten, eben angegebenen, Glieder hinzu, und zieht zusammen, so wird

$$ndz = 7,701 \sin (\Theta + 183^\circ 42')$$

$$+ 0,00012 (t-1800) \cos (\Theta + 263^\circ 0')$$

$$s = 8,784 \sin (f+\omega-\Theta + 169^\circ 38')$$

$$+ 0,000388 (t-1800) \cos (f+\omega-\Theta + 278^\circ 39')$$

die in den Mondtafeln aufgenommen sind.

Das Vorhandensein der hier berechneten, von der Aenderung der Lage der Ecliptik im Raume abhängigen Glieder habe ich zuerst gefunden, und ihre analytischen Ausdrücke schon in den *Fundamenta etc.* entwickelt. Später hat Airy bei der Reduction der Greenwicher Beobachtungen von 1750 bis 1830 die Hauptglieder, nemlich das mit  $\cos \Theta$  in der Länge und das mit  $\cos (f+\omega-\Theta)$  in der Breite multiplicirte, aus den Beobachtungen mit Sicherheit erkannt.\*) Er findet aus den Beobachtungen die Coefficienten um ein Weniges grösser, wie die

\*) S. Schum. Astr. Nachr. B. XXVII, Beilage zu No. 648.

Theorie sie oben angegeben hat, und zwar  $-0,97$  statt  $-0,497$ , und  $+2,17$  statt  $+1,577$ . Diese Unterschiede sind aber nicht grösser als dass sie den unvermeidlichen Fehlern der Beobachtungen zugeschrieben werden können.

179.

Um die Wirkung der Planeten auf die Evection und die Variation der Länge und des Radius Vectors zu erhalten, brauchen wir denselben Theil der Störungfunction, welcher im Art. 172 angewandt wurde.

Dieser ist  $a\Omega = \frac{1}{2}u^2K \left(\frac{r}{a}\right)^2 \cos(2f-2g'+2\omega-2\omega')$

wo  $K$  dieselbe Bedeutung hat wie a. a. O. Substituirt man hierin

$$\left(\frac{r}{a}\right)^2 = 1 - 2e \cos g, \quad f = g + 2e \sin g$$

so bekommt man

$$a\Omega = -\frac{1}{2}u^2Ke \cos(g-2g'+2\omega-2\omega') \\ + \frac{1}{2}u^2K \cos(2g-2g'+2\omega-2\omega')$$

und hieraus

$$\left(\frac{da\Omega}{dv}\right) = +\frac{1}{2}u^2Ke \sin(g-2g'+2\omega-2\omega') \\ - \frac{1}{2}u^2K \sin(2g-2g'+2\omega-2\omega') \\ r \left(\frac{da\Omega}{dr}\right) = -\frac{1}{2}u^2Ke \cos(g-2g'+2\omega-2\omega') \\ + \frac{1}{2}u^2K \cos(2g-2g'+2\omega-2\omega')$$

und hiemit geben die Ausdrücke des Art. 28

$$T_0 = -\frac{3}{4}u^2eK \sin(g-2g'+2\omega-2\omega') \\ + \frac{1}{2}u^2eK \sin(-\gamma+2g-2g'+2\omega-2\omega') \\ + \frac{1}{2}u^2eK \sin(\gamma-2g'+2\omega-2\omega') \\ + \frac{1}{2}u^2K \sin(2g-2g'+2\omega-2\omega') \\ - \frac{1}{2}u^2K \sin(-\gamma+3g-2g'+2\omega-2\omega') \\ - \frac{1}{2}u^2K \sin(\gamma+g-2g'+2\omega-2\omega')$$

verwandelt man diesen Ausdruck durch Hülfe der oben gegebenen Werthe in Zahlen, so bekommt man

$$T_0 = T = -0,003 \sin(g-2g'+2\omega-2\omega') \\ + 0,002 \sin(-\gamma+2g-2g'+2\omega-2\omega') \\ + 0,0037 \sin(\gamma-2g'+2\omega-2\omega') \\ + 0,018 \sin(2g-2g'+2\omega-2\omega') \\ - 0,006 \sin(-\gamma+3g-2g'+2\omega-2\omega') \\ - 0,018 \sin(\gamma+g-2g'+2\omega-2\omega')$$

und hieraus durch die erste Integration

$$\begin{aligned}
 W = & +0,003 \cos (g-2g'+2\omega-2\omega') \\
 & -0,004 \cos (-\gamma+2g-2g'+2\omega-2\omega') \\
 & 0,000 \cos (-2\gamma+3g-2g'+2\omega-2\omega') \\
 & +0,026 \cos (\gamma-2g'+2\omega-2\omega') \\
 & -0,009 \cos (2g-2g'+2\omega-2\omega') \\
 & +0,002 \cos (-\gamma+3g-2g'+2\omega-2\omega') \\
 & +0,018 \cos (\gamma+g-2g'+2\omega-2\omega')
 \end{aligned}$$

woraus

$$\begin{aligned}
 \overline{W} = & +0,028 \cos (g-2g'+2\omega-2\omega') \\
 & +0,011 \cos (2g-2g'+2\omega-2\omega') \\
 \left(\frac{d\overline{W}}{d\gamma}\right) = & -0,027 \sin (g-2g'+2\omega-2\omega') \\
 & -0,016 \sin (2g-2g'+2\omega-2\omega')
 \end{aligned}$$

folgt. Die zweite Integration giebt daher

$$\begin{aligned}
 ndz = & +0,028 \sin (g-2g'+2\omega-2\omega') \\
 & +0,006 \sin (2g-2g'+2\omega-2\omega') \\
 \nu = & -0,014 \cos (g-2g'+2\omega-2\omega') \\
 & -0,004 \cos (2g-2g'+2\omega-2\omega')
 \end{aligned}$$

Die obigen Glieder von  $T$  sind schon im § 6 bei der Integration den Hauptgliedern hinzugefügt worden, wie auch dort angemerkt ist. Ich habe die Entwicklung hier nur aus dem Grunde weiter ausgeführt, um den Einfluss derselben auf das Resultat zu zeigen.

180.

Um die Wirkung der Planeten auf die Evection der Breite zu erhalten, müssen wir wieder die Glieder der Störungfunction vornehmen, die im Art. 173 entwickelt wurden. Diese gaben

$$a\Omega = \frac{1}{2}u^2K \sin \frac{1}{2}J \cos (2g'+2\omega')$$

und hieraus folgt

$$\begin{aligned}
 \frac{dP}{ndt} = & -\frac{1}{2}u^2K \sin \frac{1}{2}J \cos (2g'+2\omega') \\
 \frac{dQ}{ndt} = & -\frac{1}{2}u^2K \sin \frac{1}{2}J \sin (2g'+2\omega')
 \end{aligned}$$



oder in Zahlen

$$\frac{dP}{ndt} = -0,00060 \cos(2g' + 2\omega')$$

$$\frac{dQ}{ndt} = -0,00060 \sin(2g' + 2\omega')$$

und da nach § 6 der Logarithmus des Integrationsfactors hier = 0.7990 ist, so wird

$$\delta P = -0,003 \sin(2g' + 2\omega')$$

$$\delta Q = +0,003 \cos(2g' + 2\omega')$$

auch diese Glieder sind im § 6 mit berücksichtigt worden.



### Berichtigungen.

pag. 111, Zeile 1 v. o. lies  $x' = +$  statt  $-$

2 v. o. »  $y' = +$  »  $-$

» 154 » 8 v. u. »  $+\frac{1}{8}P^2Q^2 + \frac{1}{16}Q^4 = -\frac{1}{8}P^2Q^2 - \frac{1}{16}Q^4$

» 185 » 3 v. u. »  $-0,02 = +$

» 440, 3te Col. Zeile 5 v. u. lies 9,40 statt 7,40.

---

**P. A. HANSEN,**

MITGLIED DER KÖNIGLICH SÄCHSISCHEN GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN

**DARLEGUNG**

DER

**THEORETISCHEN BERECHNUNG**

DER IN DEN

**MONDTAFELN**

**ANGEWANDTEN STÖRUNGEN.**

---

**ERSTE ABHANDLUNG.**

---

Aus den Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe der Königlich  
Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften. Band VI.

---

**LEIPZIG**

**BEI S. HIRZEL.**

1862.

# ABHANDLUNGEN

DER

## KÖNIGL. SÄCHSISCHEN GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN

ZU LEIPZIG.

**ERSTER BAND:** Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe.  
Erster Band. Mit 3 Tafeln. hoch 4. 1852. broch. Preis 4 Thlr. 16 Ngr.

- Inhalt:
- A. F. MÖBIUS, über die Grundformen der Linien der dritten Ordnung. 24 Ngr.  
P. A. HANSEN, allgemeine Auflösung eines beliebigen Systems von linearischen Gleichungen. — Ueber die Entwicklung der Grösse  $(1 - 2\alpha H + \alpha^2)^{-\frac{1}{2}}$  nach den Potenzen von  $\alpha$ . 10 Ngr.  
A. SEEBECK, über die Querschwingungen elastischer Stäbe. 12 Ngr.  
C. F. NAUMANN, über die cyclocentrische Conchospirale und über das Windungsgesetz von Planorbis Corneus. 10 Ngr.  
W. WEBER, elektrodynamische Maassbestimmungen (Widerstandsmessungen). 1 Thlr.  
F. REICH, neue Versuche mit der Drehwaage. 20 Ngr.  
M. W. DROBISCH, Zusätze zum florentiner Problem. 16 Ngr.  
W. WEBER, elektrodynamische Maassbestimmungen (Diamagnetismus.) 20 Ngr.

**ZWEITER BAND:** Abhandlungen der philologisch-historischen Classe.  
Erster Band. Mit einer Karte. hoch 4. 1850. broch. Preis 6 Thlr.

- Inhalt:
- A. WESTERMANN, Untersuchungen über die in die attischen Redner eingelegten Urkunden. 2 Abhandlungen. 1 Thlr.  
F. A. URERT, über Dämonen, Heroen und Genien. 24 Ngr.  
TH. MOMMSEN, über das römische Münzwesen. 1 Thlr. 20 Ngr.  
E. v. WIETERSHEIM, der Feldzug des Germanicus an der Weser. 1 Thlr.  
G. HARTENSTEIN, Darstellung der Rechtsphilosophie des Hugo Grotius. 20 Ngr.  
TH. MOMMSEN, über den Chronographen vom Jahre 354. Mit einem Anhang über die Quellen der Chronik des Hieronymus. 1 Thlr. 10 Ngr.

**DRITTER BAND:** Abhandlungen der philologisch-historischen Classe.  
Zweiter Band. Mit 3 Tafeln. hoch 4. 1857. broch. Preis 7 Thlr. 10 Ngr.

- Inhalt:
- W. ROSCHER, zur Geschichte der Englischen Volkswirtschaftslehre im sechzehnten und siebzehnten Jahrhundert. 1851. 1 Thlr.  
Nachträge. 1852. 8 Ngr.  
J. G. DROYSEN, Eberhard Windeck. 1853. 24 Ngr.  
TH. MOMMSEN, Polemii Silvii laterculus. 1853. 16 Ngr.  
Volusii Maeciani distributio partium. 1853. 6 Ngr.  
J. G. DROYSEN, zwei Verzeichnisse, Kaiser Karls V. Lande, seine und seiner Grossen Einkünfte und anderes betreffend. 1854. 20 Ngr.  
TH. MOMMSEN, die Stadtrechte der latinischen Gemeinden Salpensa und Malaca in der Provinz Baetica. 1855. 1 Thlr.  
Nachträge. 1855. 16 Ngr.  
FRIEDRICH ZARNCKE, Die urkundlichen Quellen zur Geschichte der Universität Leipzig in den ersten 150 Jahren ihres Bestehens. 1857. 3 Thlr.

**VIERTER BAND:** Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe.  
Zweiter Band. Mit 19 Tafeln. hoch 4. 1855. br. Preis 6 Thlr. 20 Ngr.

- Inhalt:
- M. W. DROBISCH, über musikalische Tonbestimmung und Temperatur. 1852. 1 Thlr.  
W. HOFMEISTER, Beiträge zur Kenntniss der Gefässkryptogamen. Mit 18 Tafeln. 1852. 1 Thlr. 10 Ngr.  
P. A. HANSEN, Entwicklung des Products einer Potenz des Radius Vectors mit dem Sinus oder Cosinus eines Vielfachen der wahren Anomalie in Reihen, die nach den Sinussen oder Cosinussen der Vielfachen der wahren, excentrischen oder mittleren Anomalie fortschreiten. 1853. 1 Thlr.  
Entwicklung der negativen und ungraden Potenzen der Quadratwurzel der Function  $r^2 + r'^2 - 2rr'(\cos U \cos U' + \sin U \sin U' \cos J)$ . 1854. 1 Thlr.  
O. SCHLÖMILCH, über die Bestimmung der Massen und der Trägheitsmomente symmetrischer Rotationskörper von ungleichförmiger Dichtigkeit. 1854. 8 Ngr.  
Ueber einige allgemeine Reihenentwicklungen und deren Anwendung auf die elliptischen Functionen. 1854. 16 Ngr.  
P. A. HANSEN, die Theorie des Aequatoreals. 1855. 24 Ngr.  
C. F. NAUMANN, über die Rationalität der Tangenten-Verhältnisse tautozonaler Krystallflächen. 1855. 10 Ngr.  
A. F. MÖBIUS, Die Theorie der Kreisverwandtschaft in rein geometrischer Darstellung. 1855. 20 Ngr.

**FÜNFTER BAND: Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe.**  
Dritter Band. Mit 15 Tafeln. hoch 4. 1857. br. Preis 6 Thlr. 12 Ngr.

Inhalt:

- M. W. DROBISCH, Nachträge zur Theorie der musik. Tonverhältnisse. 1855. 12 Ngr.  
P. A. HANSEN, Auseinandersetzung einer zweckmässigen Methode zur Berechnung der absoluten Störungen der kleinen Planeten. 1856. 1 Thlr. 20 Ngr.  
R. KOHLRAUSCH und W. WEBER, Elektrodynamische Maassbestimmungen insbesondere Zurückführung der Stromintensitäts-Messungen auf mechanisches Maass. 1856. 16 Ngr.  
H. D'ARREST, Resultate aus Beobachtungen der Nebelflecken und Sternhaufen. Erste Reihe. 1856. 24 Ngr.  
W. G. HANKEL, Elektrische Untersuchungen. Erste Abhandlung: über die Messung der atmosphärischen Elektricität nach absolutem Maasse. Mit 2 Tafeln. 1856. 2 Thlr.  
W. HOFMEISTER, Beiträge zur Kenntniss der Gefässkryptogamen. No. II. Mit 13 Tafeln. 1857. 1 Thlr. 10 Ngr.

**SECHSTER BAND: Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe.**  
Vierter Band. Mit 29 Tafeln. hoch 4. 1859. Preis 7 Thlr. 15 Ngr.

Inhalt:

- P. A. HANSEN, Auseinandersetzung einer zweckmässigen Methode zur Berechnung der absoluten Störungen der kleinen Planeten. Zweite Abhandlung. 1857. 1 Thlr. 10 Ngr.  
W. G. HANKEL, Elektrische Untersuchungen. Zweite Abhandlung: über die thermoelektrischen Eigenschaften des Boracites. 1857. 24 Ngr.  
W. G. HANKEL, Elektrische Untersuchungen. Dritte Abhandlung: über Elektricitäts-erregung zwischen Metallen und erhitzten Salzen. 1858. 16 Ngr.  
P. A. HANSEN, Theorie der Sonnenfünsternisse und verwandten Erscheinungen. Mit 2 Tafeln. 1858. 2 Thlr.  
G. T. FECHNER, Über ein wichtiges psychophysisches Grundgesetz und dessen Beziehung zur Schätzung der Sterngrössen. 1858. 20 Ngr.  
W. HOFMEISTER, Neue Beiträge zur Kenntniss der Embryobildung der Phanerogamen. I. Dikotyledonen mit ursprünglich einzelligem, nur durch Zelltheilung wachsendem Endosperm. Mit 27 Tafeln. 1859. 2 Thlr. 20 Ngr.

**SIEBENTER BAND: Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe.**  
Fünfter Band. Mit 30 Tafeln. hoch 4. 1861. Preis 8 Thlr.

Inhalt:

- W. G. HANKEL, Elektrische Untersuchungen. Vierte Abhandlung: über das Verhalten der Weingeistflamme in elektrischer Beziehung. 1859. 20 Ngr.  
P. A. HANSEN, Auseinandersetzung einer zweckmässigen Methode zur Berechnung der absoluten Störungen der kleinen Planeten. Dritte Abhandlung. 1859. 2 Thlr. 12 Ngr.  
G. T. FECHNER, Über einige Verhältnisse des binocularen Sehens. 1860. 1 Thlr. 26 Ngr.  
G. METTENIUS, Zwei Abhandlungen: I. Beiträge zur Anatomie der Cycadeen. Mit 5 Tafeln. II. Über Seitenknospen bei Farnen. 1860. 1 Thlr.  
W. HOFMEISTER, Neue Beiträge zur Kenntniss der Embryobildung der Phanerogamen. II. Monokotyledonen. Mit 25 Tafeln. 1861. 2 Thlr. 20 Ngr.

**ACHTER BAND: Abhandlungen der philologisch-historischen Classe.**  
Dritter Band. Mit 8 Tafeln. hoch 4. 1861. Preis 8 Thlr.

Inhalt:

- H. C. VON DER GABELENTZ, die Melanesischen Sprachen nach ihrem grammatischen Bau und ihrer Verwandtschaft unter sich und mit den Malaiisch-Polynesischen Sprachen. 1860. 2 Thlr. 20 Ngr.  
G. FLÜGEL, die Classen der Hanefitischen Rechtsgelehrten. 1860. 24 Ngr.  
JOH. GUST. DROYSEN, das Stralendorffische Gutachten. 1860. 24 Ngr.  
H. C. VON DER GABELENTZ, über das Passivum. Eine sprachvergleichende Abhandlung. 1860. 28 Ngr.  
TH. MOMMSEN, die Chronik des Cassiodorus Senator v. J. 519 n. Chr. 1861. 1 Thlr. 10 Ngr.  
OTTO JAHN, über Darstellungen griechischer Dichter auf Vasenbildern. Mit 8 Tafeln. 1861. 2 Thlr.

**NEUNTER BAND: Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe.**  
Sechster Band.

Hiervon ist bis jetzt erschienen:

- W. G. HANKEL, Elektrische Untersuchungen. Fünfte Abhandlung. Maassbestimmungen der elektromotorischen Kräfte. Erster Theil. 1861. 16 Ngr.  
W. G. HANKEL, Messungen über die Absorption der chemischen Strahlen des Sonnenlichtes. 1862. 12 Ngr.  
P. A. HANSEN, Darlegung der theoretischen Berechnung der in den Mondtafeln angewandten Störungen. Erste Abhandlung. 1862. 3 Thlr.

**ZEHNTER BAND: Abhandlungen der philologisch-historischen Classe.**  
Vierter Band.

Hiervon ist bis jetzt erschienen:

- J. OVERBECK, Beiträge zur Erkenntniss und Kritik der Zeusreligion. 1861. 28 Ngr.  
G. HARTENSTEIN, Locke's Lehre von der menschlichen Erkenntniss in Vergleichung mit Leibnitz's Kritik derselben dargestellt. 1861. 1 Thlr. 10 Ngr.  
WILHELM ROSCHER, Die deutsche Nationalökonomik an der Gränzscheide des sechzehnten und siebzehnten Jahrhunderts. 1862. 20 Ngr.

Leipzig, August 1862.

S. Hirzel.

